

# How should we bet on prime number dice ?

大阪大学大学院・理学研究科 小川 裕之

Hiroyuki Ogawa

Department of Mathematics, Osaka University

## §1. 序論

Dirichlet の素数定理より, 任意の整数  $d$  に対して, 法  $d$  に関するどの既約剰余類にも同じ割合で素数が分布する. 例えば 7 を法とする. どの既約剰余類に対しても出現確率は  $1/6 (= 1.666\dots)$  になります.

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 ...  
2 3 5 0 4 6 3 5 2 1 3 2 6 1 5 4 3 5 4 1 3 2 6 5 6 ...

7 を除く  $10^5$  個の最初の素数 ( $10^5+1$  番目の素数 1299721 以下の素数) について, 法 7 に関する剰余が 1 の素数は 16677 個, 2 の素数は 16649 個, 3 の素数は 16686 個, 4 の素数は 16630 個, 5 の素数は 16673 個, 6 の素数は 16685 個で, どれも同じ割合で現れます. 7 を除くと剰余は 1 から 6 で, これを賽の目に見立ててみましょう. どの目も均等に現れますが, 賽の目として適当でしょうか. 目の出方の独立性が問題となります. 合同条件付き素数分布を導入し, 素数分布に関する予想の下で予測値を計算するとともに, 多くの素数を発生させて計算実験を行う. 実験値と予測値を比較検討し, 予測値の正当性の説明を試みます. 研究集会では説明できないことが多くありましたが, その後の研究で進展がありました. 研究集会以後の研究成果を含めて報告いたします.

## §2. 動機

2012 年度に, SSH 指定校の兵庫県立加古川東高等学校の河野誉教諭から地域アドバイザーの依頼を受け, 夏期特別講習と数学課題研究指導を行いました. 夏期特別講習では, 研究教育手法としての実験数学を紹介し, 漠然とした興味, 関心, 疑問を定式化し意義ある問題へ昇華させることの面白さを話しました. 数学課題研究には当時の 2 年生 5 名 (大塚雄登君, 亀井優一君, 衣笠健太郎君, 後藤昂宏君, 日高瑛太郎君) が参加しました. 素数に関する拙文 (高等学校理数コース 3 年生向け出張講義のレジュメ, 素数の無限性と類体論入門) を参考資料に, 実験数学の研究手法で, 自ら発した疑問を定式化し, 既成の問題にはない目の前の現象に向かい合う研究を体感させるようにしました. こうして現れた疑問はとても易しいか, 手に負えないぐらい難しいものばかりなので, 何かが出来るようになったとか何かを成し遂げたとか言う達成感は得られなかったかもしれません.

12 月, 大塚雄登君, 日高瑛太郎君から次の様な実験観察の報告がありました.

$p (\geq 5)$  を素数とする.  $p$  より小さい最大の素数を  $p_f$ ,  $p$  より大きい最小の素数を  $p_n$  とし,  $d_p = \gcd(p_f + p, p + p_n)$  とおく. エラトステネスの篩で 6000 以下の奇素数 (783 個) を求め,  $d_p$  を計算した. 正の偶数  $d$  に対して,  $g_d(x) = \#\{p \leq x \mid d_p = d\}$  を  $x \leq 6000$  でグラフに描いてみた. 公約数  $d$  を大きくとるほど出現頻度が少なくなると思っていたが,  $g_2(x)$  と  $g_6(x)$  のグラフが殆ど同じで, 他の公約数  $d$  についても思ったより値が大きく感じた. ちょっと信じられないけど,  $g_2(x)$  と  $g_6(x)$  って殆ど同じなのではないでしょうか?

実は、もう少したくさん素数を探して計算していれば  $g_2(x)$  と  $g_6(x)$  の間に有意の差が見られます。質問への安直な答えは "No" だとわかるので、ひょっとするとこの実験への興味は無くなっていたかもしれません。大塚君、日高君は当初、双子素数に興味を持っていました。他のグループがフィボナッチ数列を調べ始めたのを見て、前後の素数との和を計算し表にしていました。そして、なぜか隣り合った項の最大公約数を計算し始め、その値ごとに度数をグラフにしたのでした。彼らの報告に対し、 $g_d(x)$  を考えることの数学的意義はよくわからないが、面白い問題に進展するであろうと答え、計算機を使った大規模計算と、合同式を使って考え方をまとめるよう指導しました。翌 2013 年 2 月初旬の加古川東高等学校 SSH 課題研究発表会まで十分な時間がなかったため、数学課題研究におけるまとめとしては  $x \leq 10^7$  での  $g_d(x)/\pi(x)$  の振る舞いをグラフにするにとどまりました。

論点を整理します。  $d_p = \gcd(p_f + p, p + p_n)$  なので、  $p_f \equiv p_n \equiv -p \pmod{d_p}$  です。素数と前後の素数の合同関係を調べる問題で、いろいろなバリエーションが考えられます。

若林功氏に、大塚君、日高君の実験観察について話し、  $d_p$  および  $g_d(x)$  を考えることの意義を尋ねたところ、次のように教えて頂きました。

Dirichlet の素数定理からある程度わかると思われます。  $d = 6$  を例にとると、  $p + p_n$  が 6 の倍数である確率も、  $p_f + p$  が 6 の倍数である確率も  $1/2$  なので、  $p + p_n$  と  $p_f + p$  がともに 6 の倍数になる確率は  $1/4$  と考えられ、  $\sum_{6|d} g_d(x) \sim 1/4 \pi(x)$  と考えられます。問題を単純化して  $\#\{p \leq x \mid 6 \mid p + p_n\} / \pi(x)$  を考えてみます。  $1/2$  になると思われますが、  $x = 10^7$  で計算すると 55.9% で 50% になりそうにない。面白い話になるかもしれないが、古くから調べられている可能性があるので、文献を十分に調べた方がよいでしょう。

文献をいろいろ当たってみました。それらしいものもなかなか見当たらず、若林氏も同じように考えて実験されたのを知り、大規模実験をすることにしました。現有計算機の処理能力を考えて、  $10^{13}$  程度までの素数について、素数を  $10^6$  個ずつ含む数百の区間を選び、いろいろな合同条件に対して出現割合を計算実験することにしました。

### §3. 合同条件付き素数分布

自然数  $n$  に対して、  $\mu(n)$  で  $n$  が素数である確率とする。  $\mu(n)$  は、有界台関数に対して素数上で関数の値の和をとる積分核、素数に台をもつ Dirac 超関数で定義し、有界台関数空間上の汎関数の空間で近似を考えることになる。煩雑になるので直感的な説明にとどめる。つまりここで言う確率は、有界区間における事象の起こる度数と区間長の比とする。  $\mu(n)$  については  $\pi(x) = \int_1^x \mu(n) dn$  で、素数定理より  $\mu(n) \sim \log(n)^{-1}$  となる。自然数  $n$  について、  $n$  より大きい最小の素数を  $np(n)$  (次の素数, next prime) で表し、次の素数との差を  $gap(n)$  ( $= np(n) - n$ ) で表す。  $d$  を自然数とする。自然数  $n$  について、  $gap(n) = d$  となる確率を  $\mu(n \mid gap(n) = d)$  で表す。素数  $n$  について、  $gap(n) = d$  となる確率を  $\mu_p(n \mid gap(n) = d)$  で表す。自然数  $n$  について、  $n$  が素数で  $gap(n) = d$  となる確率を  $\mu(n, d)$  で表す。自然数  $n$  が素数である事象と、  $gap(n)$  の値に関する事象が独立なら、  $\mu(n \mid gap(n) = d) = \mu_p(n \mid gap(n) = d)$ 、  $\mu(n, d) = \mu(n) \mu_p(n \mid gap(n) = d)$  が成り立つ。どの自然数に対しても素数となる事象が独立なら、  $\mu(n \mid gap(n) = d) = \mu(n+d) \prod_{t=1}^{d-1} (1 - \mu(n+t))$  ( $n+1, \dots, n+d-1$  が合成数で  $n+d$  が素数となる確率) が成り立つ。十分大きい  $n$  に対して、  $\mu(n) \sim \log(n)^{-1}$  で近似すると、  $\mu(n \mid gap(n) = d) \sim \log(n)^{-1} (1 - \log(n)^{-1})^{d-1}$ 、従って  $\mu(n, d) \sim \log(n)^{-2}$  となる。素数の間隔に関する Hardy-Littlewood の予想  $\pi_d(x) \sim c_d x \log(x)^{-2}$  (ここで、  $\pi_d(x)$  で  $x$  以下の素数  $n$  で  $n+d$  も素数となるものの個数を表し、  $c = \prod_{p \geq 3} p(p-2)/(p-1)^2 = 0.66016\dots$ 、  $c_d = 2c \prod_{3 \leq p \mid d} (p-1)/(p-2)$  とする) によると (次節参照)、大雑把だが差分を取ることで、  $n$  と  $n+d$  が共に素数となる確率の主要項は  $c_d \log(n)^{-2}$  となる。Hardy-Littlewood の予想では  $n$  と

$n+d$  の間の素数の有無を考慮していないので、 $n$  と  $n+d$  の間に素数がない状況  $\mu(n, d)$  について直接述べてはいないが、予想に達した推論を  $n$  と  $n+d$  が共に素数でその間に他の素数がある場合に用いればその確率は  $O(\log(n)^{-3})$  で評価されるので、 $\mu(n, d) \sim c_d \log(n)^{-2}$  となる。先に見た  $\mu(n, d) \sim \log(n)^{-2}$  とは主要項が定数倍 ( $c_d$  倍) 違っている。自然数が素数である事象がすべて独立であると仮定したことに起因する。当たり前のことだが、連続 2 自然数の組がともに素数となる事象 ( $d=1$  の例) は  $\{2, 3\}$  以外にないので確率は 0 で、 $\mu(n)\mu(n+1) \sim \log(x)^{-2}$  はよい近似とは言えない。少なくとも合同関係による篩をかけるべきだろう。Hardy-Littlewood の予想は、合同関係による篩のうえに、比較的小さい区間における既約剰余の分布の偏りも考慮しており、実験値をととも良く近似する。ところが、 $n$  が素数であることを仮定しない  $\mu(n|\text{gap}(n)=d)$  について実験すると、 $\log(n)^{-1}(1-\log(n)^{-1})^{d-1}$  が意外に良い近似となっている。但し、実験観察を続けるとどちらの評価も少し雑な気もする。実験値との比は、どちらも同じような挙動をしていて、 $d$  に関してある種の減衰を与える項が欲しくなる。

法  $m$  に関する既約剰余類  $\alpha$  と法  $m'$  に関する既約剰余類  $\beta$  を取る。自然数  $n$  について、 $np(n) \in \beta$  となる確率を  $\mu(n|np(n) \in \beta)$  とおき、剰余類  $\alpha$  に属する素数  $n$  について、 $np(n) \in \beta$  となる条件付き確率を  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  とおく。自然数  $n$  に対して、 $n$  より大きい  $\beta$  のすべての元を並べ  $n < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  ( $n_i \in \beta$ ,  $n_{i+1} = n_i + m'$ ,  $n_1 - m' \leq n$ ),  $d_i = n_i - n$  とおく。  $\mu(n|np(n) \in \beta)$  は  $\mu(n|\text{gap}(n) = d_i)$  の和  $\sum_{i \geq 1} \mu(n|\text{gap}(n) = d_i)$  に等しい。先に、素数であるかどうか、事象の独立性を仮定できないことに触れたが、ここでの事象は排反であるから単純に和を取ってよい。但し、極めて収束の遅い級数である。条件付き確率  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  についても同様に級数  $\sum_{i \geq 1} \mu_p(n|\text{gap}(n) = d_i)$  で表される。  $n$  が素数であることから  $\mu(n|\text{gap}(n) = d_i)$  の代わりに  $\mu_p(n|\text{gap}(n) = d_i)$  の和となる。  $n \in \alpha$  の条件が表立って現れてないが、 $\beta$  の元の列  $n_1 < n_2 < \dots$  を考える際にその条件が影響を与える。  $n_i$  が法  $m$  と素でないとき  $n_i$  は素数でないことになるので、 $\mu_p(n|\text{gap}(n) = d_i)$  ( $d_i = n_i - n$ ) を 0 と思ってよい。あくまでも確率的な意味でこの項を残しておくこともできるが、合同関係による篩をかけた Hardy-Littlewood の予想を踏まえた議論をこの問題に対して展開するのだから、 $n_i$  が  $m$  と素でないところは除くべきであろう。

条件付き確率  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  の振る舞いについて、ここまでの設定で証明できることもある。

**定理 3.1**  $m$  と  $m'$  の一方が 2 の冪で他方が 4 で割り切れないとき、 $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta) \sim \frac{1}{\varphi(m')} \mu_p(n; \alpha)$

少し雑に定義した確率に対して主要項の振る舞いを述べたもので、何だかとても曖昧。少し表現を変える。法  $m$  に関する既約剰余類  $\alpha$ 、法  $m'$  に関する既約剰余類  $\beta$  と、正の実数  $x$  に対して、 $\pi_{\alpha, \beta}(x) = \#\{p < x | p \text{ は素数}, p \in \alpha, np(p) \in \beta\}$ ,  $\pi_{\alpha}(x) = \#\{p < x | p \text{ は素数}, p \in \alpha\}$  とおく。条件付き確率  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  に関係するのが、合同条件付き素数分布  $\pi_{\alpha, \beta}(x)/\pi_{\alpha}(x)$  である。

**定理 3.2**  $m$  と  $m'$  の一方が 2 の冪で他方が 4 で割り切れないとき、 $\pi_{\alpha, \beta}(x) \sim \frac{1}{\varphi(m)m'} \pi_{\alpha}(x)$

定理およびその証明において、誤差項の詳細を述べていない。後で述べるように、法に関する条件なしに、Hardy-Littlewood の予想のもとで  $\pi_{\alpha, \beta}(x)/\pi(x) \rightarrow 1/\varphi(m)\varphi(m')$  ( $x \rightarrow \infty$ ) が得られる。上の定理との違いは、誤差項の評価にある。この意味では誤差項を丹念に評価する必要があるが、定理における法に関する条件のもとで  $\pi(x)$  や  $\pi_{\alpha}(x)$  の素数定理などで知られている誤差評価をそのまま使うことができる。ここではすべて省略する。

$\alpha' = \{n \in \alpha | (n, m_0) = 1\}$ ,  $\beta' = \{n \in \beta | (n, m_0) = 1\}$  を、法  $m_0 (= \text{lcm}(m, m'))$  の既約剰余類の非交叉和  $\alpha' = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_s$ ,  $\beta' = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_t$  に分解する。  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta) = \sum_{i, j} \mu_p(n; \alpha_i \rightarrow \beta_j)$ ,  $\pi_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{i, j} \pi_{\alpha_i, \beta_j}(x) + O(1)$  ( $m_0$  の素因子を数えたり数えなかったり) と表せる。少し大雑把だが、 $\pi_{\alpha_i, \beta_j}(x)$  は測度  $\mu_p(n; \alpha_i \rightarrow \beta_j) dn$  に関する区間  $(0, x]$  の体積である。  $s \times t$  個の測度

$\mu_p(n; \alpha_i \rightarrow \beta_j) dn$  はすべて台が異なるので,  $\sum_{i,j} \pi_{\alpha_i, \beta_j}(x)$  の和は, 測度の和  $\sum_{i,j} \mu_p(n; \alpha_i \rightarrow \beta_j) dn$  に関する区間  $(0, x]$  の体積に等しい.

$m'$  を 2 冪,  $m$  を 4 で割り切れない自然数とする.  $T: n \mapsto n+m_1$  ( $m_1 = \text{lcm}(m, 2)$ ) とおく. 平行移動  $T$  は,  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ ,  $(\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^*$ ,  $(\mathbb{Z}/m_0\mathbb{Z})^*$  の上に置換を引き起こす. これら置換も  $T$  で表す.  $\mu_p(n; \alpha_i \rightarrow \beta_j)$  は  $n \in \alpha_i$  と  $\beta_j$  の元の差で定まるので,  $\mu_p(T(n); T(\alpha_i) \rightarrow T(\beta_j)) \sim \mu_p(n; \alpha_i \rightarrow \beta_j)$  となる. 置換  $T$  の  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  への作用は恒等置換なので,  $T$  は  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$  の上に置換を引き起こす.  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow T(\beta)) \sim \mu_p(T(n); T(\alpha) \rightarrow T(\beta)) = \sum_{i,j} \mu_p(T(n); T(\alpha_i) \rightarrow T(\beta_j)) \sim \sum_{i,j} \mu_p(n; \alpha_i \rightarrow \beta_j) = \mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  が成り立つ. 置換  $T$  の  $(\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^*$  への作用はすべての既約剰余類 (奇数) を渡る位数  $\varphi(m')$  ( $= m'/2$ ) の巡回置換なので,  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  は  $\beta \in (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^*$  に依らない. 従って  $\pi_{\alpha, \beta}(x)$  の主要項は  $\beta \in (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^*$  に依らない.  $\sum_{\beta \in (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^*} \pi_{\alpha, \beta}(x) \sim \pi_{\alpha}(x)$  なので  $\pi_{\alpha, \beta}(x) \sim \pi_{\alpha}(x)/\varphi(m')$  となる. Dirichlet の素数定理より  $\pi_{\alpha, \beta}(x) \sim \pi(x)/\varphi(m m')$  を得る.

$m$  を 2 冪,  $m'$  を 4 で割り切れない自然数とする.  $\pi_{\alpha, \beta}(x)$  ( $\alpha \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ ,  $\beta \in (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^*$ ) の主要項は  $\alpha$  に依らない.  $\sum_{\alpha} \pi_{\alpha, \beta}(x) = \pi_{\beta}(x) + O(1)$  ( $m_0$  の素因子と,  $x$  より大きく  $x+m'$  を越えない範囲の素数を数えたり数えなかつたり) なので,  $\pi_{\alpha, \beta}(x) \sim \pi_{\beta}(x)/\varphi(m) \sim \pi(x)/\varphi(m m')$  を得る.

#### §4. 素数間隔に関する Hardy-Littlewood の予想

正の偶数  $d$  に対して,  $\pi_d(x) = \#\{n < x \mid n, n+d \text{ が共に素数}\}$  とおく. Hardy-Littlewood は  $\pi_d(x)$  の評価について次のように予想した.

**予想 4.1 (Hardy-Littlewood)**  $\pi_d(x) \sim c_d \frac{x}{\log(x)^2}$  但し,  $c = \prod_{p \geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$ ,  $c_d = 2c \prod_{3 \leq p \mid d} \frac{(p-1)}{(p-2)}$

G.H.Hardy-E.M.Write "An Introduction to the Theory of Numbers" に従ってこの予想に至る推論を紹介する.  $N_x = \prod_{p \leq \sqrt{x}} p$  とおく. 正の実数  $X$  に対して  $X$  以下の自然数で  $N_x$  と素なもの個数を  $S(X)$  とおく. このとき  $S(N_x) = \varphi(N_x) = N_x \prod_{p \leq \sqrt{x}} (1-1/p)$  となる. Mertens の定理より  $\prod_{p \leq \sqrt{x}} (1-1/p) \sim e^{-\gamma} / \log \sqrt{x} = 2e^{-\gamma} / \log(x)$  が成り立つので,  $S(N_x)/N_x \sim 2e^{-\gamma} / \log(x)$  を得る.  $\sqrt{x}$  より大きく  $x$  を越えない素数は  $N_x$  と素な自然数なので,  $S(x) = \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) \sim x / \log(x)$  が成り立つ.  $S(x)/x \sim 1/\log(x)$  を得る.  $N_x$  より大きい  $X$  に対しては,  $X$  以下の自然数の中で  $N_x$  と素なもの割合は  $S(X)/X \sim 2e^{-\gamma} / \log(x)$  なのに対して,  $x$  以下の自然数の中で  $N_x$  と素なもの割合は  $S(x)/x \sim 1/\log(x)$  で, 通常 (?) より若干少なめの  $e^{\gamma}/2 (= 0.89 \dots)$  倍である. なんとも怪しい評価だが作業仮定として認めておいて,  $X$  以下の  $N_x$  と素な自然数  $n$  で  $n+d$  も  $N_x$  と素なもの個数  $S_d(X)$  の評価に移る.  $p \leq \sqrt{x}$  に対して  $n \neq 0, -d \pmod p$  なので,  $S_d(N_x) = \prod'_{p \mid d} (p-2) \prod_{p \nmid d} (p-1)$  となる. ここで,  $\prod'$  は  $\sqrt{x}$  以下の奇素数  $p$  をわたる積とする.  $N_x$  と素な自然数の割合に関するちよつと怪しい議論より,  $N_x$  と素な 2 つの自然数の組に言及した  $S_d(x)$  について, 安直に割合の比率を  $(e^{\gamma}/2)^2$  として  $S_d(x)/x \sim S_d(N_x)/N_x \times (e^{\gamma}/2)^2$  と考えられる,  $e^{\gamma}/2 \sim 2 \prod' (1-1/p)^{-1} / \log(x)^2$  なので,  $S_d(x)/x \sim 2 \prod' (1-2/p)/(1-1/p)^2 \prod_{3 \leq p \mid d} (p-1)/(p-2) / \log(x)^2 \sim c_d / \log(x)^2$  を得る. ところで,  $S_d(x) = \pi_d(x) - \pi_d(\sqrt{x})$  なので  $\pi_d(x) = S_d(x) + S_d(\sqrt{x}) + S_d(\sqrt[4]{x}) + S_d(\sqrt[8]{x}) + \dots$  となる.  $S_d(\sqrt{x}) \sim c_d \sqrt{x} / \log(\sqrt{x})^2 = O(\sqrt{x} / \log(x)^2)$  なので,  $S_d(\sqrt{x}), S_d(\sqrt[4]{x}), S_d(\sqrt[8]{x}), \dots$  は誤差項とみなせる.  $\pi_d(x) \sim S_d(x) \sim c_d x / \log(x)^2$  となる.

Hardy-Littlewood の予想に至った上の推論では,  $\sqrt{x}$  より大きく  $x$  を越えない素数の個数を, 十分大きい範囲における  $N_x (= \prod_{p \leq \sqrt{x}} p)$  と素な自然数の割合の  $e^{\gamma}/2 (= 0.89)$  倍と推定し, 素数の 2 つ組を数える場合は単純に  $(e^{\gamma}/2)^2$  倍とした. 素数 3 つ組に対しては  $(e^{\gamma}/2)^3$  倍, 4 つ組に対しては  $(e^{\gamma}/2)^4$  倍と推定できる. そして, Mertens の定理を使って評価していく過程で  $e^{\gamma}/2$  ひとつにつき  $\log(x)^{-1}$  がひとつずつ現れる.  $n (\leq x)$  と  $n+d$  がともに素数の状況で,  $n$  の次の素数が  $n+d$

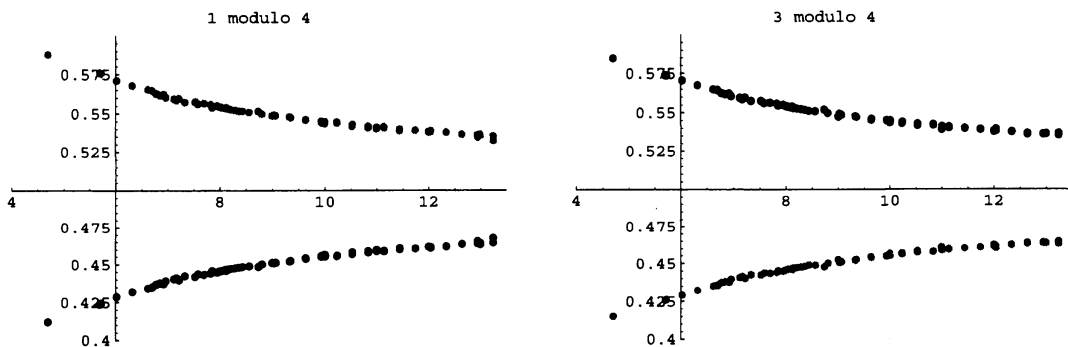
でない場合を考える.  $n$  と  $n+d$  の間に他の素数が幾つか入る状況を考えて評価するのだが, 間に素数がひとつ入るごとに評価が  $\log(x)^{-1}$  倍される. このような  $n$  の個数は  $O(x/\log(x)^3)$  で評価される.  $\tilde{\pi}_d(x) = \#\{n < x \mid n \text{ は素数, } \text{gap}(n) = d\}$  とおくと,  $\tilde{\pi}_d(x) \sim \pi_d(x) \sim c_d x / \log(x)^2$  となる.

前節で, 自然数  $n$  について,  $n$  が素数で  $\text{gap}(n) = d$  となる確率を  $\mu(n, d)$  とおいた.  $\tilde{\pi}_d(x)$  は測度  $\mu(n, d) dn$  における区間  $(0, x]$  の体積に等しい. Hardy-Littlewood の予想のもとで, 十分大きい  $x$  において  $\tilde{\pi}_d(x)$  の差分を取ると  $\mu(n, d) \sim c_d / \log(n)^2$  を得る.

## §5. 数値実験と予測値の比較

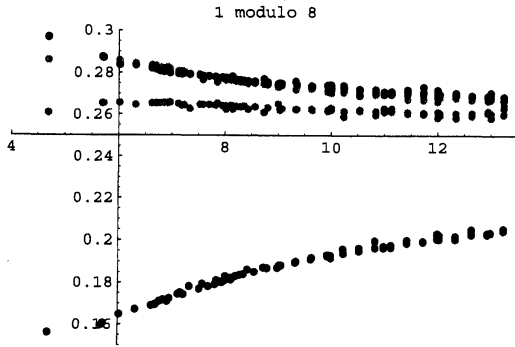
数値実験と予測値の計算, それらの比較について述べる. §3 で見たように  $m$  と  $m'$  の最小公倍数を法とする既約剰余類間の分布の和にできるので,  $m = m'$  で考えればよい.  $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  とする. 素数  $p \in \alpha$  の中で  $np(p) \in \beta$  となるものの割合  $\varpi_{\alpha, \beta}(x; x') = (\pi_{\alpha, \beta}(x') - \pi_{\alpha, \beta}(x)) / (\pi_{\alpha}(x') - \pi_{\alpha}(x))$  ( $0 \leq x < x'$ ) を合同条件付き素数分布と呼ぶ.  $2^{28}$  以下の素数を用意し,  $\varpi_{\alpha, \beta}(0; 2^e)$  ( $e = 20, \dots, 28$ ) を計算する.  $np(2^e)$  ( $e = 20, \dots, 44$ ) から  $10^7$  個ずつ素数を用意し, それぞれ  $10^6$  個ずつの 10 の区間に分割し, それぞれの区間 ( $x < p \leq x'$ ) ごとに  $\varpi_{\alpha, \beta}(x; x')$  を計算した.  $2^{20}$  は 10 進 7 桁,  $2^{28}$  は 10 進 9 桁,  $2^{44}$  は 10 進 14 桁の数である. 法  $m$  は  $10^6$  に比べて十分に小さい数であるならいくらでもよいのだが, 合同関係で篩をかけるのだから偶数にすべきで, ここでは  $m = 4, 8, 6, 10, 14, 30$  をとることにする.  $m = 14$  が表題にある素数賽にあたる. 実験値を  $\alpha \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  ごとに 1 枚のグラフにする. グラフの横軸は常用対数目盛 (桁数) とし, 縦軸は分布とする.  $\beta \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  ごとに色合いを変え,  $x$  から  $x'$  の範囲の素数について求めた分布 ( $\varpi_{\alpha, \beta}(x; x')$ ) を横軸  $(\log_{10}(x') + \log_{10}(x))/2$  の位置に点を置く. 分布の極限として期待される  $1/\varphi(m)$  に横軸を置き,  $\log_{10}(x) = 6$  ( $x = 10^6$ ) に縦軸を置く.

次のグラフは,  $m = 4$  のものである. 記号が煩雑になるので,  $\varpi_{\alpha, \beta}$  や  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  なので,  $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  の表記に法 (mod など) を略し,  $1 \bmod m$  を単に 1 とし  $\varpi_{1,1}, \mu_p(n; 1 \rightarrow 1)$  などと表すことにする. 「1 modulo 4」は  $\alpha = 1 \bmod 4$  で, 少し判別しにくい, 横軸上方の薄い色の点の列が  $\varpi_{1,3}$  の実験値, 下方の濃い色の点の列が  $\varpi_{1,1}$  の実験値である. 「3 modulo 4」は, 横軸下方の薄い色の点の列が  $\varpi_{3,3}$  の実験値, 上方の濃い色の点の列が  $\varpi_{3,1}$  の実験値である.



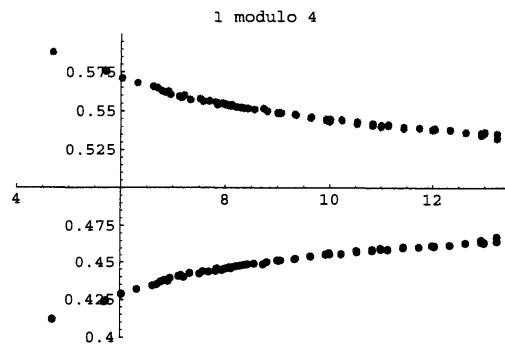
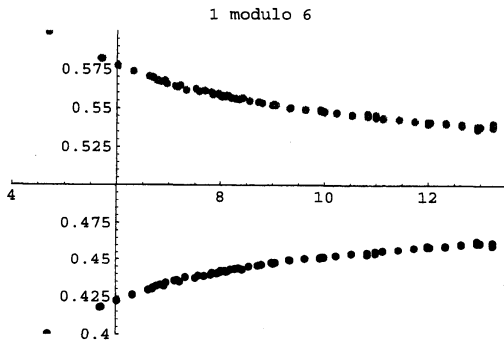
$\alpha = 1$  と  $\alpha = 3$  のグラフはほとんど同じに見える. これは  $\varpi_{1,1} \doteq \varpi_{3,3}$ ,  $\varpi_{1,3} \doteq \varpi_{3,1}$  を意味する. §3 の定理の証明をまねて  $\mu_p(n; 1 \rightarrow 1) \sim \mu_p(n; 3 \rightarrow 3)$ ,  $\mu_p(n; 1 \rightarrow 3) \sim \mu_p(n; 3 \rightarrow 1)$  を示せるので, グラフの概形が似ているのは当然である. また, グラフの上に法 4 で 1 と合同な素数の割合  $\pi_1(x)/\pi(x)$  と 3 と合同な素数の割合  $\pi_3(x)/\pi(x)$  を置くと横軸  $(1/2)$  上に並ぶ. 主観の問題ではあるが, 合同条件付き素数分布は意外に大きな偏りがある. この実験データからだけでも, 素数の列はコイン投げ (法 4 に関する剰余 1, 3 をコインの表裏と見て) には使えない.

次に  $m = 8$  のデータをグラフで視覚化する.  $m = 4$  の対称性 ( $\varpi_{1,1} \doteq \varpi_{3,3}$ ,  $\varpi_{1,3} \doteq \varpi_{3,1}$ ) の様に,  $m = 8$  も対称性  $\varpi_{\alpha, \beta} \doteq \varpi_{\alpha+c, \beta+c}$  ( $c$  は偶数) をもつので,  $\alpha = 1$  のグラフだけで十分である.



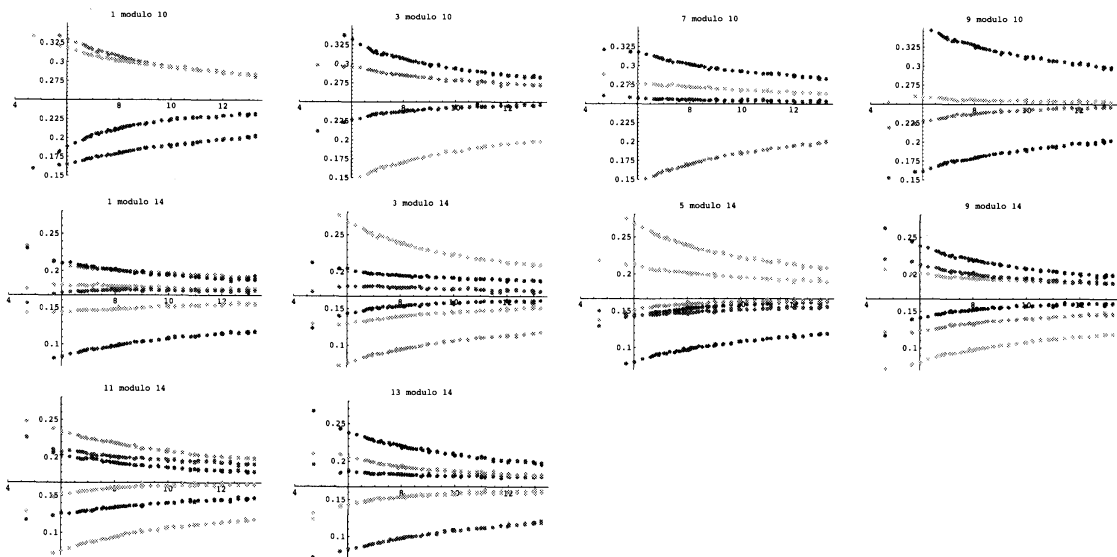
これも少し見難いが, 上から  $\beta$  が 7, 3, 5, 1 の順に分布の値が並び,  $\beta=7$  と 3 は殆ど同じ値で, グラフではほぼ重なって見える.  $\beta=1$  以外は平均値  $1/4$  より上にある.

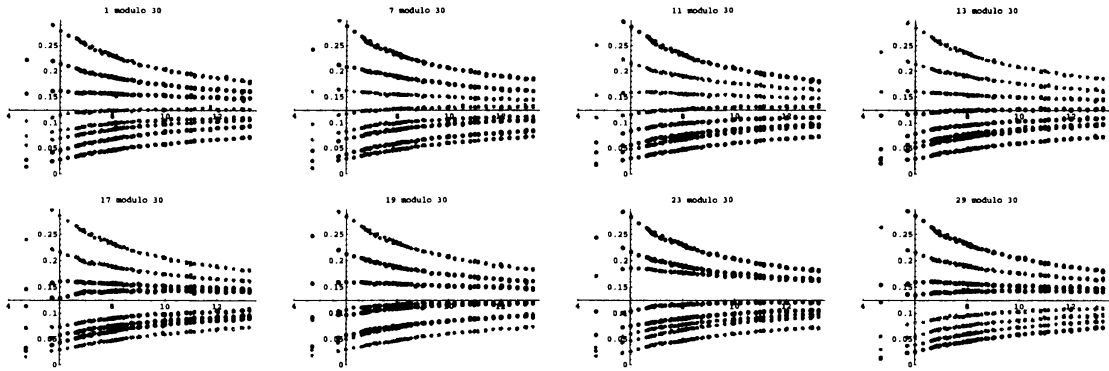
$m=6$  もまた対称性 ( $\varpi_{1,1} \equiv \varpi_{5,5}$ ,  $\varpi_{1,5} \equiv \varpi_{5,1}$ ) をもつので,  $\alpha=1$  のグラフだけで十分である. 上側の薄い色の点が  $\varpi_{1,5}$  で下側の濃い色の点が  $\varpi_{1,1}$  である. これも証明できることであるが, ここまで見たところで  $\beta=\alpha$  の  $\varpi_{\alpha,\alpha}$  が最も小さい値をとる.



$m=4$  のグラフとよく似ている. 対比のために横に並べたが, 見分けは難しい. 重ねてみると,  $m=6$  の方がわずかに  $m=4$  よりも外側 (1/2 にある横軸から見て) にある.

以下,  $m=10, 14, 30$  のデータを見せるが, これまでの様な単純な対称性はない. 細かい数値を並べることよりも, 直感的かもしれないが, 分布の推移の概形が重要なので少し小さいかもしれないがすべてのグラフを並べる.





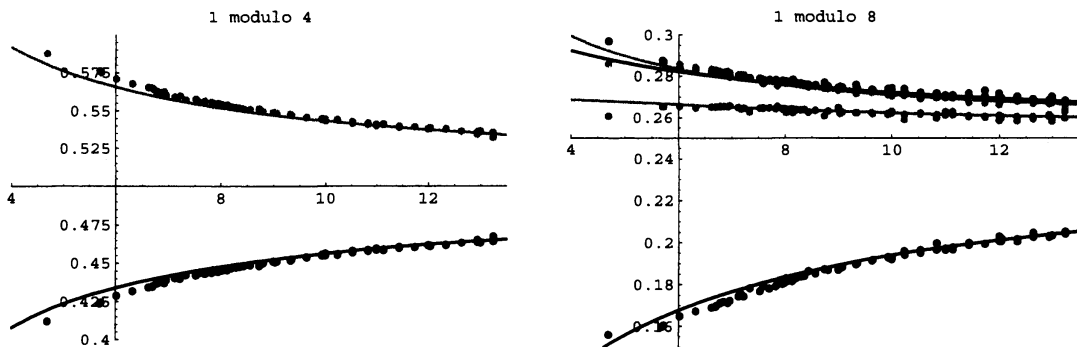
$\alpha = 1 \pmod{10}$  は上から順に  $\beta = 7, 3, 9, 1$  の分布が並び、 $\beta = 7, 3$  は殆ど同じ値をとる。 $\alpha = 3 \pmod{10}$  では上から順に  $\beta = 9, 7, 1, 3$  と並び、 $\alpha = 7 \pmod{10}$  では上から順に  $\beta = 9, 3, 1, 7$  と並び、 $\alpha = 9 \pmod{10}$  では上から順に  $\beta = 1, 3, 7, 9$  と並ぶ。 $m = 14, 30$  についても、グラフにおける点の間隔を眺めれば、 $\alpha$  ごとに異なることが見てとれる。

合同条件付き素数分布確率  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta) (= \sum_{i \geq 1} \mu_p(n | \text{gap}(n) = d_i))$  の予測値として、次のものを考える。

$$\begin{aligned} \mu'_p(n; \alpha \rightarrow \beta) &= \sum_{i \geq 1} \mu'_p(n | \text{gap}(n) = d_i) \\ \mu'_p(n | \text{gap}(n) = d_i) &= \mu'_p(n, d_i) \prod_{t=1}^{d_i-1} (1 - \mu'_p(n, t)) \\ \mu'_p(n, t) &= r_t c_t \mu(n+t) \quad (\text{ただし } \gcd(n+t, m) \neq 1 \text{ のとき } \mu_p(n, t) = 0 \text{ とする}) \end{aligned}$$

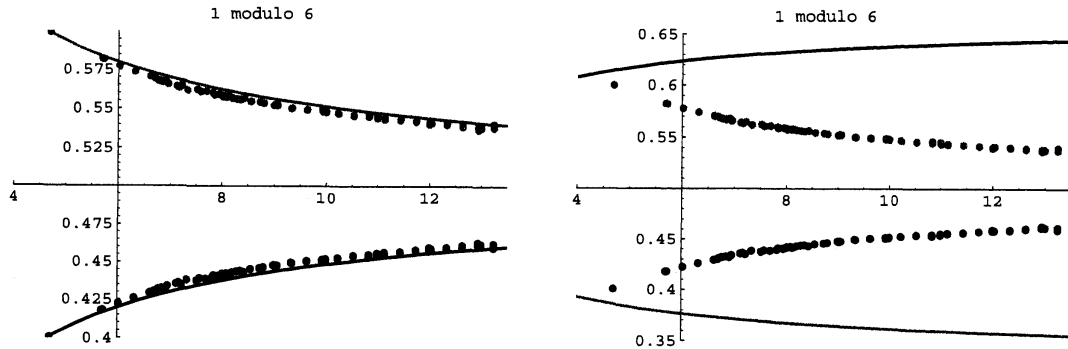
$c_t$  は Hardy-Littlewood の予想に現れる定数で、 $r_t = \prod_{3 \leq p | \gcd(m, t)} (p-1)/(p-2)$  とおく。Hardy-Littlewood の予想から、 $n$  が素数であるとの仮定のもとで  $n+t$  が素数である確率として  $c_t \mu(n+t)$  がとれる。今、 $n$  に合同条件 ( $n \in \alpha$ ) が仮定されるので、合同類  $\alpha$  に対して  $t$  によっては  $n+t$  が  $m$  と素でないことになる。これを、間隔  $t$  の方から眺めてみる。間隔が  $t$  の隣り合った素数の組  $(n, n+t)$  について、 $n$  の属しうる既約剰余類の個数を  $k_{d,m}$  とおく。 $\varphi(m)/k_{t,m}$  の値を計算したものが上の  $r_t$  である。法  $m$  に関する既約剰余類 ( $\varphi(m)$  個) に均等に分布する素数に対して、素数の組  $(n, n+t)$  は  $k_{t,m}$  個の剰余類に偏って分布するので、確率は  $\varphi(m)/k_{t,m} (= r_t)$  倍されるべきである。こうして、合同類  $\alpha$  に属する素数  $n$  に対して、 $n+t$  が素数となる条件付き確率として  $\mu'_p(n, t) = r_t c_t \mu(n+t)$  を考える。自然数が素数である事象の素朴な意味での独立性は保障されないが、合同条件による篩と Hardy-Littlewood の予想を盛り込んだ  $\mu'_p(n, t)$  については、近似的な意味で独立性を仮定してもよいと考える。合同類  $\alpha$  に属する素数  $n$  に対して、 $\text{gap}(n) = d$  となる条件付き確率の予測値として  $\mu'_p(n | \text{gap}(n) = d_i)$  をとる。排反事象の和として、合同類  $\alpha$  に属する素数に対して、次の素数が  $\beta$  に属する条件付き確率として  $\mu'_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  を考える。

$m = 4, 8, 6$  で見た  $\omega_{\alpha, \beta}$  の対称性と同じ対称性が、条件付き確率  $\mu'_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  にもある。 $\alpha = 1$  で  $\omega_{1, \beta}(x; x')$ ,  $\mu'_p(x; 1 \rightarrow \beta)$  をグラフで観察する。ただし、 $\mu(x) = 1/\log(x)$  とする。



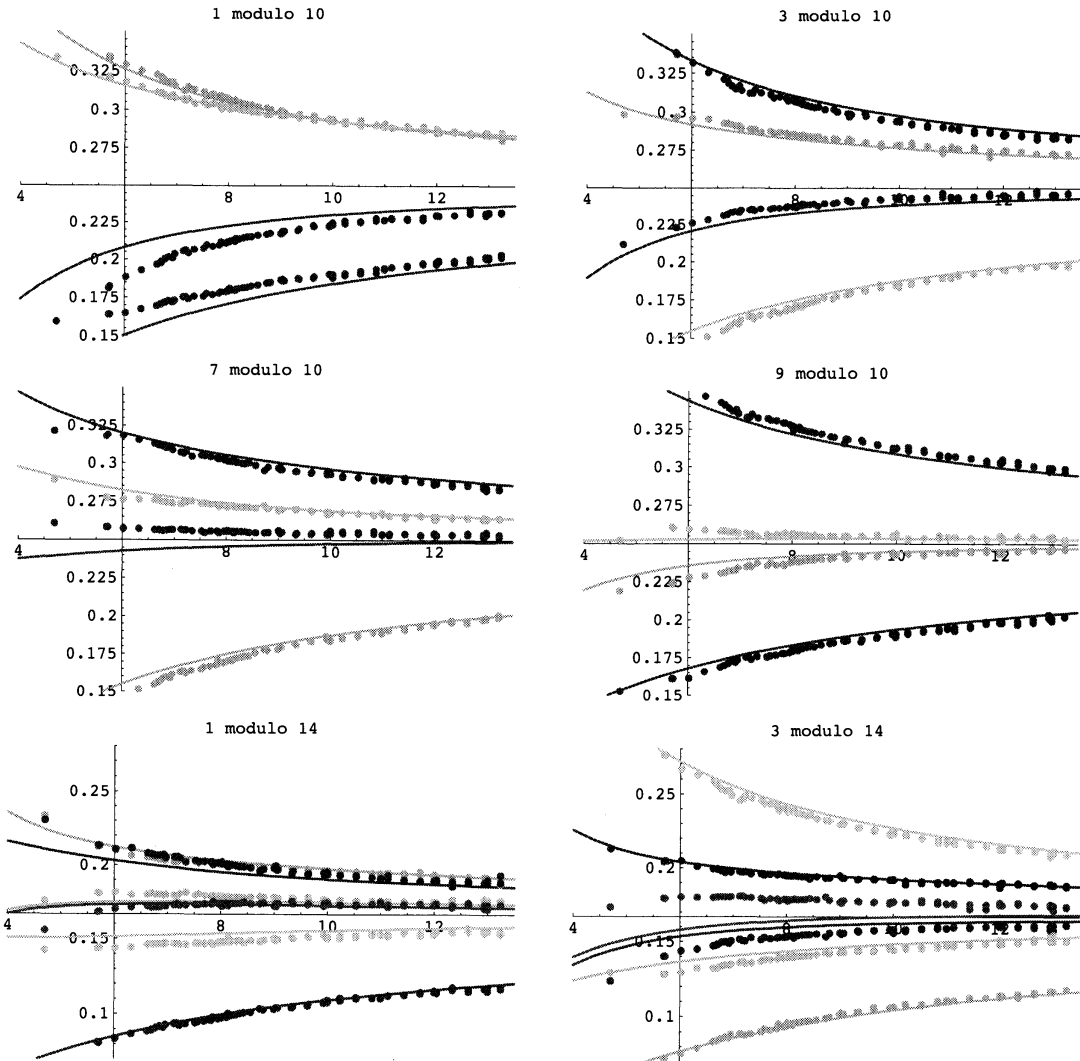
グラフにおいて、実験値  $\omega_{1,\beta}$  と予測値  $\mu'_p(x; 1 \rightarrow \beta)$  で同じ色合いにしている。

次に  $m=6$  を見るが、左のものは上記予測値を重ねたもので、右のものは比較として  $\mu'_p(n, t)$  の定義で  $r_t$  の項を抜いて  $\mu'_p(n, t) = c_t \mu(n+t)$  で計算したものである。

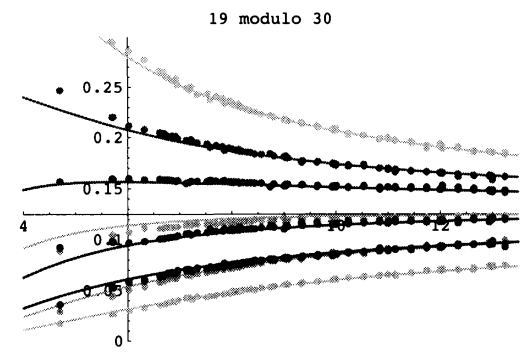
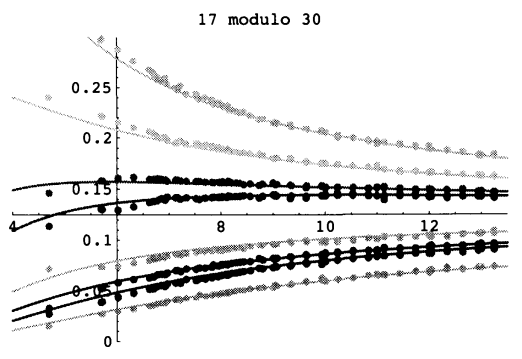
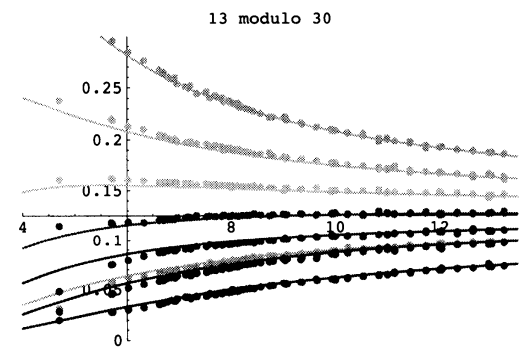
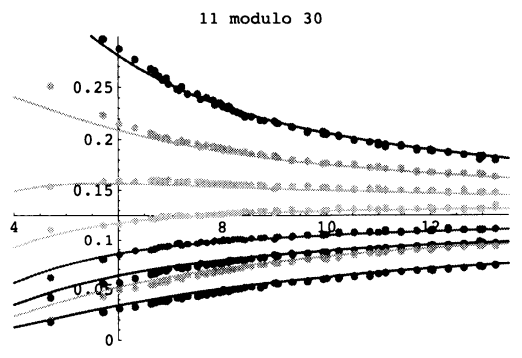
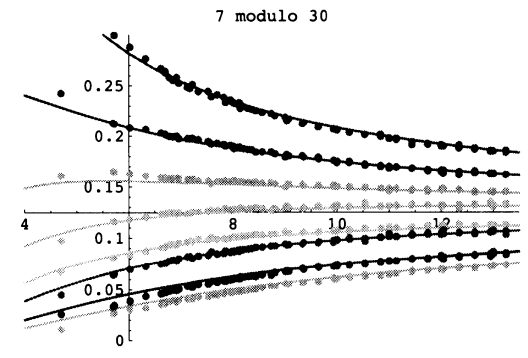
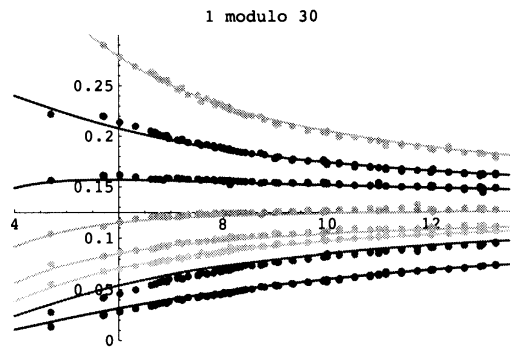
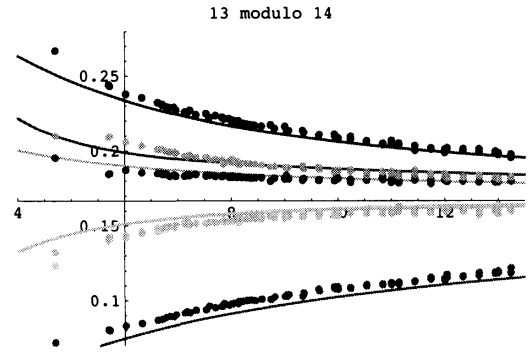
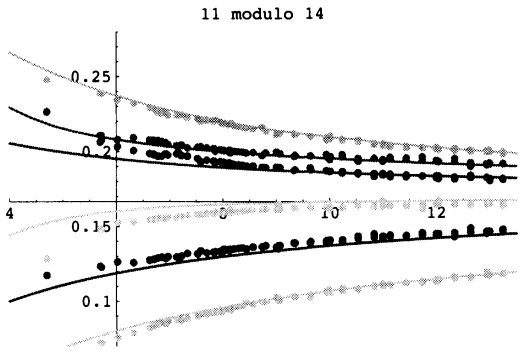
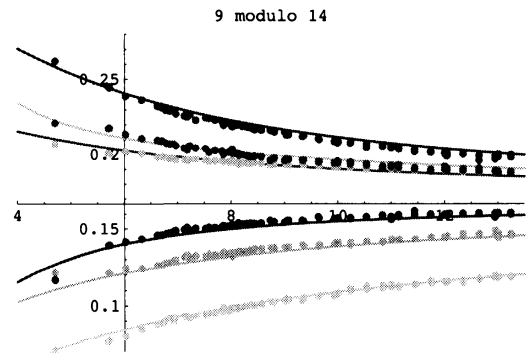
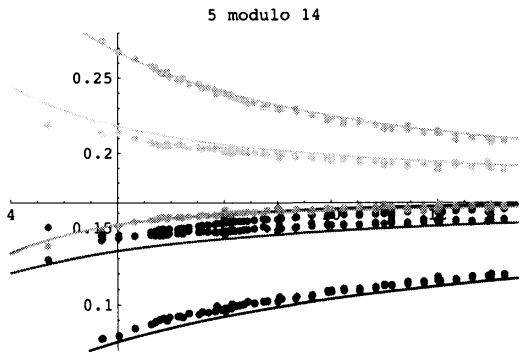


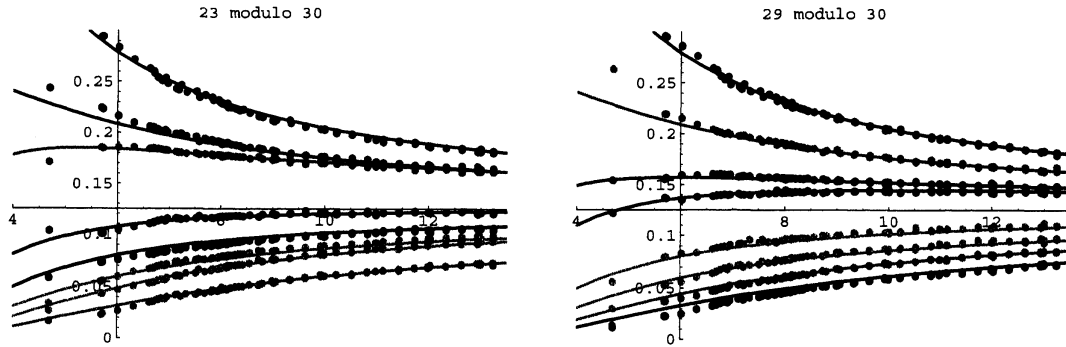
上で定義した予測値は実験データをよく近似しているように見えるが、 $r_t$  の項のない右のものは実験値とかけ離れており、実験において  $r_t$  の項の効果が表れている。

以下、 $m=10, 14, 30$  について、予測値を重ねたグラフを並べる。冗長になるが、全て並べる。









色合いの差が微妙で、ときどきグラフが重なっているところもあり、見難いことこの上ないが、それでも実験データに対して非常に良い近似を与えていることが見て取れると思う。予測値  $\mu'_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  をもう少し簡単な式に置き換えることもできるが、予測値の意味を明確にするために上の定義を採用した。ここではその簡易化には触れない。以上の実験から次が予想される。

**予想 5.1**  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta) \sim \mu'_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  即ち,  $\pi_{\alpha, \beta}(x) \sim \int_2^x \mu'_p(x; \alpha \rightarrow \beta) dx$

予測値に対しては、 $\mu(x) \sim 1/\log(x)$  (素数定理) からその極限を計算できる。計算 (証明) は煩雑なのでここでは省略する。

**定理 5.2**  $\mu'_p(n; \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \frac{1}{\varphi(m)}$  ( $n \rightarrow \infty$ )

$\mu'_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  は条件付き確率  $\mu_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  の予測値として導入した。  $\alpha$  に属する素数  $n$  について  $np(n) \in \beta$  となる確率で、素数  $n$  に対して  $n \in \alpha$  かつ  $np(n) \in \beta$  となる確率と異なることを注意しておく。定理 5.2 は、素数  $n \in \alpha$  を十分大きくとると、 $np(n) \in \beta$  となる確率は  $\alpha$  に依らないことを意味する。

定理 5.2 は  $\alpha, \beta$  を共に法  $m$  の剰余類としたのだが、一般に  $\alpha \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*, \beta \in (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^*$  とするとき  $\mu'_p(n; \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow 1/\varphi(m')$  となる。ただし、 $\mu'_p(n, t)$  における  $r_t$  は  $\alpha$  の法の  $m$  に対して定義されるものをとる。大数の法則として十分大きい素数  $n$  について、 $np(n)$  がどの剰余類に属するかは  $n$  の合同関係には依らない、つまり、素数  $n$  と次の素数  $np(n)$  のそれぞれについて合同条件で記述される事象は独立である。十分大きいすべての素数について、合同式で記述される事象は独立である。

Hardy-Littlewood の予想と、予想 5.1, 予測値を定義するにあたって考えた推論をすべて認めるか、適当な代用物に置き換えてその成立を認めることができるならば、定理 5.2 より次が従う。

**系 5.3**  $\alpha \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*, \beta \in (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^*$  に対して,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{\alpha, \beta}(x)}{\pi_{\alpha}(x)} = \frac{1}{\varphi(m')}$

## §6. 結び

条件付き確率の予測値  $\mu'_p(n; \alpha \rightarrow \beta)$  は、有界な正項級数なのでともかく収束します。極めて収束の遅い級数なので、意味のある数値を計算するには総和法をうまく工夫しなければなりません。詳しい説明は省きますが、収束が遅いため、合同条件付き素数分布  $\pi_{\alpha, \beta}(x)/\pi_{\alpha}(x)$  の極限値は計算できましたが (系 5.3), 誤差項の評価はできませんでした。誤差項が合同条件付き素数分布の偏りを記述するので、評価が欲しいところです。現時点では定理 3.1, 3.2 の特別な場合だけで、この場合は近似と言うより等号と見なしてもよいぐらい誤差項が小さくなっています。一般の場合は誤差項

がちよっと大きめで、数十桁程度の素数に対しても分布に偏りが残っています。素数間隔の評価を使った確率的評価もできますが、まだ少し明確さに欠けており、研究途上にあります。

合同条件付き素数分布を着想する動機となった、大塚君、日高君の実験観察した  $g_d(x)/\pi(x)$  は、連続する 3 つの素数に対する合同関係に関する素数分布です。十分大きい素数に対して合同式で記述される事象が近似的に独立であること (定理 5.2, Hardy-Littlewood の予想などを仮定している) を認めれば、 $\tilde{g}_d(x) (= \#\{p \leq x \mid d \mid d_p\} = \sum_{d \mid d'} g_{d'}(x), d' > 2x$  で  $g_{d'}(x) = 0$  なので有限和) について  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{g}_d(x)/\pi(x) = 1/\varphi(d)^2$  となる。 $g_d(x) = \sum_{k \geq 1} \mu(k) \tilde{g}_{kd}(x)$  ( $kd > 2x$  で  $\tilde{g}_{kd}(x) = 0$  なので有限和) なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g_d(x)}{\pi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 1} \mu(k) \frac{\tilde{g}_{kd}(x)}{\pi(x)} = \sum_{k \geq 1} \mu(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tilde{g}_{kd}(x)}{\pi(x)} = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{\varphi(kd)^2}$$

$g_d(x)/\pi(x)$  の値を幾つか計算し表にまとめる。近似値は最終桁で切り捨てとする。

$\pi(x)$	$x$	$d = 2$	$d = 4$	$d = 6$	$d = 8$	$d = 10$
$10^6$	15485863	0.397	0.147	0.186	0.0404	0.0351
$10^7$	179424673	0.407	0.145	0.180	0.0390	0.0352
(極限值)	$\infty$	0.495	0.123	0.146	0.0309	0.0316

合同式で記述される事象の独立性を仮定するには 8 桁や 9 桁程度の素数では小さいので、予測極限值との差が大きくても仕方ないことなのかもしれません。独立性を安直に仮定していることに原因があるのかもしれません。単に収束が遅いだけかもしれません。誤差項が評価できていないため、大塚君、日高君の実験観察に対する定量的予測が得られていません。彼らの問いに答えられていません。

数理研の研究集会では、Hardy-Littlewood の予想のもとでも説明できていないと結びました。その後の研究で、幾つか仮定をおきましたが Hardy-Littlewood の予想のもとで説明できることがわかりました。研究途中の不完全なものを提示してしまい、申し訳ありませんでした。最後にこのような実験観察に発表の機会を与えてくださりましたこと、研究集会研究代表者田中孝明氏に感謝いたします。

## References

- [1] R. Crandall-C. Pomerance, *Prime Numbers — A Computational Perspective, Second Edition*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2005.
- [2] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory, 3rd edition*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2004.
- [3] G. Hardy, *Collected Works of G. H. Hardy*, Clarendon Press, Oxford, 1966.
- [4] G. H. Hardy-E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed.*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [5] 松本 耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2005.
- [6] 本橋 洋一, 解析的整数論 I —素数分布論—, 朝倉書店, 2009.
- [7] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2000.

- [8] G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, Cambridge University Press, 1995.