数理解析研究所講究録
第 1898 巻 2014 年 115-123



# The multiple Dirichlet product and the multiple Dirichlet series

TOMOKAZU ONOZUKA

## 1 Introduction

Euler-Zagier 型多重ゼータ関数 $\zeta_{EZ,k}(s_1,\ldots,s_k)$, 等号付き多重ゼータ関数 $\zeta_k^*(s_1,\ldots,s_k)$ はそれぞれ次のように定義される.

$$\zeta_{EZ,k}(s_1,\ldots,s_k):=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_k}\frac{1}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}\cdots m_k^{s_k}} \tag{1.1}$$

$$\zeta_k^*(s_1,\ldots,s_k):=\sum_{0<m_1\leq m_2\leq\cdots\leq m_k}\frac{1}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}\cdots m_k^{s_k}} \tag{1.2}$$

ただし $s_i$ $(i=1,\ldots,k)$ は複素変数とする. 松本 [3] は 2 つの級数 (1.1),(1.2) が次の領域で絶対収束していることを示した.

$$\{(s_1,\ldots,s_k)\in\mathbb{C}^k\mid\Re(s_k(k-l+1))>l\ \ (l=1,\ldots,k)\} \tag{1.3}$$

ただし $s_k(n)=s_n+s_{n+1}+\cdots+s_k\ \ (n=1,\ldots,k)$ とする.

秋山-江上-谷川 [1] と Zhao[6] はそれぞれ独立に級数 (1.1) が全空間に有理型接続されることを示した. 秋山-江上-谷川は Euler-Maclaurin の和公式を用いて証明し, Zhao は超関数の理論を用いて証明した. 等号付き多重ゼータ関数 (1.2) の有理型接続についてはこれから述べる方法により示される. この関数は Euler-Zagier 型多重ゼータ関数と Riemann ゼータ関数の有限和で表せることが知られている. (Riemann ゼータ関数は Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の一つであることを注意しておく.) 例えば, $\zeta_2^*$ や $\zeta_3^*$ は次のような和で表すことができる.

$$\begin{aligned}\zeta_2^*(s_1,s_2)&=\zeta_{EZ,2}(s_1,s_2)+\zeta(s_1+s_2),\\ \zeta_3^*(s_1,s_2,s_3)&=\zeta_{EZ,3}(s_1,s_2,s_3)+\zeta_{EZ,2}(s_1+s_2,s_3)+\zeta_{EZ,2}(s_1,s_2+s_3)\\ &\qquad+\zeta(s_1+s_2+s_3).\end{aligned}$$

このような和の表示は級数 (1.2) を分解することによって得られる. 等号付き多重ゼータ関数が Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の有限和で表せ Euler-Zagier 型多重ゼータ関数が全空間へ有理型接続されることから, 等号付き多重ゼータ関数の全空間への有理型接続が得られる.

今回主に扱うのは下のように定義される多重 Dirichlet 級数である.

$$F(s_1, \ldots, s_k; f) := \sum_{m_1, \ldots, m_k = 1}^{\infty} \frac{f(m_1, \ldots, m_k)}{m_1^{s_1} \cdots m_k^{s_k}} \tag{1.4}$$

ここで $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{C}$ とし, 複素変数 $(s_1, \ldots, s_k)$ は上の級数が絶対収束するような範囲を動くものとする. この級数は Dirichlet 級数を多変数化した関数として多くの人が研究しているが, その多くは $f$ が乗法的関数を多変数化した関数の場合について扱っている. 詳しい内容は Tóth の [4] に書かれている. ここでは $f$ を乗法的関数と限定せず, 最初に定義した 2 つの級数 (1.1), (1.2) の一般化という角度から見ることとする. $f$ を乗法的関数と見なさない場合の研究は De la Bretéche[2] によってなされている. De la Bretéche は級数 (1.4) を $f(m_1, \ldots, m_k) > 0$ の場合について扱った.

今回の最終的な目標は上の級数 (1.4) の非零領域を見つけることである. 第 2 章ではその準備として, 多重 Dirichlet 積 $*$ についての性質を見る. 第 3 章では, 第 2 章の内容を用いて多重 Dirichlet 級数 (1.4) の非零領域を求める (定理 3.5). この定理は非零領域のみに言及しているのではなくもう一つ結果を含んでいる. その結果とは, 多重 Dirichlet 級数の逆数 $F(s_1, \ldots, s_k; f)^{-1}$ が多重 Dirichlet 級数表示 $F(s_1, \ldots, s_k; f^{-1})$ を持っているということである. そして最後にこの結果の $\zeta_k^*(s_1, \ldots, s_k)$ への応用を述べる.

## 2 多重 Dirichlet 積 $*$

初めにいくつかの記号を定義する. 関数 $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{C}$ を多重 (k 重) 数論的関数と呼ぶこととし, k 重数論的関数全体からなる集合を

$$\Omega = \Omega_k := \{f \mid f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{C}\} \tag{2.1}$$

と書くこととする. 集合 $U$ を次のように定義する;

$$U = U_k := \{f \in \Omega \mid f(1, \ldots, 1) \neq 0\}.$$

太文字を使うことによって $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ のように k 個の整数の組を表わすものとする. 特に, 太文字 $\mathbf{1}$ は全ての成分が 1 である組 $(1, \ldots, 1)$ であるものとする. さらに $k$ 個の整数の組どうしの積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ はそれぞれの成分の積 $(a_1b_1, \ldots, a_kb_k)$ とする.

**Definition 2.1.** $f, g \in \Omega$ と $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^k$ に対し, 多重 *Dirichlet* 積 $*$ は次のように定義される;

$$(f * g)(\boldsymbol{n}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{N}^k}} f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{b}).$$

$k=1$ のときに, 上の積はよく知られた Dirichlet 積となっている. そのため上の積は Dirichlet 積の一種の一般化となっている.

k 重数論的関数 $I$ を下のように定義する;

$$I(\boldsymbol{n}) := \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

このとき, 次の定理が知られている.

**Theorem 2.2.** *(Vaidyanathaswamy [5])* $(U, *)$ は *Abel* 群を成し, その単位元は $I$ である.

$f \in U$ の多重 Dirichlet 積に関する逆元 $f^{-1}(n)$ は次のように帰納的に定まる;

$$f^{-1}(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(\boldsymbol{1})} & (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}), \\[2ex] -\dfrac{1}{f(\boldsymbol{1})} \displaystyle\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{n}}} f(\boldsymbol{a})f^{-1}(\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{1}). \end{cases}$$

第 1 章の最後に多重 Dirichlet 級数 (1.4) で級数 (1.1) と (1.2) を表わすための 2 つの多重数論的関数を定義する. 最初に級数 (1.1) を表わすための関数として

$$u_{EZ}(\boldsymbol{n}) := \begin{cases} 1 & (n_1 < n_2 < \cdots < n_k), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

を定義する. これを用いることにより Euler-Zagier 型多重ゼータ関数は

$$\zeta_{EZ,k}(s_1, \ldots, s_k) = F(s_1, \ldots, s_k; u_{EZ})$$

と多重 Dirichlet 積表示される. 同様に級数 (1.2) については

$$u^*(\boldsymbol{n}) := \begin{cases} 1 & (n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

と定義することにより, 等号付き多重ゼータ関数は

$$\zeta_k^*(s_1, \dots, s_k) := F(s_1, \dots, s_k; u^*)$$

と表わせる.

ここで一つ注意しておくべきことがある. $u^*(\mathbf{1}) = 1 \neq 0$ なので $u^* \in U$ となっているため $u^*$ には定理2.2を用いることができる. 一方, $u_{EZ}$ は $u_{EZ}(\mathbf{1}) = 0$ なので $u_{EZ} \notin U$ となり定理2.2を用いることができない. 次の章では多重 Dirichlet 級数 $F(s_1, \dots, s_k; f)$ の非零領域について議論するが, その議論は $f \in U$ の場合にしか適用できないので Euler-Zagier 型多重ゼータ関数には適用できない.

# 3 多重 Dirichlet 級数

まず初めに2つの多重 Dirichlet 級数の積が多重 Dirichlet 積を用いて1つの多重 Dirichlet 級数で表せることについて述べる.

**Theorem 3.1.** $f, g \in \Omega_k$ に対して, 次の式が成り立つ.

$$F(s_1, \dots, s_k; f)F(s_1, \dots, s_k; g) = F(s_1, \dots, s_k; f * g)$$

ただし変数 $(s_1, \dots, s_k)$ は2つの級数 $F(s_1, \dots, s_k; f), F(s_1, \dots, s_k; g)$ が絶対収束する領域の上にあるものとする.

**Corollary 3.2.** $f \in U$ とする. このとき $F(s_1, \dots, s_k; f)$ と $F(s_1, \dots, s_k; f^{-1})$ が領域 $R \subset \mathbb{C}^k$ で絶対収束するならば, $R$ は $F(s_1, \dots, s_k; f)$ の非零領域となる.

**Proof.** $(s_1, \dots, s_k) \in R$ とする. このとき定理3.1より次式が成り立つ.

$$F(s_1, \dots, s_k; f)F(s_1, \dots, s_k; f^{-1}) = F(s_1, \dots, s_k; I) = 1.$$

□

上の系3.2から, $F(s_1, \dots, s_k; f)$ の非零領域を見つけるためには $F(s_1, \dots, s_k; f)$ と $F(s_1, \dots, s_k; f^{-1})$ の絶対収束領域 $R$ を見つければよいことになる. ここで十分大きな $\boldsymbol{n}$ に対して $|f(\boldsymbol{n})| \leq Cn_1^{r_1}n_2^{r_2}\cdots n_k^{r_k}$ が成り立つと仮定すると $F(s_1, \dots, s_k; f)$ の絶対収束領域は計算できる. では $F(s_1, \dots, s_k; f^{-1})$ の絶対収束領域はどのようになるのだろうか. それを計算するための準備として次の補題を証明する.

**Lemma 3.3.** $\alpha > 1$ に対し, 次式が成り立つ;

$$\sum_{d|n} d^{\alpha} \leq \zeta(\alpha) n^{\alpha}.$$

**Proof.** $p^\nu \| n$ と書いたときには $p^\nu | n$ かつ $p^{\nu+1} \nmid n$ となるとする. このとき次のように計算できる;

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} d^\alpha = \prod_{p^\nu \| n} \sum_{d|p^\nu} d^\alpha &= \prod_{p^\nu \| n} \sum_{j=0}^{\nu} p^{j\alpha} \\
&= \prod_{p^\nu \| n} \frac{p^{(\nu+1)\alpha} - 1}{p^\alpha - 1} \\
&\leq n^\alpha \prod_{p^\nu \| n} \frac{1}{1 - p^{-\alpha}} \\
&\leq \zeta(\alpha) n^\alpha.
\end{aligned}$$

□

上の補題を用いることにより次のように $|f^{-1}(\boldsymbol{n})|$ を評価できる.

**Theorem 3.4.** $f \in U$ はある定数 $C > 0$ が存在して $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{1}$ を満たす全ての $\boldsymbol{n}$ に対して $|f(\boldsymbol{n})| \leq C n_1^{r_1} n_2^{r_2} \cdots n_k^{r_k}$ が成り立つものとする. $\alpha_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ を $\alpha_j > 1 + r_j$ かつ $\zeta(\alpha_1 - r_1)\zeta(\alpha_2 - r_2) \cdots \zeta(\alpha_k - r_k) \leq 1 + |f(\boldsymbol{1})|/C$ を満たすように任意にとる. このとき次の式が成り立つ

$$|f^{-1}(\boldsymbol{n})| \leq \frac{n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \cdots n_k^{\alpha_k}}{|f(\boldsymbol{1})|}.$$

**Proof.** $n_1 + \cdots + n_k$ に関する帰納法を用いる. $n_1 + \cdots + n_k = k$ の場合 (つまり $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}$ の場合), $f^{-1}(\boldsymbol{1}) = 1/f(\boldsymbol{1})$ なので

$$|f^{-1}(\boldsymbol{1})| = \frac{1}{|f(\boldsymbol{1})|}.$$

次に $d > k$ とし, $n_1 + \cdots + n_k < d$ を満たす全ての $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^k$ に対して $|f^{-1}(\boldsymbol{n})| \leq n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \cdots n_k^{\alpha_k}/|f(\boldsymbol{1})|$ が成り立ったと仮定する. このとき $n_1 + \cdots + n_k = d$ なる $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^k$ に対しては, 次のように計算できる;

$$\begin{aligned}
|f^{-1}(\boldsymbol{n})| &\leq \left| \frac{1}{f(\boldsymbol{1})} \right| \sum_{\substack{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{N}^k \\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{n}}} |f(\boldsymbol{a})| |f^{-1}(\boldsymbol{b})| \\
&\leq \frac{C}{|f(\boldsymbol{1})|^2} \sum_{\substack{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{n}}} a_1^{r_1} b_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{r_k} b_k^{\alpha_k} \\
&= \frac{C}{|f(\boldsymbol{1})|^2} \left\{ n_1^{r_1} \cdots n_k^{r_k} \left( \sum_{b_1 | n_1} b_1^{\alpha_1 - r_1} \right) \cdots \left( \sum_{b_k | n_k} b_k^{\alpha_k - r_k} \right) - n_1^{\alpha_1} \cdots n_k^{\alpha_k} \right\} \\
&\leq \frac{C}{|f(\boldsymbol{1})|^2} \left( \zeta(\alpha_1 - r_1) n_1^{\alpha_1} \cdots \zeta(\alpha_k - r_k) n_k^{\alpha_k} - n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \cdots n_k^{\alpha_k} \right) \\
&\leq \frac{n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \cdots n_k^{\alpha_k}}{|f(\boldsymbol{1})|}.
\end{aligned}$$

□

以上により次の主結果が得られる.

**Theorem 3.5.** $f$ と $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ は定理 3.4 の条件を満たすものとする. このとき $F(s_1,\dots,s_k;f)$ と $F(s_1,\dots,s_k;f^{-1})$ は次の領域を非零領域として持つ;

$$\left\{(s_1,\dots,s_k)\in\mathbb{C}^k \mid \Re(s_j)>1+\alpha_j \quad (j=1,\cdots,k)\right\}.$$

さらに, 同じ領域において $F(s_1,\dots,s_k;f)$ と $F(s_1,\dots,s_k;f^{-1})$ の間には次のような関係がある;

$$(F(s_1,\dots,s_k;f))^{-1}=F(s_1,\dots,s_k;f^{-1}).$$

**Proof.** $f(\boldsymbol{n})\ll n_1^{r_1}n_2^{r_2}\cdots n_k^{r_k}$ なので, $F(s_1,\dots,s_k;f)$ は次の領域で絶対収束している;

$$\left\{(s_1,\dots,s_k)\in\mathbb{C}^k \mid \Re(s_j)>1+r_j \quad (j=1,\dots,k)\right\}. \tag{3.1}$$

定理 3.4 より $f^{-1}(\boldsymbol{n})$ は $f^{-1}(\boldsymbol{n})\ll n_1^{\alpha_1}\cdots n_k^{\alpha_k}$ と評価できるので, $F(s_1,\dots,s_k;f^{-1})$ は次の領域で絶対収束している;

$$\left\{(s_1,\dots,s_k)\in\mathbb{C}^k \mid \Re(s_j)>1+\alpha_j \quad (j=1,\dots,k)\right\}.$$

よって定理 3.2 より定理 3.5 が成り立つ. □

ここからは等号付き多重ゼータ関数の非零領域を求めることを目指すが, その前に準備として制限された多重 Dirichlet 級数について述べる.

$u^*(\boldsymbol{n})$ は $n_1\le n_2\le\cdots\le n_k$ でないところで常に 0 なので, 等号付き多重ゼータ関数 (1.2) は領域 (1.3) で絶対収束している. この絶対収束領域は上の定理の証明中に与えた絶対収束領域 ((3.1) に $r_1=\cdots=r_k=0$ を代入したもの) より広い. この事実からある種の多重 Dirichlet 級数に対しては定理 3.5 で得られるものより広い非零領域が求まるものと考えられる. そこで導入するのが制限された多重 Dirichlet 級数である.

$\Omega$ の部分集合として次のような集合を考える;

$$\Omega^*:=\{f\in\Omega \mid f(\boldsymbol{n})=0 \text{ が } n_1\le\cdots\le n_k \text{を満たさない } \boldsymbol{n} \text{ に対して成り立つ}\}$$

いま $f\in\Omega^*$ とすると, その多重 Dirichlet 級数は

$$F(s_1,\dots,s_k;f)=\sum_{m_1,\dots,m_k=1}^{\infty}\frac{f(m_1,\dots,m_k)}{m_1^{s_1}\cdots m_k^{s_k}}=\sum_{0<m_1\le\cdots\le m_k}\frac{f(m_1,\dots,m_k)}{m_1^{s_1}\cdots m_k^{s_k}}$$

と和に制限を加えた形で書けるため $f\in\Omega^*$ に対する多重 Dirichlet 級数 $F(s_1,\dots,s_k;f)$ を制限された多重 Dirichlet 級数と呼ぶこととする.

$\Omega^*$ は次のような性質を持つ.

**Theorem 3.6.** $(U \cap \Omega^*, *)$ は $(U, *)$ の部分群を成す.

**Proof.** $f, g \in U \cap \Omega^*$ とし $f * g \in U \cap \Omega^*$ を示す. $n_1 \leq \cdots \leq n_k$ を満たさないような $\boldsymbol{n}$ に対して $(f * g)(\boldsymbol{n})$ は

$$(f * g)(\boldsymbol{n}) = \sum_{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n}} f(\boldsymbol{a}) g(\boldsymbol{b})$$

のように和で表せる. このとき $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n}$ を満たす $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のうち少なくとも一方は条件 $a_1 \leq \cdots \leq a_k$ または $b_1 \leq \cdots \leq b_k$ を満たさない. これにより $(f * g)(\boldsymbol{n}) = 0$ なので $f * g \in \Omega^*$ が成り立つ. また $f, g \in U$ より定理 2.2 から $f * g \in U$ も成り立つ. 以上より $f * g \in U \cap \Omega^*$ が示された.

次に $f \in U \cap \Omega^*$ に対して $f^{-1} \in U \cap \Omega^*$ を示す. いま $f^{-1} \notin \Omega^*$ と仮定すると, $n_1 \leq \cdots \leq n_k$ を満たさないある $\boldsymbol{n}$ が存在して $f^{-1}(\boldsymbol{n}) \neq 0$ を満たす. このような $\boldsymbol{n}$ のうち $n_1 + \cdots + n_k$ の値が最小になるものを選ぶ. このとき上の証明と同様にして $f^{-1}(\boldsymbol{n})$ は

$$f^{-1}(\boldsymbol{n}) = -\frac{1}{f(\boldsymbol{1})} \sum_{\substack{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{n}}} f(\boldsymbol{a}) f^{-1}(\boldsymbol{b})$$

のように和で表せ, この和の値は 0 になる. これは $f^{-1}(\boldsymbol{n}) \neq 0$ に矛盾するため $f^{-1} \in \Omega^*$ となる. □

この定理から, $f, g \in \Omega^* \cap U$ に関する制限された多重 Dirichlet 級数に対し次の 2 つの式が成り立つ;

$$\left( \sum_{0 < m_1 \leq \cdots \leq m_k} \frac{f(m_1, \ldots, m_k)}{m_1^{s_1} \cdots m_k^{s_k}} \right) \left( \sum_{0 < n_1 \leq \cdots \leq n_k} \frac{g(n_1, \ldots, n_k)}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}} \right) = \sum_{0 < n_1 \leq \cdots \leq n_k} \frac{(f * g)(n_1, \ldots, n_k)}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}},$$

$$\left( \sum_{0 < m_1 \leq \cdots \leq m_k} \frac{f(m_1, \ldots, m_k)}{m_1^{s_1} \cdots m_k^{s_k}} \right)^{-1} = \sum_{0 < m_1 \leq \cdots \leq m_k} \frac{f^{-1}(m_1, \ldots, m_k)}{m_1^{s_1} \cdots m_k^{s_k}}.$$

級数 (1.2) の絶対収束領域が領域 (1.3) であることから, 定理 3.5 の改良が可能となり次の定理が成り立つ.

**Theorem 3.7.** $f \in \Omega^* \cap U$ と $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ は定理 3.4 の条件を満たすものとする. このとき $F(s_1, \ldots, s_k; f)$ と $F(s_1, \ldots, s_k; f^{-1})$ は次の領域を非零領域として持つ;

$$\left\{ (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \Re(s_k(k - l + 1)) > l + \alpha_k(k - l + 1) \quad (l = 1, \ldots, k) \right\}.$$

ただし $\alpha_k(l) = \alpha_l + \alpha_{l+1} + \cdots + \alpha_k \quad (l = 1, \ldots, k)$ とする. さらに同じ領域において $F(s_1, \ldots, s_k; f)$ と $F(s_1, \ldots, s_k; f^{-1})$ の間には次のような関係が成り立つ;

$$(F(s_1, \ldots, s_k; f))^{-1} = F(s_1, \ldots, s_k; f^{-1}).$$

**Proof.** $f(\boldsymbol{n}) \ll n_1^{r_1} n_2^{r_2} \cdots n_k^{r_k}$ なので, $F(s_1, \ldots, s_k; f)$ は次の領域で絶対収束している;

$$\left\{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \Re(s_k(k-l+1)) > l + r_k(k-l+1) \quad (l = 1, \ldots, k)\right\}$$

ただし $r_k(l) = r_l + r_{l+1} + \cdots + r_k \quad (l = 1, \ldots, k)$ とする. 定理3.4より $f^{-1}(\boldsymbol{n})$ は $f^{-1}(\boldsymbol{n}) \ll n_1^{\alpha_1} \cdots n_k^{\alpha_k}$ と評価できるので, $F(s_1, \ldots, s_k; f^{-1})$ は次の領域で絶対収束している;

$$\left\{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \Re(s_k(k-l+1)) > l + \alpha_k(k-l+1) \quad (l = 1, \ldots, k)\right\}.$$

よって定理3.2より定理が従う. □

この定理を $f = \zeta^*$ に対して用いることにより次の系が得られる.

**Corollary 3.8.** $\zeta_k^*(s_1, \ldots, s_k)$ は次の領域を非零領域として持つ;

$$\left\{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \Re(s_k(k-l+1)) > l + \alpha_k(k-l+1) \quad (l = 1, \ldots, k)\right\}.$$

ただし $\alpha_i > 1 \ (i = 1, \ldots, k)$ は条件 $\zeta(\alpha_1)\zeta(\alpha_2)\cdots\zeta(\alpha_k) \leq 2$ を満たすものとする. さらに同じ領域の上で等号付き多重ゼータ関数の逆数は次の多重 *Dirichlet* 級数表示をもつ;

$$(\zeta_k^*(s_1, \ldots, s_k))^{-1} = F(s_1, \ldots, s_k; (u^*)^{-1}).$$

# 参考文献


[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith, **98** (2001), 107–116.

[2] R. de la Bretéche, *Estimation de sommes multiples de fonctions arithétiques*, Compositio Mathematica **128** (2001), 261–298.

[3] K. Matsumoto, *On analytic continuation of various multiple zeta-functions*, Number Theory for the Millenium (Urbana, 2000), Vol. II, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417–440.

[4] L. Tóth, *Multiplicative arithmetic functions of several variables: a survey*, Preprint, 2013, arXiv:1310.7053.

[5] R. Vaidyanathaswamy, *The theory of multiplicative arithmetic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **33** (1931), 579–662.

[6] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1275–1283.

Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602, Japan
E-mail: m11022v@math.nagoya-u.ac.jp