数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 132-139

Asymptotic error distributions of the Crank-Nicholson scheme for SDEs driven by fractional Brownian motion

永沼 伸顕
東北大学大学院理学研究科数学専攻
Nobuaki Naganuma,
Mathematical Institute, Tohoku University

1 導入

確率微分方程式の研究において，近似解の構成は大きな興味の対象である．その際に，近似解 $X^{(m)}, m=1,2,\ldots,$ がどのように解 X に収束するかという問がある．たとえば，正の無限大に発散する数列 $\alpha^{(m)}$ に対して，重み付き誤差 $\alpha^{(m)}(X-X^{(m)})$ の収束を調べることは，先の問に対するひとつの回答を与える．

この問題に対しては多くの研究があり，Mémin-Słomiński [MS91] や Kurtz, Protter, Jacod の研究 [KP91a, KP91b, KP96, JP98] などが代表的である．この一連の研究においては，駆動過程はセミマルチンゲール，近似解として Euler 近似を採用した場合を対象として，重み付き誤差 $\alpha^{(m)}(X-X^{(m)})$ が 0 ではない極限をもつための十分条件を考察している．そこでは，Jakubuwski-Mémin-Pagès [JMP89] が導入した umiform tighitness (UT) や Kurtz-Protter [KP91a] による uniformly controlled variation (UCT) といったセミマルチンゲールに対する概念を用いて議論を行っている．

このように駆動過程がマルチンゲール性を持つ場合には詳しく研究が行われているが，非整数 Brown 運動のようにマルチンゲール性を持たない場合の研究は発展途上にある．とくに，重み付き誤差 $\alpha^{(m)}(X-X^{(m)})$ の収束に関しては殆ど知られておらず，また，知られている全ての結果が 1 次元の確率

微分方程式に対するものである．ひとつめがGradinaru-Nourdin [GN09] による結果である．彼らは非整数 Brown 運動により駆動された1次元の確率微分方程式の解に対して Milstein 型の近似解を考え，重み付き誤差の収束を示している．ふたつめが筆者 [Nag14] による結果である．ここでは整数 Brown 運動により駆動された1次元の確率微分方程式の解に対して，Crank-Nicholson 近似を考え，重み付き誤差の収束を示している．

これらの考察で鍵になるのが，Nualart, Peccati, Tudor, Ortiz-Latorre [NP05, PT05, NOL08] による4次モーメント定理である．この定理を用いることにより，初めて非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の解と近似解の重み付き誤差の極限分布の考察が可能となったように思われる．

本稿では，[Nag14] の結果の紹介と証明の概略を述べる．

2 設定および結果

以下，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ を固定する．そして，$\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{P}$ に関する期待値を表わす．

はじめに非整数 Brown 運動の定義を与える．

定義 1. 実数値確率過程 $B = \{B_t\}_{0\le t\le 1}$ が Hurst 定数 $0 < H < 1$ をもつ非整数 Brown 運動であるとは，B は連続な Gauss 過程であって，平均が 0，分散が

$$\boldsymbol{E}[B_s B_t] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right)$$

となるものをいう．

この定義から，$\boldsymbol{E}[|B_t - B_s|^2] = |t-s|^{2H}$，および，パスの H 未満の Hölder 連続性が分かる．さらに，$H \neq 1/2$ のときには，非整数 Brown 運動がセミマルチンゲールにならない．

本稿では，非整数 Brown 運動 B により駆動される1次元確率微分方程式

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)\, d^{\circ}B_t, & t \in (0,1], \\ X_0 = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで，σ は実数値関数，$x_0 \in \mathbf{R}$，$d^{\circ}B$ は Russo-Vallois の意味での対称積分を表わす．

つぎに，方程式 (1) に対応する Crank-Nicholson 近似 $\{\hat{X}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ を

$$(2)\quad \begin{cases} \hat{X}_0^{(m)} = x_0, \\ \hat{X}_t^{(m)} = \hat{X}_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\left(\sigma\left(\hat{X}_t^{(m)}\right) + \sigma\left(\hat{X}_{\eta^{(m)}(t)}^{(m)}\right)\right)\left(B_t - B_{\eta^{(m)}(t)}\right), \quad t \in (0,1], \end{cases}$$

で定義する．ただし，$\eta^{(m)}(t) = \sup\{l2^{-m} : 0 \leq l2^{-m} < t\}$ である．こうして定められた $\hat{X}^{(m)}$ は連続な確率過程であることに注意する．

このときに，以下の定理が得られる．

仮定 2. (A1) $\sigma \in C_{\mathrm{bdd}}^{\infty}(\mathbf{R};\mathbf{R})$, (A2) $\inf|\sigma| > 0$.

定理 3. 仮定 2 の下で，$1/3 < H < 1/2$ ならば

$$\lim_{m\to\infty}\left(B, 2^{m(3H-1/2)}(\hat{X}^{(m)} - X)\right) = \left(B, c_{3,H}\sigma(X_\cdot)\int_0^{\cdot}\frac{1}{24}(\sigma^2)''(X_s)\,dW_s\right)$$

が一様位相における弱収束の意味で成り立つ．ここで，$c_{3,H}$ は H に依存する定数，W は B とは独立な通常の Brown 運動，dW は通常の伊藤積分を表わす．

定理 3 に関して，幾つか注意を述べる．

注意 4. 定理 3 は，Neuenkirch-Nourdin [NN07, Theorem 5] の結果の精密化に相当する．彼らは，仮定 2 と $1/3 < H < 1/2$ のもとで，すべての $\alpha < 3H-1/2$ に対して，$2^{m\alpha}(\hat{X}_1^{(m)} - X_1)$ が 0 へ確率収束することを主張している．

また，彼らは，[NN07, Theorem 3] において，$\sigma(\xi)^2 = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma$ かつ $1/6 < H < 1/2$ の場合に，$2^{m(3H-1/2)}(\hat{X}_1^{(m)} - X_1)$ が 0 ではない確率変数へ法則収束することを示している．$\sigma(\xi)^2$ が 2 次関数の場合は，仮定 2 には含まれないことも指摘しておく．

注意 5. 定理 3 は $1/3 < H < 1/2$ の場合を扱ったが，$H = 1/2$，つまり，B が通常の Brown 運動の場合には，[GN09] により結果が得られている．彼らは，方程式 (1) を Stratonovich 型確率微分方程式と解釈することで，

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} 2^m(\hat{X}_1^{(m)} - X_1) \\ &\qquad = \sigma(X_1)\left\{\sqrt{6}\int_0^1 \frac{1}{24}(\sigma^2)''(X_s)\,dW_s + 3\int_0^1 \frac{1}{24}(\sigma^2)''(X_s)\circ dB_s\right\} \end{aligned}$$

が法則収束の意味で成り立つことを示している．ただし，W は B とは独立な通常の Brown 運動，dW は通常の伊藤積分，$\circ\, dB$ は Stratonovich 型の確率積分を表わす．

3 証明

定理 3 の証明の概略を述べる．

3.1 確率微分方程式の解と Crank-Nicholson 近似の表現

[Nou08] に従い，方程式 (1) の解，Crank-Nicholson 近似 (2) の表現を述べる．まず，何度でも微分可能な関数 ϕ を

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = \sigma(\phi(x,y)), \quad y \in \mathbf{R}, \\ \phi(x,0) = x, \end{cases}$$

の解として定める．

命題 6. 方程式 (1) の解 X は，$X_t = \phi(x_0, B_t)$ と表される．

つぎに，Crank-Nicholson 近似の表現を考えるが，その前に近似の定義に関して注意を与える．Crank-Nicholson 近似は $\hat{X}_t^{(m)}$ に関する方程式 (2) を解くことで定義されるが，無条件では解の存在が保証されない．そこで，$\sup|\sigma'| = 0$ のときは $\epsilon_0 = \infty$，そうでないときは $\epsilon_0 = 1/\sup|\sigma'|$ とおく．そして，各 $m \in \mathbf{N}$ に対して

$$\Omega^{(m)} := \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{\substack{0\le s,t \le 1, \\ |s-t| \le 2^{-m}}} |B_t(\omega) - B_s(\omega)| < \epsilon_0 \right\}$$

とおく．陰関数定理より，この集合上では方程式 (2) の解の存在が保証される．そして以下の命題が示される．

命題 7. 仮定 2 の下で，Crank-Nicholson 近似 $\hat{X}^{(m)}$ は，$\Omega^{(m)}$ 上で $j2^{-m}$ なる形の t に対して，$\hat{X}_t^{(m)} = \phi(x_0, B_t + U_t^{(m)})$ と表される．ここで，$U^{(m)}$ は

$$U_t^{(m)} = \sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t \rfloor - 1} \Big\{ f_3(\hat{X}_{j2^{-m}}^{(m)})(\triangle B_{j2^{-m}})^3 + f_4(\hat{X}_{j2^{-m}}^{(m)}))(\triangle B_{j2^{-m}})^4 + R(\hat{X}_{j2^{-m}}^{(m)}, \triangle B_{j2^{-m}}) \Big\}$$

で定義される確率過程である．ただし，$\lfloor \xi \rfloor$ は $\xi > 0$ の整数部分，$f_3 = (\sigma^2)''/24$，$f_4 = \sigma(\sigma^2)'''/48$，$\triangle B_{j2^{-m}} = B_{(j+1)2^{-m}} - B_{j2^{-m}}$，$R$ は $|R(\xi, h)| \leq M|h|^5$ を満たす関数である．

時刻 t が $j2^{-m}$ 以外の形でも，似た表現が成り立つが，ここでは省略する．[NN07] は，この表現を用いて，定理 3 の限定的な場合を示している．

3.2 Weighted Hermite variation

つぎに，$U^{(m)}$ の漸近挙動を見る．そのために，weighted Hermite variation とよばれる Wiener 汎関数の解析を行う．この weighted Hermite variation は

$$G_q^{(m)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{j=0}^{\lfloor 2^m t \rfloor - 1} \frac{f(B_{(j+1)2^{-m}}) + f(B_{j2^{-m}})}{2} H_q(2^{mH} \triangle B_{j2^{-m}})$$

として定義される．ただし，f は実数値関数，H_q は q 次の Hermite 多項式である．この Wiener 汎関数に対して，4 次モーメント定理を用いることで次が得られる．

定理 8. 自然数 q は 2 以上，関数 f は滑らかで導関数は多項式増大を持つとする．このときに，$1/2q < H < 1 - 1/2q$ であれば，

$$\lim_{m \to \infty} \left(B, G_q^{(m)}\right) = \left(B, c_{q,H} \int_0^{\cdot} f(B_s)\, dW_s\right)$$

が Skorohod 位相における弱収束の意味で成り立つ．ここで，$c_{q,H}$ は q と H によって決まる正定数，W は B とは独立な通常の Brown 運動である．

このweighted Hermite variationに対する収束定理は多くの研究者により，調べられており，例えば，[NNT10], [BS10], [NR09], [NN10]などがある．彼らは，

$$\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{j=0}^{2^m-1} f(B_{j2^{-m}})H_q(2^{mH}\triangle B_{j2^{-m}})$$

の型の収束を考察し，実数値確率変数の法則収束を示している．

3.3 主定理の証明

命題6と7より，$\Omega^{(m)}$上で

$$2^{m(3H-1/2)}(\hat{X}^{(m)}-X)=\sigma(X)\cdot 2^{m(3H-1/2)}U^{(m)}+2^{m(3H-1/2)}O(|U^{(m)}|^2)$$

となる．最後に，適切な誤差評価を行うことにより，$2^{m(3H-1/2)}U^{(m)}$の主要部が$G_3^{(m)}$であることが分かる．そして，定理8を用いて，$G_3^{(m)}$の収束を示して定理3を導く．定理3で現れる正定数$c_{3,H}$およびBrown運動Wは定理8で与えられるものである．

定理3の$1/3<H<1/2$の制限は，$2^{m(3H-1/2)}U^{(m)}$と$G_3^{(m)}$の誤差評価の甘さから生ずる制限である．実際には，$1/6<H<1/2$の範囲で同じ結果が成り立つと予想している．

References

[BS10] K. Burdzy and J. Swanson. A change of variable formula with Itô correction term. *Ann. Probab.*, 38(5):1817–1869, 2010.

[GN09] M. Gradinaru and I. Nourdin. Milstein's type schemes for fractional SDEs. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 45(4):1085–1098, 2009.

[JMP89] A. Jakubowski, J. Mémin, and G. Pagès. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbf{D}^1$ de Skorokhod. *Probab. Theory Related Fields*, 81(1):111–137, 1989.

[JP98] J. Jacod and P. Protter. Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 26(1):267–307, 1998.

[KP91a] T. G. Kurtz and P. Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 19(3):1035–1070, 1991.

[KP91b] T. G. Kurtz and P. Protter. Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. In *Stochastic analysis*, pages 331–346. Academic Press, Boston, MA, 1991.

[KP96] T. G. Kurtz and P. E. Protter. Weak convergence of stochastic integrals and differential equations. In *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995)*, volume 1627 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–41. Springer, Berlin, 1996.

[MS91] J. Mémin and L. Słomiński. Condition UT et stabilité en loi des solutions d'équations différentielles stochastiques. In *Séminaire de Probabilités, XXV*, volume 1485 of *Lecture Notes in Math.*, pages 162–177. Springer, Berlin, 1991.

[Nag14] N. Naganuma. Asymptotic error distributions of the Crank-Nicholson scheme for SDEs driven by fractional Brownian motion. *J. Theor. Probab.*, 2014. To appear, DOI 10.1007/s10959-014-0539-y.

[NN07] A. Neuenkirch and I. Nourdin. Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion. *J. Theoret. Probab.*, 20(4):871–899, 2007.

[NN10] I. Nourdin and D. Nualart. Central limit theorems for multiple Skorokhod integrals. *J. Theoret. Probab.*, 23(1):39–64, 2010.

[NNT10] I. Nourdin, D. Nualart, and C. A. Tudor. Central and non-central limit theorems for weighted power variations of fractional Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(4):1055–1079, 2010.

[NOL08] D. Nualart and S. Ortiz-Latorre. Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus. *Stochastic Process. Appl.*, 118(4):614–628, 2008.

[Nou08] I. Nourdin. A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one. In *Séminaire de probabilités XLI*, volume 1934 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–197. Springer, Berlin, 2008.

[NP05] D. Nualart and G. Peccati. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Ann. Probab.*, 33(1):177–193, 2005.

[NR09] I. Nourdin and A. Réveillac. Asymptotic behavior of weighted quadratic variations of fractional Brownian motion: The critical case $H = 1/4$. *Ann. Probab.*, 37(6):2200–2230, 2009.

[PT05] G. Peccati and C. A. Tudor. Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals. In *Séminaire de Probabilités XXXVIII*, volume 1857 of *Lecture Notes in Math.*, pages 247–262. Springer, Berlin, 2005.