数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 30-36

長距離相互作用をもつ飛躍型無限粒子系

千葉大学理学研究科　江崎 翔太
Syota Esaki
Faculty of Science,
Chiba university

1 イントロダクション

相互作用をもつ ラベルなし干渉無限粒子系の構成については、さまざまな研究がなされている。特に、その中でも Dirichlet form を用いて構成することが、干渉ブラウン運動に対しては、Osada [3]、[4] などで行われ、干渉飛躍型過程に対しては、E.Lytvynov and N.Ohlerich [1] などで行われている. [1] の中において、Dyson random point field に対応する ラベルなし干渉飛躍型無限粒子系の構成が open problem として挙げられている. そこで、今研究においては、Dyson random point field を含む点過程のクラスとして、[4] で導入された canonical Gibbs 測度の拡張である準 Gibbs 測度から定まる相互作用と"long range"な飛躍率をもつ ラベルなし干渉飛躍型無限粒子系の構成を行った。ここで、準 Gibbs 測度には、上で挙げられている Dyson random point field の他にも Ginibre random point field や、Airy random point field という点過程が含まれることが示されていることに言及する ([4]、[5] を参照)。

2 記号の準備と主定理

S を $\mathbb{R}^d$ 上の非負整数値 Radon 測度全体からなる集合とする。S は、漠位相を導入することによって、完備可分距離空間になる。 一方、S の元 s は $\mathsf{s}=\sum_i \delta_{s_i}$ と表すことができることから、各 s_i を点の位置とすると、s は $\mathbb{R}^d$ 上の配置とみなすことができる。この意味で、S を配置空間と呼ぶ。$\mathscr{D}_\circ$ で、全ての local で、smooth な S 上の関数からなる集合を表す。$f,g\in\mathscr{D}_\circ$ に対し、$\mathbb{D}[f,g]:\mathsf{S}\to\mathbb{R}$ を次のように定める。

$$\mathbb{D}[f,g](\mathsf{s})=\frac{1}{2}\sum_i\int_{\mathbb{R}^d}(f(\mathsf{s}^{s_i,y_i})-f(\mathsf{s}))(g(\mathsf{s}^{s_i,y_i})-g(\mathsf{s}))p(|y_i-s_i|)dy_i$$

ここで、$s_i\in\mathbb{R}^d$、$\mathsf{s}=\sum_i\delta_{s_i}$ である。さらに、s に対して、$\mathsf{s}^{x_i,y_i}=\mathsf{s}+\delta_{y_i}-\delta_{x_i}$ を表すものとする。また、p は、$[0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への関数で、$\int_{\mathbb{R}^d}p(|y|)dy=1$ をみたすものとす

る。一方、S 上の確率測度を μ とする。これらを用いて、双線形形式 $\mathscr{E}$ と $\mathscr{D}_\infty$ を次のように定める。

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_{\mathsf{S}} \mathbb{D}[f,g](\mathsf{s})d\mu, \quad \mathscr{D}_\infty = \{f \in \mathscr{D}_\circ \cap L^2(\mathsf{S},\mu); \mathscr{E}(f,f) < \infty\}.$$

さらに、$S_r = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| \le r\}$、$\mathsf{S}_r^i = \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}; \mathsf{s}(S_r) = i\}$ とする。ここでまず、以下を仮定する。

任意の k に対して μ の S_r 上の k 密度関数 σ_r^k、及び、k 点相関関数 $\rho^k(x)$ が存在する。

$$\tag{A.0}$$

$$(\mathscr{E},\mathscr{D}_\infty) \text{ は、} L^2(\mathsf{S},\mu) \text{ 上で closable である。} \tag{A.1}$$

$$\text{任意の } k,r \text{ に対して } \sigma_r^k \in L^\infty(S_r^k, dx) \tag{A.2}$$

$$\text{任意の } r \text{ に対して } \sum_{i=1}^\infty i\mu(\mathsf{S}_r^i) < \infty \tag{A.3}$$

続いて、局所的な粒子の個数の期待値の漸近挙動と、飛躍率の漸近挙動に対する仮定をする。ある $\alpha > \beta > 5$ が存在し、

$$\text{十分大の } r \text{ に対し、} \sum_{i=1}^\infty i\mu(\mathsf{S}_r^i) \le C_1 r^\beta \text{ かつ、十分大の } |y| \text{ に対し、} p(|y|) \le \frac{C_2}{|y|^{d+\alpha}} \tag{B.1}$$

となることを仮定する。さらに、

$$\sum_C^\infty \sum_{r=1}^\infty \mu(\mathsf{s}(S_r) \ge C\mathbb{E}^\mu[\mathsf{s}(S_r)]) < \infty \tag{B.2}$$

を仮定する。このとき次の結果が成り立つ。

Theorem 1. (A.0)、(A.1)、(A.2)、(A.3)、(B.1)、(B.2) を仮定する。このとき、$((\mathscr{E},\mathscr{D}_\infty), L^2(\mathsf{S},\mu))$ の *closure*$(\mathscr{E},\mathscr{D})$ は、$L^2(\mathsf{S},\mu)$ 上の *quasi-regular* なディリクレ形式となる。従って、$((\mathscr{E},\mathscr{D}), L^2(\mathsf{S},\mu))$ から導かれる *Hunt* 過程 $\{\mathbb{P}_\mathsf{s}\}_{\mathsf{s}\in\mathsf{S}}$ が存在する。

この定理により S 値の Hunt 過程、つまり、ラベルなし干渉飛躍型無限粒子系の構成を行うことができる。

Remark 1. 仮定 A は、ラベルなし干渉ブラウン運動の Dirichlet form を用いた構成において仮定されていたものと同一である。実は、飛躍率が finite range、つまり、p の support が有界である場合や、 short range、つまり、$p(|y|)$ が $|y| \to \infty$ で指数的に減衰する場合においては仮定 A のみの仮定でラベルなし干渉飛躍型無限粒子系の構成を行うことができる。仮定 B は、飛躍率が long range、つまり、$p(|y|)$ が $|y| \to \infty$ で多項式的に減衰する場合の構成を行ううえで技術的に必要なものである。

Remark 2. (B.1) はラベルなし干渉飛躍型無限粒子系のとても遠くからの流入と、とても遠くへの流出をコントロールする仮定であり、(B.2) は、半径 r の中の粒子の個数の期待値からの fluctuation をコントロールする仮定である。

3 Theorem 1の証明のポイント

3.1 $(\mathscr{E},\mathscr{D})$ の有限系近似

主定理を証明する上で、$(\mathscr{E},\mathscr{D})$ の有限系近似を行うことがポイントとなる。以下で、その有限系の定義を与える。

$\mathscr{B}_r=\{f:\mathsf{S}\to\mathbb{R};\ f$ は $\sigma[\pi_r]$-可測かつ有界$\}$ とする。ここで、$f\in\mathscr{D}_\infty\cap\mathscr{B}_r$ に対し,

$$\mathbf{D}_r^{i,(1)}[f,f](\mathsf{s})=\sum_{j=1}^{i}\int_{S_r}(f_r^i(\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})^{x_j(\mathsf{s}),y_j})-f_r^i(\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})))^2p(|y_j-x_j(\mathsf{s})|)dy_j$$

$$\mathbf{D}_r^{i,(2)}[f,f](\mathsf{s})=\sum_{j=1}^{i}\int_{S_r^c}(f_r^{i-1}(\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})^{x_j(\mathsf{s})})-f_r^i(\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})))^2p(|y_j-x_j(\mathsf{s})|)dy_j$$

$$\mathbf{D}_r^{i,(3)}[f,f](\mathsf{s})=\sum_{x\in\mathrm{supp}\mathsf{s}\cap S_r^c}\int_{S_r}(f_r^{i+1}(\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})\cdot y)-f_r^i(\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})))^2p(|y-x|)dy$$

とし、さらに、

$$\mathbf{D}_r^i[f,f](\mathsf{s})=\begin{cases}\mathbf{D}_r^{i,(1)}[f,f](\mathsf{s})+\mathbf{D}_r^{i,(2)}[f,f](\mathsf{s})+\mathbf{D}_r^{i,(3)}[f,f](\mathsf{s}) & (\mathsf{s}\in\mathsf{S}_r^i),\\ 0 & (\mathsf{s}\notin\mathsf{S}_r^i)\end{cases}$$

とする。ただし、f_r^i は $f\in\mathscr{D}_\infty\cap\mathscr{B}_r$ の S_r^i 上における表現とし、$\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})$ は s の S_r^i における座標を表すものとする。さらに、$\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})^{x_j(\mathsf{s}),y_j}$ とかいた場合には、座標 $\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})$ に対して、j 成分 $x_j(\mathsf{s})$ を y_j に置き換えたもの、また、$\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})^{x_j(\mathsf{s})}$ とかいた場合には、座標 $\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})$ に対して、j 成分 $x_j(\mathsf{s})$ を取り除いたもの、そして、$\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})\cdot y$ とかいた場合には、座標 $\mathbf{x}_r^i(\mathsf{s})$ に対して、さらに $i+1$ 成分として y を付け加えたものを表すこととする。ここで、$\mathscr{E}_r^i(f,f)=\int_{\mathsf{S}}\mathbf{D}_r^i[f,f](\mathsf{s})d\mu$ と定義する。このようにして定義された $\mathscr{E}_r^i(f,f)$ が半径 r 内における"i 粒子系"を表現する。

Remark 3. それぞれのカレドシャン $\mathbf{D}_r^{i,(j)}$ に対応する dynamics をコメントする。まず、$\mathbf{D}_r^{i,(1)}$ は半径 r 内に存在している i 個の粒子の半径 r 内での動きを表現する。また、$\mathbf{D}_r^{i,(2)}$ は (半径 r の外側の配置に応じた率で) 半径 r 内に存在している i 個の粒子のうちの 1 つを消滅させる動きを表現する。さらに、$\mathbf{D}_r^{i,(3)}$ は (半径 r の外側の配置に応じた率で) 半径 r 内に新たに 1 つの粒子を生成する動きを表現する。

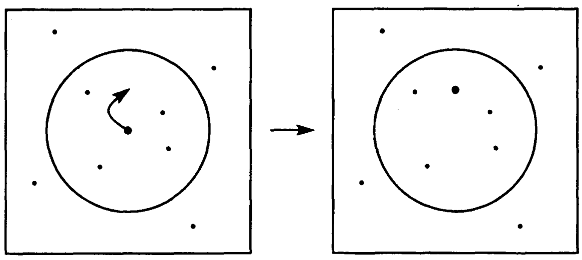

図 1: $\mathbf{D}_r^{i,(1)}$ に対応する dynamics

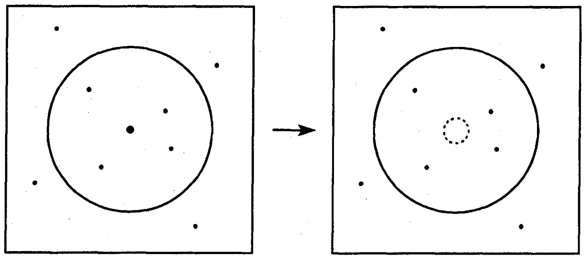

図 2: $\mathbf{D}_r^{i,(2)}$ に対応する dynamics

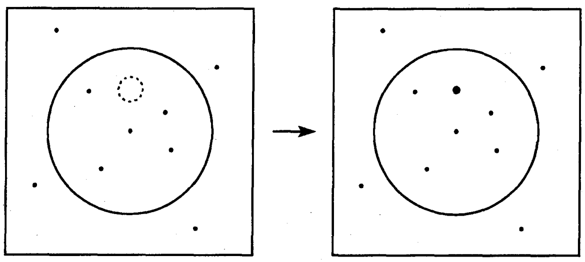

図 3: $\mathbf{D}_r^{i,(3)}$ に対応する dynamics

続いて、半径 r の粒子系を表す双線形形式として、$\mathscr{E}_r(f,f) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_r^i(f,f)$ とする。ここで、$(\mathscr{E}_r, \mathscr{D}_\infty \cap \mathscr{B}_r)$ の閉包を $(\mathscr{E}_r, \mathscr{D}_r)$ とすると、$\{(\mathscr{E}_r, \mathscr{D}_r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ は decreasing であることを示すことができる。このことから、$r \to \infty$ として、無限系 $(\mathscr{E}, \mathscr{D}_\infty)$ を近似することができる。

3.2 $(\mathscr{E}, \mathscr{D})$ の quasi-regularity

主定理の証明の中において、干渉ブラウン運動の場合と干渉飛躍型過程の場合で方法が異なるのは、$(\mathscr{E}, \mathscr{D})$ の quasi-regularity の証明である。Dirichlet form の quasi-regularity の定義を [2] から引用する。

Definition 1. *A symmetric Dirichlet form* (ε, F) *on* $L^2(\mathsf{S}, \mu)$ *is called quasi-regular if* (ε, F) *satisfies the following:*

(Q.1) *There exists an* ε*-nest consisting of compact sets.*

(Q.2) *There exists an* $||\cdot||_1$*-dence subset of* F *whose elements have* ε*-continuous* μ*-versions. Here* $||\mathsf{f}||_1^2 = ||\mathsf{f}||_{L^2(\mathsf{S},\mu)}^2 + \varepsilon(\mathsf{f},\mathsf{f})$.

(Q.3) *There exist* $u_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, *having* ε*-continuous* μ*-versions* $\tilde{u}_n$, *and an* ε*-exceptional set* N *such that* $\{\tilde{u}_n\}$ *separates the points of* $\mathsf{S} - N$.

干渉飛躍型過程の場合異なるのは、特に (Q.1) の証明において用いる cut off function である。

まず、$\mathbf{A} = \{\mathbf{a} = \{a_r\}_{r\in\mathbb{N}}; a_r \in \mathbb{N}$, 任意の r に対して, $a_r \le a_{r+1}\}$ とする。ここで、$\mathbf{a} = \{a_r\} \in \mathbf{A}$ に対し, $\mathsf{S}[\mathbf{a}] = \{\mathsf{s} \in \mathsf{S}$; 任意の r に対して, $\mathsf{s}(S_r) \le a_r\}$ 上の cut off function $\chi[\mathbf{a}]$ を $\chi[\mathbf{a}](\mathsf{s}) = \rho \circ d_{\mathbf{a}}(\mathsf{s})$ として導入する。ただし、$d_{\mathbf{a}}(\mathsf{s}) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\mathsf{s}(S_r)-a_r)_+}{a_r}$ とし、$\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ は、$\rho(t) = 1 (t < 0)$、$\rho(t) = 1 - t (0 \le t \le 1)$、$\rho(t) = 0 (1 < t)$ で与えられるものとする。この $\mathsf{S}[\mathbf{a}]$ 上の cut off function $\chi[\mathbf{a}]$ を用いると、仮定 (B.2) より、次の命題を示すことができる。

Lemma 1. 任意の $f \in \mathscr{D}_\infty$ に対して, $\chi[\mathbf{a}_n]f \to f$ *in* $\|\cdot\|_1$ *as* $n \to \infty$ となるような $\mathbf{a}_n \in \mathbf{A}$ が存在する。

この補題を軸とした考察によって、我々の $(\mathscr{E}, \mathscr{D})$ が (Q.1) をみたすことが証明される。

4 仮定A、仮定Bの十分条件

この節では、仮定Aと仮定Bの十分条件を与える。この十分条件をみたすことを確認することによって、イントロダクションで触れた、μ が Dyson random point field、Ginibre random point field などである場合が今研究の扱える範疇に含まれてくることが確認される。

4.1 準 Gibbs 測度による仮定Aの十分条件

ここで、 canonical Gibbs 測度の一般化である準 Gibbs 測度の定義を [4] から引用する。

Definition 2. μ が (β, Φ, Ψ)-準 *Gibbs* 測度であるとは、任意の $m, r \in \mathbb{N}$、μ-*a.s.*ξ に対して、

$$c^{-1}\Lambda_r^m(d\mathsf{s})e^{-\beta\mathcal{H}_r(\mathsf{s})} \le \mu_{r,\xi}^m(d\mathsf{s}) \le c\Lambda_r^m(d\mathsf{s})e^{-\beta\mathcal{H}_r(\mathsf{s})}$$

となる $c = c(m, r, \xi)$ が存在することをいう。ただし、$\pi_r(\mathsf{s}) = \mathsf{s}(\cdot \cap S_r)$、$\pi_r^c(\mathsf{s}) = \mathsf{s}(\cdot \cap S_r^c)$ として、

$$\mu_{r,\xi}^m(\cdot) = \mu(\pi_r \in \cdot | \mathsf{s}(S_r) = m, \pi_r^c(\mathsf{s}) = \pi_r^c(\xi)) \quad \mu\text{-}a.s.\ \xi$$

であり、

$$\mathcal{H}_r(\mathsf{s}) = \sum_{s_i \in S_r} \Phi(s_i) + \sum_{\substack{s_i, s_j \in S_r \\ i<j}} \Psi(s_i - s_j)$$

であるとする。また、Λ_r^m とは、$\mathbb{R}^d$ 上の *Lebesgue* 測度を密度にもつ *Poisson random point field* Λ に対し, $\Lambda_r^m(\cdot) = \Lambda(\pi_r(\cdot) | \mathsf{s}(S_r) = m)$ で与えられるものとする。

イントロダクションでも述べたが、この準 Gibbs 測度には、 canonical Gibbs 測度ではない、Dyson random point field、Ginibre random point field、Airy random point field な

どが含まれることに注意する。ここで、さらに、上述の Φ と Ψ に対して、ある上半連続な関数 Φ_0、$\Psi_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ と正の定数 c_1、c_2 で、

$$c_1^{-1}\Phi_0(s) \le \Phi(s) \le c_1\Phi_0(s)$$
$$c_2^{-1}\Psi_0(s) \le \Psi(s) \le c_2\Psi_0(s), \quad \Psi_0(s) = \Psi_0(-s) \quad (\forall s)$$

となるものの存在を仮定する。さらに、Φ_0 と Ψ_0 は局所的に下に有界であり、$\Gamma = \{s; \Psi_0(s) = \infty\}$ はコンパクトと仮定する。

このような Φ、Ψ に対して、μ が (β, Φ, Ψ)-準 Gibbs 測度であるならば (A.1) が成立することが上で導入した有限系近似を用いることによって証明される。

4.2 (B.2) の十分条件

(B.2) の十分条件としては2つのものを考えることができる。1つとしては、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\int_{S_r^2}\rho^2(x_1,x_2)m^{\otimes 2}(dx_1dx_2) - \int_{S_r}\rho^1(x)m(dx)\left\{\int_{S_r}\rho^1(x)m(dx) - 1\right\}}{\left\{\int_{S_r}\rho^1(x)m(dx)\right\}^2} < \infty \qquad \text{(B.2.1)}$$

であり、2つとしては、

$$\sum_{C}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} e^{-C\mathbb{E}^{\mu}[\mathsf{s}(S_r)]}\mathbb{E}^{\mu}[e^{\mathsf{s}(S_r)}] < \infty \qquad \text{(B.2.2)}$$

が考えられる。μ が Ginibre random point field の場合は、具体的に、相関関数を計算することで、

$$\int_{S_r^2}\rho^2(x_1,x_2)m^{\otimes 2}(dx_1dx_2) - \int_{S_r}\rho^1(x)m(dx)\left\{\int_{S_r}\rho^1(x)m(dx) - 1\right\} = O(|S_r|)$$

であることを確認できるので、(B.2.1) が成立することを示すことができ、したがって、μ が Ginibre random point field の場合は (B.2) が成立することが示せる。一方、Dyson random point field の場合は (B.2.2) が成立することが示せるので、μ が Dyson random point field の場合も (B.2) が成立することが示せる。

以上のことをあわせて、μ が Dyson random point field、Ginibre random point field の場合は (A.0)、(A.1)、(A.2)、(A.3)、(B.2) が成立することが示せるので、これらの場合 (B.1) をみたす α、β に対して、Theorem 1 を適用することができる。

Remark 4. μ が Dyson random point field、Ginibre random point field の場合 (B.1) をみたす α、β をとることができることは確認される。

参考文献

[1] E.Lytvynov and N.Ohlerich, A note on equilibrium Glauber and Kawasaki dynamics for fermion point processes, Methods Funct. Anal. Topology, **14**(1): 67-80(2008).

[2] Z.-M. Ma, and M. Röckner, Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[3] H. Osada, Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions, Comm. Math. Phys., **176** (1996), 117-131.

[4] H. Osada, Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials, Annals of Probability, Vol **41** (2013), 1-49.

[5] H. Osada, Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic potentials II: Airy random point field, Stochastic Processes and their Applications, Vol **123** (2013), 813-838.