数理解析研究所講究録
第 1900 巻 2014 年 118-119

メゾスケール生物流体乱流の特性

松本 剛[1]
京大 理学研究科 物理学教室 流体物理学研究室

ビーカーにはいった水に耳かき一杯の高分子の粉をまぜるだけで、この高分子溶液の振る舞いが水のそれとは大きく異なるものになることがある (とろみがつく等)。高分子が十分に希薄である場合には、流体中の高分子をダンベルなどでモデルすることで高分子溶液がしたがうであろう連続体方程式 (偏微分方程式) をミクロスケールから導くことが可能である。これは統計力学の一つの大きな成果である [1]。この結果の方程式は Navier-Stokes 方程式とは異なるのが通常である。しかし、希薄という条件がない場合にはこの手続きは一般には破綻する。この場合、連続体方程式を得る方法は、対称性や物質客観性の原理などの制限に反しないように、現象と合うような数理モデルを直観に基づいてつくる以外にない。このようにして得られた連続体方程式が果たして現象を良く記述しているか否かについては、単純な解析解、安定性解析、非線形領域での数値解等にもとづいて批判的に検討することが必要となる。

本稿での対象は近年の文献 [2, 3, 4] で報告された、枯草菌の高密度懸濁液が示す「乱流」状態である (以下、簡単のため枯草菌乱流とよぶことにする)。この著者らは、(i) 実験室実験 (2 次元 [2]、3 次元 [2, 4])、(ii) 離散系モデルの数値シミュレーション (枯草菌を自己推進ロッドとして、ロッドの多体系として懸濁液を記述するもの [2])、(iii) 連続体方程式の数値シミュレーション (枯草菌懸濁液の連続体方程式は発見的に構成された [2, 3, 4])、の 3 方向からの多面的な研究を行って、枯草菌乱流の性質をしらべた。特に、実験室実験において粒子画像流速計測法 (PIV) によって測定した速度場を適当な空間スケールで粗視化することで得られた渦度場の図が文献 [2] で示されている。この渦の状態は乱流というべき状態 — 多数の渦が複雑に入り組んで、時間空間的に乱れている状態 — であった。なお、この粗視化があるために文献 [2] のタイトルは"Meso-scale turbulence in living fluids" となっており、本稿の表題はこれにならってメゾスケールをつけた。この粗視化された乱流場の特徴付けは、古典的な Navier-Stokes 方程式が示す乱流状態 (あるいはニュートン流体の乱流) の解析方法を応用することで行われた。つまり、枯草菌乱流の性質が古典乱流と対比されつつ特徴づけられたことになる。本稿の目的は、この点について (iii) の連続体方程式に基づいて再訪することである。なお、上記の (ii) および (iii) での離散モデル、連続体モデルは当然 (i) の実験結果を再現するように作られており、文献 [2] によると (ii) は部分的な再現にとどまり、(iii) はより広い範囲で性質を再現することが報告されている。

さて、古典乱流では、乱流速度揺らぎに関する統計量 (適当なモーメント量や相関関数) が普遍的であることが知られている [5, 6]。この普遍性とは、乱流が実現している場の境界条件やスケールに依存することなく (海峡でも湯飲みでも良い)、統計量が常に同じ性質を示すという著しい特徴である。従って、この古典乱流の普遍性は枯草菌乱流の場合にどこまで通用するのか?、統計法則には定量的には相違があるとしても定性的には同じであるのか (揺らぎにスケーリング則は存在するが指数が異なる等)?といった問いが可能である。実際に文献 [2, 4] ではこの問いがひとつの焦点となっている。

実験で得られた粗視化された渦度場は実験容器の壁から遠いところでは、空間的にほぼ一様であるようである。この場合に、粗視化速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ を空間的にフーリエ変換することで ($\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$) 得られるパワースペクトル密度の動径表現

$$E(k)\Delta k=\sum_{k\leq|\boldsymbol{k}|\leq k+\Delta k}\frac{1}{2}|\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t)|^2 \tag{1}$$

[1] takeshi@kyoryu.scphys.kyoto-u.ac.jp

が 2、3 次元の両系について示されている [2] (文献 [2] での枯草菌懸濁液の実験における 2 次元系とは、高さ方向を枯草菌の長軸方向長さとほぼ同じにとり、水平方向は高さにくらべて十分に広くとった系を指す)。

この $E(k)$ は古典乱流の研究ではエネルギースペクトルと呼ばれ、非線形性が十分に強ければ $E(k) \propto k^{-5/3}$ という冪的振る舞い (コルモゴロフスペクトル) が普遍的に見られることが知られている [5, 6]。枯草菌乱流では 2 次元の場合 $E(k) \propto k^{\alpha}$ と書くときに、低波数では $\alpha = 5/3$ (正の指数) となり、高波数では $\alpha = -8/3$ (負の指数) となることが実験データから示されている [2]。空間 3 次元の場合には冪的な振る舞いは存在せず、プラトーがあるのみである [2]。2 次元の連続体モデルの $E(k)$ は実験のものと良く一致することも示されている [2]。この枯草菌乱流の粗視化速度場についての連続体モデルは 2、3 次元の両方で、自己推進の効果を取り入れた形 (β のかかる項) で

$$\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}(p - \lambda_1|\boldsymbol{u}|^2) - \beta(|\boldsymbol{u}|^2 - u_0^2)\boldsymbol{u} + \Gamma_0\triangle\boldsymbol{u} - \Gamma_2\triangle^2\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} \;=\; 0 \qquad (2)$$

と提唱されている [2]。ここで p は圧力で、$\triangle$ はラプラス演算子である。また、モデルのパラメータ $\lambda_1, \beta, u_0, \Gamma_2$ は正であり Γ_0 は負とされている。この連続体モデルに基づいて、枯草菌乱流の $E(k)$ の関数形を理論的に決定することが、古典乱流の完結近似 [5, 6] を応用して可能であるか否かが興味のあるところではある。

我々は空間 2 次元の周期境界条件下で方程式 (2) をフーリエスペクトル法を用いて数値計算した (文献 [2] の追試)。確かに、文献 [2] と同様の結果が得られ、枯草菌乱流の 2 次元エネルギースペクトル $E(k)$ のいくつかの特徴は、古典乱流理論の常套手段である波数空間のエネルギー輸送に注目した議論によって定性的に理解できることがわかった。また、移流項と圧力項を起因とする非線形項の効果として、古典乱流の場合に 2 次元と 3 次元ではエネルギー輸送の向きが異なることが知られている。この違いがおそらく枯草菌乱流でも生じており、枯草菌乱流でみられた 2、3 次元での $E(k)$ の相違の原因であると推論することもできる。以上の意味で、枯草菌乱流は定量的には古典乱流と異なるものの、物理的な理解は古典乱流研究の方法論の応用が効果的であると結論できる。

最後に、式 (2) の方程式は、冒頭にのべた高分子溶液のような、「非ニュートン流体」の方程式と見ることができる。非ニュートン流体 (流体の応力が速度勾配の 1 次量のみで表せない流体) の方程式は短波長の不安定性を持つものがあり、場合によっては適切でない (ill-posed) と思われる振る舞いを示すこともある。実際、式 (2) の係数 Γ_0 は負であるので、パラメータの値によっては適切でないことがあっても良いかもしれない。このようなパラメータ範囲があるとしても、枯草菌乱流を良く記述するパラメータ範囲と重複していなければもちろん問題はない。我々の数値計算では、予備的な結果に過ぎないが (あるいは単に我々のプログラムの虫の可能性も十分にある)、乱流的な解を破壊しうる不安定性を示唆するものが得られている。枯草菌乱流の連続体モデル方程式 (2) はこのような適切性の観点からも精査する必要があるかもしれない。

参考文献

[1] 例えば、M. Doi & S.F. Edwards, *The theory of polymer dynamics*, Oxford Univ. Press (1986).

[2] H.H. Wensink *et al.*, Proc. Nat. Acad. Sci., **109** (2012) 14308–14313.

[3] J. Dunkel *et al.* New J. Phys. **15** (2013) 045016.

[4] J. Dunkel *et al.* Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 228102.

[5] 後藤俊幸,「乱流理論の基礎」 朝倉書店 (1998).

[6] 木田重雄, 柳瀬眞一郎 「乱流力学」 朝倉書店 (1999).