

## 相対論的対称 $\alpha$ -安定過程で駆動される確率微分方程式の解の道ごとの一意性について

益永聡志 (熊本大学自然科学研究科)

ABSTRACT. 本稿は相対論的対称  $\alpha$ -安定過程で駆動される, drift 項のない多次元確率微分方程式の解の道ごとの一意性が成立する十分条件を定めた. さらに,  $d \geq 3$  の場合での道ごとの一意性が成立する十分条件はこれ以上改善できないことを示した.  $d \geq 3$  の場合と同様に,  $d = 2$  の場合でも道ごとの一意性が成立する十分条件はこれ以上改善できないことを示した.

### 1. 序論

Drift 項のない確率微分方程式の解の道ごとの一意性について Brown 運動で駆動される場合と対称  $\alpha$ -安定過程で駆動される場合の結果が知られている. 以下に Brown 運動の場合の解の道ごとの一意性について簡単に述べる.  $\sigma(t, x) = (\sigma_j^i(t, x))$  ( $i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, r$ ) は  $[0, \infty[ \times \mathbb{R}^d$  上で定義された有界な Borel-可測関数である. 各  $1 \leq i \leq d$  と  $1 \leq j \leq d, t \geq 0$  に対して

$$(1.1) \quad dX^i(t) = \sigma_j^i(X(t))dB^j(t), \quad X^i(0) = x^i(0).$$

ここで  $B = \{(B^1(t), B^2(t), \dots, B^d(t)); t \geq 0\}$  は  $d$  次元 Brown 運動である. 確率微分方程式 (1.1) の解の道ごとの一意性は T. Yamada, S. Watanabe 両氏により  $d = 1, d = 2, d \geq 3$  の 3 つの場合でそれぞれ十分条件が与えられている ([14], [15]).

次に対称  $\alpha$ -安定過程で駆動される場合の解の道ごとの一意性について簡単に述べる. 各  $1 \leq i \leq d$  と  $1 \leq j \leq d, t \geq 0$  に対して,

$$(1.2) \quad dY^i(t) = \sigma_j^i(Y(t-))dZ^j(t), \quad Y^i(0) = y^i(0).$$

ここで  $Z = \{(Z^1(t), Z^2(t), \dots, Z^d(t)); t \geq 0\}$  は  $d$  次元対称  $\alpha$ -安定過程である. 確率微分方程式 (1.2) の解の道ごとの一意性は  $d = 1$  の場合は T. Komatsu [7] により十分条件が与えられた.  $d \geq 2$  の場合は T. Tsuchiya [13] により十分条件が与えられている.

次に本稿で考える相対論的対称  $\alpha$ -安定過程で駆動される確率微分方程式を述べる. 各  $1 \leq i \leq d$  と  $1 \leq j \leq d, t \geq 0$ , さらに任意の  $m \geq 0$  に対して

$$(1.3) \quad dY^i(t) = \sigma_j^i(Y(t-))dZ_m^j(t), \quad Y^i(0) = y^i(0).$$

Date: March 27, 2014.

ここで  $Z_m = \{(Z_m^1(t), Z_m^2(t), \dots, Z_m^d(t)); t \geq 0\}$  は  $d$  次元相対論的対称  $\alpha$ -安定過程である.

我々は主定理において  $d \geq 3$  の場合と  $d = 2$  の場合で確率微分方程式 (1.3) の解の道ごとの一意性について十分条件を与えた.  $d \geq 3$  の場合は対称  $\alpha$ -安定過程の  $d \geq 2$  のときの結果と一致した. これは, 主定理の証明において  $Z_m$  の Lévy 測度を評価する際に  $m = 0$  として, 対称  $\alpha$ -安定過程の結果に帰着させたためである.  $d = 2$  の場合は Brown 運動の  $d = 2$  のときの結果と一致した.

以下は相対論的 (回転) 対称  $\alpha$ -安定過程の定義である.

**定義 1.1** (相対論的対称  $\alpha$ -安定過程).  $\alpha \in ]0, 2]$  と任意の  $m \geq 0$  に対して,  $Z_m := \{Z_m(t)\}$  が質量  $m$  を持つ相対論的対称  $\alpha$ -安定過程であるとは,  $Z_m$  が以下の特性関数を持つ  $\mathbb{R}^d$  上の Lévy 過程のことである.

$$\mathbf{E} \left[ e^{\sqrt{-1}\langle \xi, Z_m(t) \rangle} \right] = \exp \left( -t \left( (|\xi|^2 + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} - m \right) \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

$m = 0$  のときは対称  $\alpha$ -安定過程になり,  $\alpha = 2$  のときはラプラシアン  $\Delta$  に対応する Brown 運動になり,  $\alpha = 1$  のときは相対論的 free Hamiltonian 過程と呼ばれている.  $Z_m(t)$  は原点から出発する確率過程であるが  $x \in \mathbb{R}^d$  から出発するものも以後, 同じ  $Z_m(t)$  で表し, それを支配する確率測度を  $\mathbf{P}_x$  と記す:

$$\mathbf{P}_x(Z_m(t) \in A) := \mathbf{P}(Z_m(t) \in A - x).$$

ここで  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  で  $A - x := \{y - x \mid y \in A\}$  である.  $Z_m(t)$  の  $\mathbf{P}_x$  の下での分布は  $\mathbb{R}^d$  上のルベーグ測度に関して対称なのでディリクレ形式  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  を考えることができる. フーリエ変換をもちいて  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  を表示すると以下ようになる ([6, Example 1.4.1]): 関数  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  のフーリエ変換を  $(\mathcal{F}f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}\langle \xi, x \rangle} f(x) dx$  として

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \left( (|\xi|^2 + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} - m \right) d\xi < \infty \right\}, \\ \mathcal{E}(f, g) := \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) \left( (|\xi|^2 + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} - m \right) d\xi \quad \text{for } f, g \in \mathcal{F}. \end{array} \right.$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  の飛躍測度  $J$  は以下のように表される ([4]):

$$J(dx dy) = J_m(x, y) dx dy \quad \text{with } J_m(x, y) = A(d, -\alpha) \frac{\Psi(m^{1/\alpha}|x - y|)}{|x - y|^{d+\alpha}},$$

ここで  $A(d, -\alpha) = \alpha 2^{d+\alpha} \Gamma((d + \alpha)/2) / 2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(1 - \alpha/2)$  であり,  $\Psi(r) := I(r)/I(0)$  と  $I(r) := \int_0^\infty s^{(d+\alpha)/2-1} e^{-s/4-r^2/s} ds$  は  $r = \infty$  の近くで  $\Psi(r) \asymp e^{-r} (1 + r^{(d+\alpha-1)/2})$  で  $r = 0$  の近くで  $\Psi(r) = 1 + \Psi''(0)r^2/2 + o(r^4)$  を満たす関数である.  $I(r) \leq I(0)$  から  $\Psi(r) \leq 1$  なので  $J_m(x, y) \leq A(d, -\alpha)/|x - y|^{d+\alpha}$  である. 飛躍測度の密度関数  $J_m$

相対論的対称  $\alpha$ -安定過程で駆動される確率微分方程式の解の道ごとの一意性について

をもちいて  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  は

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(x) - f(y)|^2 J_m(x, y) dx dy < \infty \right\}, \\ \mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) J_m(x, y) dx dy \quad \text{for } f, g \in \mathcal{F}. \end{array} \right.$$

と表される.

## 2. 主定理

以下において, 相対論的対称  $\alpha$ -安定過程の表記で  $m$  を省略し  $Z := \{Z(t)\}$  とする. また  $\alpha \in ]1, 2[$  とする.  $n$  毎に  $Z^n(t) := \sum_{s \leq t} \Delta Z(s) 1_{\{|\Delta Z(s)| \leq n\}}$  は 2 乗可積分マルチンゲールで,  $t \mapsto \sum_{s \leq t} \Delta Z(s) 1_{\{|\Delta Z(s)| > n\}}$  は  $\alpha \in ]1, 2[$  よりマルチンゲールになる.

次の  $d$  次元相対論的対称  $\alpha$ -安定過程で駆動される確率微分方程式を考える.

$$(2.1) \quad dY(t) = \sigma(Y(t-)) dZ(t).$$

ここで  $\sigma$  は有界連続な行列値関数とする. 確率微分方程式 (2.1) の右辺は [5], [10] の結果と  $\sigma$  の有界性から確率積分として意味をもつ. また  $Y(t-)$  は時間  $t$  における  $Y$  の左極限である. 確率微分方程式 (2.1) は

$$(2.2) \quad Y^i(t) - Y^i(0) = \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j^i(Y(s-)) dZ^j(s), \quad i = 1, 2, \dots, d$$

を意味する. 係数行列  $\sigma$  に対して次の仮定をおく.

**仮定 2.1.** 係数行列  $\sigma = [\sigma_j^i]$  ( $i = 1, 2, \dots, d, j = 1, 2, \dots, d$ ) は以下を満たす.

$$\sigma_j^i(x) = \delta_{ij} \sigma(x).$$

仮定を確率微分方程式 (2.2) に適用すると以下を得る.

$$(2.3) \quad Y^i(t) - Y^i(0) = \int_0^t \sigma(Y(s-)) dZ^i(s), \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

次に  $\rho$  は  $[0, a[$  ( $a > 0$ ) 上で定義された広義単調増加連続関数で,  $\rho(0) := 0$  とする. 以下が主定理である.

**定理 2.1.**  $d \geq 3$  とする.  $\rho$  は任意の  $\varepsilon \in ]0, a^{\alpha-1}[$  に対して,

$$(2.4) \quad \int_0^\varepsilon \frac{du}{G(u)} = \infty$$

を満たすとする. ここで  $G(u) := \rho^\alpha(u^{1/(\alpha-1)}) u^{-1/(\alpha-1)}$  は上に凸な関数とする. このとき,

$$(2.5) \quad [\text{任意の } x, y \in \mathbb{R}^d \text{ に対して, } |x - y| < a \text{ ならば } |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \rho(|x - y|).]$$

を満たす任意の  $\sigma$  に対して,  $d \geq 3$  のときの確率微分方程式 (2.3) の解の道ごとの一意性が成立する.

**定理 2.2.**  $d = 2$  とする.  $\rho$  は任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$(2.6) \quad \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{F(\eta)} = \infty$$

を満たすとする. ここで,  $F(\eta) := \eta^3 e^{2/\eta} \rho^2(e^{-1/\eta})$  は上に凸な関数とする. このとき,

$$(2.7) \quad [\text{任意の } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ に対して, } |x - y| < a \text{ ならば } |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \rho(|x - y|).]$$

を満たす任意の  $\sigma$  に対して,  $d = 2$  のときの確率微分方程式 (2.3) の解の道ごとの一意性が成立する.

### 3. 証明の鍵となる命題と補題

本節では主定理の証明に必要な相対論的対称  $\alpha$ -安定過程  $Z$  に対する伊藤の公式と補題を述べる. 伊藤の公式に関しては R. F. Bass が 1 次元対称  $\alpha$ -安定過程の場合の伊藤の公式を与え [1, Proposition 2.1], 多次元への拡張は T. Tsuchiya が行った [13, Proposition 4.1]. 両氏の主張と証明を参考に相対論的対称  $\alpha$ -安定過程の場合の伊藤の公式を導出した. 補題 3.1 は T. Tsuchiya が与えた補題 [13, Key Lemma] である. 本稿において  $d \geq 3$  のときの主定理の証明の際に, 対称  $\alpha$ -安定過程の場合の証明に帰着させるために補題 3.1 を用いた. まず  $Z$  に関するポアソンランダム測度の定義を述べる.

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbf{P})$  をフィルター付き確率空間とし,  $\mathbf{P}(Z(0) = 0) = 1$  とする. また,  $\Delta Z(s) := Z(s) - Z(s-)$  とおく.  $Z(t)$  に関するポアソンランダム測度を,  $A \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $t \geq 0$  に対して

$$N(t, A) := \#\{0 \leq s \leq t : \Delta Z(s) \in A\} = \sum_{0 \leq s \leq t} 1_A(\Delta Z(s))$$

と定義する. 次に複合ポアソンランダム測度を,  $A \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $t \geq 0$  に対して

$$\tilde{N}(t, A) := N(t, A) - t\nu(A)$$

と定義する. ここで  $\nu(dy)$  は  $Z$  の Lévy 測度で以下の形で与えられる.

$$\nu(dy) = \frac{c_\nu}{|y|^{d+\alpha}} \int_0^\infty v^{(d+\alpha)/2-1} \exp\left(-\frac{v}{4} - \frac{(m^{1/\alpha}|y|)^2}{v}\right) dv dy.$$

ここで  $c_\nu = \alpha 2^{-2} \pi^{-1/2} \Gamma(1 - \alpha/2)^{-1}$  である. また

$$L(s, y) := [f(Y(s-) + y) - f(Y(s-)) - \nabla f(Y(s-)) \cdot y]$$

と定義する.

相対論的対称  $\alpha$ -安定過程で駆動される確率微分方程式の解の道ごとの一意性について

**命題 3.1.**  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  とする. 以下の確率微分方程式を考える. 各  $1 \leq i \leq d$  と  $t \geq 0$  に対して,

$$Y^i(t) = Y^i(0) + \int_0^t \int_{|x| \leq 1} x^i H(s) \tilde{N}(ds, dx) + \int_0^t \int_{|x| > 1} x^i H(s) N(ds, dx).$$

ここで  $H = \{H(t)\}$  は,

$$\mathbf{E} \left[ \int_0^T |H(s)|^\alpha ds \right] < \infty$$

を満たす  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -適合過程である. このとき,

$$f(Y(t)) = f(Y(0)) + M(t) + c_\nu \int_0^t |H(s)|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \frac{L(s, y)}{|y|^{d+\alpha}} \int_0^\infty v^{(d+\alpha)/2-1} \exp\left(-\frac{v}{4} - \frac{(m^{1/\alpha} |H(s)|^{-1} |y|)^2}{v}\right) dv dy ds$$

が成立する. ここで  $M = \{M(t)\}$  は任意のマルチンゲールである.

**補題 3.1** (T. Tsuchiya [13, Key Lemma]).  $u(x) = |x|^{\alpha-1}$ ,  $u^\varepsilon(x) = |x|^{\alpha-1} e^{-\varepsilon|x|}$  とし, mollifier 関数の列  $\{\phi_n\}$  に対して  $u_n := u^\varepsilon * \phi_n$  とおく. ここで  $\varepsilon = 1/n$  である. このとき,

$$|\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^\alpha (\mathcal{F}u_n)[\xi]][x]| \leq C(\alpha, d) |x|^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

が成立する. ここで  $C(\alpha, d)$  は  $(\alpha, d)$  にのみ依存する定数で  $n$  には依存しない.

#### 4. 十分条件の改善不可能性

本節では主定理において  $d \geq 3$  のときと  $d = 2$  のときの, それぞれで与えた十分条件がこれ以上改善できない例を述べる. 以下の命題は相対論的対称  $\alpha$ -安定過程の時間変更過程を求めるためのものである.

**命題 4.1.**  $H = \{H(t)\}$  を任意の  $\theta, t > 0$  に対して

$$\mathbf{E} \left[ \exp \left( \theta \int_0^t |H(s)|^\alpha ds \right) \right] < \infty$$

を満たす  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -適合過程とする. このとき, 任意の  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  と  $m > 0$  に対して

$$\varepsilon_H(t) := \exp \left( \sqrt{-1} \left\langle \lambda, \int_0^t H(s) dZ(s) \right\rangle + \int_0^t \left( (|\lambda|^2 |H(s)|^2 + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} - m \right) ds \right)$$

は  $\mathbb{C}$ -値マルチンゲールである.

**命題 4.2.**  $H = \{H(t)\}$  を

$$\mathbf{E} \left[ \int_0^t |H(s)|^\alpha ds \right] < \infty$$

益永聡志 (熊本大学自然科学研究科)

を満たす  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -適合格程とする. さらにランダム時間

$$\tau(u) := \frac{1}{(|\lambda|^2 + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} - m} \int_0^u \left( (|\lambda|^2 |H(s)|^2 + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} - m \right) ds$$

は,  $u \rightarrow \infty$  のとき  $\tau(u) \rightarrow \infty$  を満たすとする. また,  $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{\tau^{-1}(t)}$  とおく. 各  $1 \leq i \leq d$  に対して,  $Z$  の時間変更過程を

$$\tilde{Z}^i(t) := \int_0^{\tau^{-1}(t)} H(s) dZ^i(s)$$

とおく. このとき,  $\tilde{Z} := \{(\tilde{Z}^1(t), \tilde{Z}^2(t), \dots, \tilde{Z}^d(t)); t \geq 0\}$  は  $\mathcal{G}_t$ -可測な相対論的対称  $\alpha$ -安定過程になる.

**例 4.1.**  $\rho$  を以下を満たす  $[0, \infty[$  上の関数で, 有界かつ劣加法的であるとする.

$$\int_{0+} \frac{du}{G(u)} < \infty, \quad (G(u) := \rho^\alpha (u^{1/(\alpha-1)} u^{-1/(\alpha-1)}).$$

このとき, 条件 (2.5) を満たす係数行列  $\sigma$  が存在して,  $d \geq 3$  のときの確率微分方程式 (2.3) の解の道ごとの一意性は成立しない.

**例 4.2.**  $\rho$  を以下を満たす  $[0, \infty[$  上の関数で, 有界かつ劣加法的であるとする.

$$\int_{0+} \frac{d\eta}{F(\eta)} < \infty, \quad (F(\eta) := \eta^3 e^{2/\eta} \rho^2 (e^{-1/\eta})).$$

このとき, 条件 (2.7) を満たす係数行列  $\sigma$  が存在して,  $d = 2$  のときの確率微分方程式 (2.3) の解の道ごとの一意性は成立しない.

## REFERENCES

- [1] R. F. Bass, *Stochastic differential equations driven by symmetric stable processes*, Séminaire de Probabilités de Strasbourg, **36**, (2002), 302–313.
- [2] I. Bihari, *A generalization of a lemma of bellman and its application to uniqueness problems of differential equations*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica, **7**(1), (1956), 81–94
- [3] Z.-Q. Chen, P. Kim and R. Song, *Sharp heat kernel estimates for relativistic stable processes in open sets*, Ann. of Prob., **40**(1), (2012), 213–244.
- [4] Z.-Q. Chen and R. Song, *Drift transforms and Green function estimates for discontinuous processes*, J. Funct. Anal. **201**(1) (2003), 262–281.
- [5] E. Giné and M. B. Marcus, *The central limit theorem for stochastic integrals with respect to Lévy processes*, Ann. of Prob., **11**(1), 58–77, (1983).
- [6] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*. de Gruyter Studies in Mathematics **19** Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [7] T. Komatsu, *On the pathwise uniqueness of one-dimensional stochastic differential equations of jump type*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58**, (1982), 353–358.

相対論的対称  $\alpha$ -安定過程で駆動される確率微分方程式の解の道ごとの一意性について

- [8] K. Kuwae and M. Takahashi, *Kato class measures of symmetric Markov processes under heat kernel estimates*, J. Func. Anal. **250**(1), (2007), 86–113.
- [9] S. Masunaga and K. Kuwae, *On the pathwise uniqueness of solutions of stochastic differential equations driven by symmetric relativistic  $\alpha$ -stable processes*, in preparation, (2014).
- [10] J. Rosiński and W. A. Woyczyński, *On Itô stochastic integration with respect to  $p$ -stable motion: inner clock, integrability of sample paths, double and multiple integrals*, Ann. of Prob. **14**(1), (1986), 271–286.
- [11] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Studies in Advanced Mathematics **68**, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [12] 関根 順, 数理ファイナンス, 確率論教程シリーズ 7, 培風館, 2007
- [13] T. Tsuchiya, *On the pathwise uniqueness of solutions of stochastic differential equations driven by multi-dimensional symmetric  $\alpha$  stable class*, J. Math. Kyoto Univ. **46**(1), (2006), 107–121.
- [14] T. Yamada and S. Watanabe, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. **11**(1), (1971), 155–167.
- [15] S. Watanabe and T. Yamada, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations II*, J. Math. Kyoto Univ. **11**(3), (1971), 553–563.
- [16] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge Univ. Press, 1991.

Satoshi Masunaga

Department of Mathematics and Engineering

Graduate School of Science and Technology

Kumamoto University

Kumamoto, 860-8555

JAPAN

E-mail address: epeco21@gmail.com