数理解析研究所講究録
第 1908 巻 2014 年 86-95

量子系における漸近正規性とその周辺

熊谷 亘
名古屋大学 多元数理科学研究科

Wataru Kumagai
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Abstract

統計モデルに属する確率分布から多数のデータが与えられるとき、適当な正則性の条件のもとでデータを生成している分布に対するガウス近似が成り立つ。この性質は漸近正規性と呼ばれ、この性質を用いることでガウス分布とは限らない分布から発生するデータに対し、漸近的に良い統計量の構成やその性能評価を行うことが可能になる。一方で量子系上の量子状態のなす正則な統計モデルに対して、同様の漸近正規性が成り立つことが知られている。そこでは従来のガウス分布にあたる概念としてガウス状態と呼ばれる量子状態が現れる。本論文では、量子系における漸近正規性とガウス状態族に対する最適な統計処理について解説する。

1 準備

本節では量子系における統計推測について述べるための数学的基礎および記法に関して簡単にまとめる。量子情報理論の基礎に関する知識のある読者は本節を飛ばしても差し支えない。まず量子系 (の表現空間) は複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で表される。本論文では量子系は可分、すなわち高々可算無限次元であると仮定する。また量子系 $\mathcal{H}$ 上の量子状態は、$\mathcal{H}$ 上の正定値作用素 ρ で $\mathrm{Tr}\,\rho=1$ となるもので表される。各物理的対象にはそれぞれ量子状態が付随し、その状態や時間発展を記述することができる。ある物理的対象が独立かつ同一に n 回準備されたとき、その対象を表す量子系は $\mathcal{H}$ のテンソル積空間 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ で表され、量子状態もテンソル積の形 $\rho^{\otimes n}$ で表される。量子状態の変化は量子通信路と呼ばれる概念で記述される。系 $\mathcal{H}$ から系 $\mathcal{H}'$ への量子通信路 T とは、線型写像 $T:\mathcal{T}(\mathcal{H})\to\mathcal{T}(\mathcal{H}')$ でトレースを保存し (i.e. $\mathrm{Tr}\,T(A)=\mathrm{Tr}\,A$)、完全正値 (i.e. $id_{\mathbb{C}^n}\otimes T$ が任意の $n\in\mathbb{N}$ で正値) であるものをいう。ただし $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ は系 $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス作用素の全体である。次に量子系の測定について記述する。数学的には測定は量子系 $\mathcal{H}$ 上の作用素の組 $M=\{M(A)|A\subset\Omega\}$ で以下をみたすもので与えられる。(1)$M(A)$ は正定値作用素、(2)$M(\varphi)=0$ かつ $M(\Omega)=id_H$、(3) 共通部分を持たない集合族 $\{A_j\}_j$ に対し $M(\cup_j A_j)=\sum_j M(A_j)$。すなわち測定は正作用素値測度 (Positive Operator-Valued Measure) であることを表している。いかでは上記の測定 M のことを POVM ともいい、Ω を測定値集合と呼ぶ。量子状態が ρ であり、測定値集合 Ω を持つ測定を施したとき、測定値が $A\subset\Omega$ に入る確率は $P_{\rho,M}(A):=\mathrm{Tr}(\rho M(A))$ で表される。また $\Omega\subset\mathbb{R}$ であるとき、測定値の期待値は $E(\rho,M):=\int_\Omega \omega dP_{\rho,M}(\omega)$ で与えられる。POVM の特別の場合として測定値集合が二点 $\{0,1\}$ からなる場合が考えられる。この場合は POVM は単一の正定値作用素 T を用いて表すことができる。すなわち $M(\{0\})=T, M(\{1\})=id_H-T$ となる。二値の測定値集合を持つ測定は仮説検定の文脈で現れる。

2 漸近正規性

2.1 ガウス状態

本節では量子系での漸近正規性を記述するために、ガウス状態と呼ばれる量子状態を導入する。量子系として1モードのボソン系を表す空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ をとる。k 次エルミート関数 H_k を用いて $|k\rangle := (2^n n!\pi)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k$ と定めるとき、$\{|k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となる。上記のボソン系で表される典型的な例として1モードの光学系が挙げられる。そこでは $|k\rangle$ は k 光子状態と呼ばれ、その名の通り、光子が k 個あるような量子系の状態を記述する。そのとき、$M_N = \{|k\rangle\langle k|\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は個数測定と呼ばれ, $L^2(\mathbb{R})$ 上の正作用素値測度 (POVM) をなす。またベクトル $|\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ $(\xi \in \mathbb{C})$ が

$$|\xi) := e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle,$$

で定義されるとき、$|\xi)(\xi|$ はコヒーレント状態と呼ばれ、光学系におけるコヒーレント光に対応する。以上の準備の下で**ガウス状態** (special quasiclassical Gaussian state)[7] は以下の様に、ガウスノイズを伴ったコヒーレント状態として表される。

$$\rho_{\zeta,N} = \frac{1}{\pi N} \int_{\mathbb{C}} |\xi)(\xi| e^{-\frac{|\zeta-\xi|^2}{N}} d\xi$$

ここで $\zeta \in \mathbb{C}$ かつ $N \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ であり、それぞれ平均パラメータおよび個数パラメータと呼ばれる。これらのパラメータはガウス分布における平均パラメータおよび分散パラメータに対応する。上記のガウス状態は一般のガウス状態の特殊な場合であるが、簡単のため本論文ではガウス状態は上記の形を持つ量子状態とする。

後に用いるガウス状態の性質を簡単に述べる。個数測定 M_N をガウス状態 $\rho_{\zeta,N}$ に施したとき、測定値 k が得られる確率は

$$P_{\zeta,N}(k) := \langle k|\rho_{\zeta,N}|k\rangle = \frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^k e^{-\frac{|\zeta|^2}{N+1}} L_k\left(-\frac{|\zeta|^2}{N(N+1)}\right), \tag{1}$$

で与えられる。ここで $L_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(-x)^j}{j!}$ は k 次ラゲール多項式を表す。すなわちガウス状態で表される光に対し、光子数を数えるような測定を施したとき、光が k 個の光子からなっていたと測定される確率が上記で与えられる。またガウス状態は以下のような対称性を持つ。まず $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素 W_ζ $(\zeta \in \mathbb{C})$ が存在し、平均パラメータのみをずらすような作用を与える。

$$W_{\zeta'} \rho_{\zeta,N} W_{\zeta'}^* = \rho_{\zeta+\zeta',N}, \tag{2}$$

上記の作用素を displacement 作用素と呼ぶ。次に $L^2(\mathbb{R})^{\otimes n}$ 上のユニタリ作用素 U_n が存在し、n-i.i.d. ガウス状態の平均を一つのガウス状態に集中させ、他のガウス状態の平均を0にする。

$$U_n \rho_{\zeta,N}^{\otimes n} U_n^* = \rho_{\sqrt{n}\zeta,N} \otimes \rho_{0,N}^{\otimes(n-1)}. \tag{3}$$

上記の作用素を concentration 作用素と呼ぶ。これらの作用はユニタリなので、操作の前後で統計的な情報損失が生じない。従ってこれらの操作でガウス状態を適切に変換してから統計的処理を行うことができる。

2.2 漸近正規性

統計学における漸近論ではしばしば漸近正規性が重要な役割を果たす。漸近正規性とは、ある確率分布の列から派生したデータに適当な統計量を施したとき、その統計量が従う分布が漸近的にガウス分布 (正規分布) に収束するというものである。最も簡単な例としては、確率 $1-p$ で 0、確率 p で 1 が得られる二項分布 B_p から独立同一に n 個のデータが発生するとき、その算術平均とパラメータ p との差を $\sqrt{n}$ で割ったものが正規分布に分布収束することが良く知られている。これは中心極限定理 (もしくはド・モアブル-ラプラスの定理) から得られる結果である。

上で触れた漸近正規性は単一の確率分布の列に対して成り立つ性質であった。一方で局所漸近正規性と呼ばれる、確率分布族の列に対して成り立つ性質も知られている。確率分布に対する局所漸近正規性は Le Cam によって広いクラスの確率分布族に対して示されたが、以下では最も単純な場合に限定したものを紹介する。

Theorem 1 (Le Cam 1960[9]) 正則な確率分布族 $\mathcal{P} = \{P_\theta | \theta \in \Theta\}$ に対し、独立同一な分布族 $\mathcal{P}_n = \{P_\theta^n | \theta \in \Theta\}$ は、Le Cam 距離の意味で局所的にガウス分布族に収束する。すなわち局所的な独立同一分布族 $\mathcal{P}_n(\theta_0) = \{P_{\theta_0+\theta/\sqrt{n}} | |\theta - \theta_0| < c\}$ とガウス分布族 $\mathcal{G}(\theta_0) = \{G_{\theta, J_0^{-1}} | |\theta - \theta_0| < c\}$ に対し、古典通信路 T_n および S_n が存在し、以下をみたす。

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\theta|<c} \left\| G_{\theta,J_0^{-1}} - T_n\left(P_{\theta_0+\theta/\sqrt{n}}\right) \right\|_1 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\theta|<c} \left\| S_n\left(G_{\theta,J_0^{-1}}\right) - P_{\theta_0+\theta/\sqrt{n}} \right\|_1 = 0$$

ここで $c > 0$ は任意の定数であり、$\|\cdot\|_1$ は変動距離である。

単一の確率分布の列に対する漸近正規性は各点収束であるのに対し、確率分布族の列に対する局所漸近正規性は各点の近傍まで含めて一様収束 (広義一様収束) になっている。従って確率分布族の局所近傍から定まるフィッシャー計量のような量も、収束先の分布族のそれで近似することができる。よって漸近有効推定量のようにフィッシャー計量から定まる推定量の導出などにおいて局所漸近正規性の概念が有効に働く。さらに近年、量子状態族に対する局所漸近正規性も示されている。以下は量子系の次元が二次元に限定された、最初に示された量子局所漸近正規性である。

Theorem 2 (Guta & Kahn 2006[5]) 量子系 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ 上の正則な量子状態族 $\mathcal{S} = \{\sigma_\theta | \theta \in \Theta\}$ に対し、独立同一な分布族 $\mathcal{S}_n = \{\sigma_\theta^n | \theta \in \Theta\}$ は、Le Cam 距離の意味で局所的にガウス状態族に収束する。すなわち局所的な独立同一な量子状態族 $\mathcal{S}_n(\theta_0) = \{\sigma_{\theta_0+\theta/\sqrt{n}} | |\theta - \theta_0| < c\}$ とガウス分布族 $\mathcal{G}(\theta_0) = \{\rho_{\theta,N_0} | |\theta - \theta_0| < c\}$ に対し、量子通信路 T_n および S_n が存在し、以下をみたす。

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\theta|<c} \left\| \rho_{\theta,N_0} - T_n\left(\sigma_{\theta_0+\theta/\sqrt{n}}\right) \right\|_1 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\theta|<c} \left\| S_n\left(\rho_{\theta,N_0}\right) - \sigma_{\theta_0+\theta/\sqrt{n}} \right\|_1 = 0$$

ここで $c > 0$ は任意の定数であり、$\|\cdot\|_1$ はトレース距離である。

現在では量子局所漸近正規性はより一般化されており量子系における状態推定への応用を持つ [3, 4, 12]。上記の定理からわかるようにガウス状態はガウス分布に対応する概念と捉えることができ、量子系の統計推測では基本的な対象ということができる。従来の統計学においてガウス分布に対する最適な統計処理の方法は集中的に研究されてきたが、量子系での統計学においてもガウス状態に対する最適な統計処理の方法が研究されてきている。以下の節では仮説検定と推定の理論において、ガウス状態に対する最適な統計処理を具体的に紹介する。

3 量子仮説検定

3.1 定式化と最適性基準

本節では量子仮説検定の定式化を行う。以下 $\mathcal{S}$ をある量子系 $\mathcal{H}$ 上の量子状態の全体とし、その直和分割を $\mathcal{S}=\mathcal{S}_0\cup\mathcal{S}_1$ をとる。未知の量子状態が $\mathcal{S}_0$ か $\mathcal{S}_1$ に属しているかを決定する問題を、以下の様に表す。

$$H_0:\rho\in\mathcal{S}_0 \;\; vs. \;\; H_1:\rho\in\mathcal{S}_1.$$

このとき H_0 は帰無仮説、H_1 は対立仮説と呼ばれる。

このとき ρ がどちらの仮説をみたすかを判断するために、二値 POVM$\{T_0,T_1\}$ を施す。そして測定値 $i\in\{0,1\}$ に応じて、仮説 H_i を支持することにする。このとき二種類の判断誤りが考えられる。一つには実際は H_0 が正しいにも関わらず H_1 を支持してしまうもので、もう一つは実際には H_1 が正しいにもかかわらず H_0 を支持してしまうものである。前者を第一種誤り、後者を第二種誤りと呼ぶ。

任意の二値 POVM$\{T_0,T_1\}$ は単一の作用素 $0\le T\le I$ によって $T_0=I-T, T_1=T$ の様に表される。ここで I は恒等写像である。以下では $0\le T\le I$ をみたす作用素を検定 (作用素) と呼ぶことにする。検定作用素を用いることで第一種および第二種誤り確率は以下の様に表される。

$$\alpha_T(\rho):=\mathrm{Tr}\,\rho T \;\; (\rho\in\mathcal{S}_0), \qquad \beta_T(\rho):=1-\mathrm{Tr}\,\rho T \;\; (\rho\in\mathcal{S}_1). \tag{4}$$

双方の誤り確率が低いような検定作用素が望ましいが、特定の場合を除いて第一種誤り確率と第二種誤り確率はトレードオフの関係にあり、同時に最小化することはできない。従ってある小さい値 $\alpha\in(0,1)$ を第一種誤り確率に対する許容誤差として導入し、その制約の下での第二種誤り確率の最小化を問題とする。このとき許容誤差を (有意) 水準と呼ぶ。以下では検定の第一種誤り確率は全て水準 α 以下であるとする、すなわち $\mathrm{Tr}\,T\rho\le\alpha$ を任意の量子状態 $\rho\in\mathcal{S}_0$ に対してみたすとする。また簡単のため水準 α の検定全体を以下の記号で表す。

$$\mathcal{T}_\alpha:=\{T|0\le T\le 1,\;\mathrm{Tr}\,T\rho\le\alpha,\forall\rho\in\mathcal{S}_0\}. \tag{5}$$

水準 α の検定 T が、第二種誤り確率を一様に最小にするとき、それは一様最強力検定 (UMP) とよばれる。数学的にはこれは任意の $\rho\in\mathcal{S}_1$ と $T'\in\mathcal{T}_\alpha$ に対し、$\beta_T(\rho)\le\beta_{T'}(\rho)$ をみたすということである。仮説検定の問題において UMP 検定が最も望ましいものであるが、H_1 が複合仮説である場合はしばしば UMP 仮説検定は存在しない。従ってより広く適用可能な、検定の最適性基準を導入する必要がある。

そのような基準を導入するために扱う量子状態族は $\{\rho_{\theta,\xi}\}_{\theta\in\Theta,\xi\in\Xi}$ の形を持つとする。ここで $\xi\in\Xi$ は攪乱パラメータであり、$\theta\in\Theta$ が検定されるパラメータである。このとき仮説検定問題を以下の様に表す。

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \; vs. \; H_1:\theta\in\Theta_1 \; with \; \{\rho_{\theta,\xi}\}_{\theta\in\Theta,\xi\in\Xi}.$$

すなわち $i=0,1$ に対し $\mathcal{S}_i=\{\rho_{\theta,\xi}\}_{\theta\in\Theta_i,\xi\in\Xi}$ なるパラメータ付けを考えている。このとき min-max 基準とは、第二種誤り確率の攪乱パラメータに関する最悪値を最小にすることを目的とする。すなわち min-max 基準で最適な水準 α の検定は以下をみたす検定 T_0 で与えられる。

$$\sup_{\xi\in\Xi}\beta_{T_0}(\rho_{\theta,\xi})=\inf_{T\in\mathcal{T}_\alpha}\sup_{\xi\in\Xi}\beta_T(\rho_{\theta,\xi})\quad(\forall\theta\in\Theta_1).$$

上記の min-max 基準で最適な検定を min-max 検定とよぶ。攪乱パラメータが存在しない場合 (すなわち Ξ が一点集合とみなせる場合)、min-max 検定は通常の UMP 検定に一致する。従って min-max 基準は UMP 検定に対する最適性の基準の一般化になっている。本論文では min-max 基準を最適性の基準として採用し、ガウス状態族の仮説検定問題に対して最適な検定を導出する。なおここではガウス状態の単純仮説検定 [10] には限定せず、複合仮説検定について扱う。

3.2 平均パラメータに関する仮説検定

本節では以下の仮説検定問題を考える。

$$H_0:|\zeta|\in[0,R_0]\ vs.\ H_1:|\zeta|\in(R_0,\infty)\ with\ \{\rho_{\zeta,N}^{\otimes n}\}_{\zeta\in\mathbb{C}} \tag{H-1}$$

ここで $1\le n\in\mathbb{N}$ かつ $R_0\in\mathbb{R}_{\ge0}$ であり、個数パラメータ N は固定する。すなわち個数パラメータは既知であると仮定する。このとき攪乱パラメータの空間は $S^1=\{a\in\mathbb{C}||a|=1\}$ で表され、平均パラメータの位相を意味している。検定問題 (H-1) に対する UMP 検定は存在しないので、ここでは min-max 検定を紹介する。ここで $R\in\mathbb{R}_{\ge0}$ に対し、検定 $T_{R,N}^{[A],\alpha}$ を以下で定義する。

$$T_{R,N}^{[A],\alpha}:=\gamma_R|k_R\rangle\langle k_R|+\sum_{k=k_R+1}^{\infty}|k\rangle\langle k|,$$

ただし $k_R\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ であり、$0<\gamma_R\le1$ は水準 α によって

$$1-\sum_{k=0}^{k_R}P_{R,N}(k)<\alpha\le1-\sum_{k=0}^{k_R-1}P_{R,N}(k), \tag{6}$$

$$\gamma_R:=\frac{\alpha-\left(1-\sum_{k=0}^{k_R}P_{R,N}(k)\right)}{P_{R,N}(k_R)}, \tag{7}$$

で定められる。また $P_{R,N}$ は (1) で定められた確率分布である。

Theorem 3 *[8]* 仮説検定問題 (H-1) に対し

$$T_{\alpha,R_0,N}^{[1],n}:=U_n^*(T_{\sqrt{n}R_0,N}^{[A],\alpha}\otimes I^{\otimes(n-1)})U_n \tag{8}$$

は水準 α の *min-max* 検定である。

次に以下の仮説検定問題を考える。

$$H_0:|\zeta|\in[0,R_0]\ vs.\ H_1:|\zeta|\in(R_0,\infty)\ with\ \{\rho_{\zeta,N}^{\otimes n}\}_{\zeta\in\mathbb{C},N\in\mathbb{R}_{>0}} \tag{H-2}$$

ここで $2 \leq n \in \mathbb{N}$ かつ $R_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする。しかし任意の $R_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し最適な検定を導出するのは困難である。従ってここでは以下の様に $R_0 = 0$ の場合についてのみ (H-2) を考える。

$$H_0 : |\zeta| \in \{0\}\ vs.\ H_1 : |\zeta| \in (0,\infty)\ with\ \{\rho_{\zeta,N}^{\otimes n}\}_{\zeta\in\mathbb{C},N\in\mathbb{R}_{>0}}.$$

ここで検定 $T_\alpha^{[t],n}$ を

$$T_\alpha^{[t],n} = \sum_{k=(k_0,\cdots,k_n)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}} \varphi'^{(n)}(k)|k\rangle\langle k|$$

で定める。ただし

$$\varphi'^{(n)}(k) := \begin{cases} 0 & (k_0 < c(s(k))) \\ \gamma(s(k)) & (k_0 = c(s(k))) \\ 1 & (k_0 > c(s(k))) \end{cases}$$

であり、この検定関数は $k = (k_0, \cdots, k_n)$ の総和 $s(k) := \sum_{j=0}^n k_j$ に依存し、関数

$$c : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \gamma : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to (0,1] \tag{9}$$

は各 $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し以下で決定される。

$$\sum_{l=c(s)+1}^{s} \binom{s-l+n-1}{n-1} < \alpha\binom{s+n}{n} \leq \sum_{l=c(s)}^{s} \binom{s-l+n-1}{n-1}\quad , \tag{10}$$

$$\gamma(s) := \frac{\alpha\binom{s+n}{n} - \sum_{l=c(s)+1}^{s}\binom{s-l+n-1}{n-1}}{\binom{s-c(s)+n-1}{n-1}} \tag{11}$$

Theorem 4 *[8]* 仮説検定問題 (H-2) において $R_0 = 0$ であるとき、検定

$$T_\alpha^{[2],n} := U_n^* T_\alpha^{[t],n-1} U_n \tag{12}$$

は水準 α の *min-max* 検定である。

仮説検定問題 (H-2) は $R_0 \neq 0$ の場合にも最適な検定を持つかどうかは明らかになっていない。この問題は古典仮説検定における生物学的同等問題 [2] に相当するが、生物学的同等問題に関しての最適検定は古典仮説検定理論の段階で明らかになっていない。

3.3 個数パラメータに関する仮説検定

以下の仮説検定問題に着目する。

$$H_0 : N \in [0, N_0]\ vs.\ H_1 : N \in (N_0,\infty)\ with\ \{\rho_{\zeta,N}^{\otimes n}\}_{N\in\mathbb{R}_{>0}} \tag{H-5}$$

ここで $1 \leq n \in \mathbb{N}$ かつ $N \in \mathbb{R}_{>0}$ であり、 平均パラメータ ζ は固定されているとする。すなわち個数パラメータは既知であると仮定する。

検定関数 $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \to [0,1]$ が

$$\varphi(k) := \begin{cases} 0 & (X_1(k) < K_0) \\ \gamma & (X_1(k) = K_0) \\ 1 & (X_1(k) > K_0), \end{cases} \tag{13}$$

で定められるとしよう。ただし $k=(k_1,\cdots,k_n)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し $X_1(k):=\sum_{j=1}^n k_j$ であり、定数 $K_0\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $\gamma\in(0,1]$ は

$$
\begin{aligned}
&1-\sum_{K=0}^{K_0}\binom{K+n-1}{n-1}\left(\frac{1}{N_0+1}\right)^n\left(\frac{N_0}{N_0+1}\right)^K<\alpha \\
&\leq 1-\sum_{K=0}^{K_0-1}\binom{K+n-1}{n-1}\left(\frac{1}{N_0+1}\right)^n\left(\frac{N_0}{N_0+1}\right)^K,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\gamma:=\frac{\alpha-\left(1-\sum_{K=0}^{K_0}\binom{K+n-1}{n-1}\left(\frac{1}{N_0+1}\right)^n\left(\frac{N_0}{N_0+1}\right)^K\right)}{\binom{K_0+n-1}{n-1}\left(\frac{1}{N_0+1}\right)^n\left(\frac{N_0}{N_0+1}\right)^{K_0}}
\tag{15}
$$

によって一意的に決定される。そのとき以下の様に検定を定める。

$$
T_{\alpha,N_0}^{[\chi^2],n}:=\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n}\varphi(k)|k\rangle\langle k|
$$

Theorem 5 *[8]* 仮説検定問題 (H-5) に対し、

$$
T_{\alpha,\zeta,N_0}^{[5],n}:=(W_{-\zeta}^{\otimes n})^*T_{\alpha}^{[\chi^2],n}(W_{-\zeta}^{\otimes n})
\tag{16}
$$

は水準 α の *min-max* 検定である。

次に以下の問題を考える。これは上記の問題において平均パラメータが未知なった場合に相当する。

$$
H_0: N\in(0,N_0]\ vs.\ H_1: N\in(N_0,\infty)\ with\ \{\rho_{\zeta,N}^{\otimes n}\}_{\zeta\in\mathbb{C},N\in\mathbb{R}_{>0}}
\tag{H-6}
$$

ただし $2\leq n\in\mathbb{N}$ かつ $N\in\mathbb{R}_{>0}$ である。このとき擾乱パラメータの空間は $\mathbb{C}$ である。

Theorem 6 *[8]* 仮説検定問題 (H-6) に対し、検定

$$
T_{\alpha,N_0}^{[6],n}:=U_n^*(I\otimes T_{\alpha}^{[\chi^2],n-1})U_n
\tag{17}
$$

は水準 α の *min-max* 検定である。

4 量子推定

4.1 定式化と最適性基準

本節ではガウス状態の量子推定について取り扱う。そのためにまず量子推定の定式化を述べる。量子系 $\mathcal{H}$ 上の量子状態族 $\mathcal{S}=\{\rho_\theta|\theta\in\Theta\}$ に対し、測定値集合として Θ をもつ測定 $M=\{M(A)|A\subset\Theta\}$ を推定量という。操作的には、量子状態族 $\mathcal{S}$ 内の量子状態で表される系に対し、推定量で測定を施すと点 $\theta\in\Theta$ が測定値として得られるので、その値を推定値として与えるのである。また点 $\theta_0\in\Theta$ における局所不偏推定量 M とは、

$$
E(\theta_0,M)=\theta_0,\quad \frac{\partial E(\theta,M)}{\partial\theta_j}|_{\theta=\theta_0}=\delta_{ij}
$$

をみたす推定量のことである。ここで $E(\theta, M) := E(\rho_\theta, M)$ とおいた。さらに不偏推定量とは、任意の点 $\theta \in \Theta$ において局所不偏になる推定量のことをいう。不偏推定量を用いて同一の量子状態を何度も推定し、その推定値の算術平均をとれば、対数の法則と不偏推定量の定義より、その値は真のパラメータに収束することが保証される。このように不偏推定量は推定量の中でも性能が保証された性質の良い推定量であるということができる。

次に推定量の精度の指標を導入する。推定量 M に対し、その平均二乗誤差行列を

$$\begin{aligned} V_\theta(M) &:= [v_{ij}(\theta, M)] \\ v_{ij}(\theta, M) &:= \int_\Omega (\hat{\theta}_i - \theta_i)(\hat{\theta}_j - \theta_j) dP(\theta, M|\hat{\theta}) \end{aligned}$$

の様に定める。この行列は半正定値であり、二つの測定 M と M' が点 θ において $V_\theta(M) \geq V_\theta(M')$ を満たすとき、θ において M' は M より精度が良いということができる。

ここで平均二乗誤差に関する基本的な不等式を紹介するために、量子フィッシャー計量 $J(\theta) = [J_{ij}(\theta)]$ を以下の様に導入する。

$$\begin{aligned} \partial_i \rho_\theta &:= \rho_\theta L_{i,\theta} \\ J_{ij}(\theta) &:= \mathrm{Tr}(L_{i,\theta} \rho_\theta L^*_{j,\theta}) \end{aligned}$$

なお量子フィッシャー計量は無数に存在するが、上記のものは複素 RLD 計量と呼ばれる特定のものである。このとき不偏推定量に対し以下のクラメル-ラオの不等式が成り立つ。

$$V_\theta(M) \geq J(\theta)^{-1}$$

一様にクラメル-ラオ不等式の下限を達成する推定量を有効推定量という。有効推定量は存在するならば不偏推定量の中で最も精度の高いものであるが、行列不等式の下限の達成は困難であり、従って有効推定量は多くの場合存在しない。

そこで推定誤差として平均二乗誤差行列そのものではなくそのトレースをとることが考えられる。すなわち測定 M の推定誤差として $e_\theta(M) := \mathrm{Tr}\, V_\theta(M)$ をとる。このとき点 θ における局所不偏量の最小推定誤差を以下の様に定める。

$$\hat{C}_\theta := \inf\{e_\theta(M) | M : \theta\text{において局所不偏}\}$$

このとき、量子クラメル-ラオ不等式を援用することで、以下の RLD 不等式が成り立つことが知られている。

$$\hat{C}_\theta \geq C^R_\theta := \mathrm{Tr}(\mathrm{Re} J_\theta^{-1} + |\mathrm{Im} J_\theta^{-1}|)$$

本論文では上記の不等式における右辺の量を RLD 下界とよぶ。RLD 下界を達成する不偏推定量が存在すれば、それは最小の推定誤差を持つことになる。最小推定誤差は測定のクラスを制限しない限り、直接計算することは非常に困難であるが、一方で RLD 下界の定義は測定に依存せず、量子フィッシャー計量にのみ依っているので、量子状態族を指定すれば具体的に計算可能である。従って推定の最適性を示すためには、その測定の推定誤差と RLD 下界を具体的に計算しそれらが一致することを見ればよい。実際にそのような流れで、ガウス状態族に対する最適推定に関する以下の定理が得られる。

Theorem 7 (Yuen&Lax1973[11], Holevo 1982[7]) ガウス状態族 $\{\rho_{\zeta,N} | \zeta \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{R}+\}$ の平均パラメータに対し、ヘテロダイン測定 $M_H = \{M_H(A) | A \subset \mathbb{C}\}$

$$M_H(A) := \pi^{-1} \int_A |\omega\rangle\langle\omega| d\omega$$

は不偏推定量かつ一様に最小推定誤差を達成する。ただし $|\omega\rangle$ はコヒーレント状態を表す。

Theorem 8 ガウス状態族 $\{\rho_{\zeta,N}|\zeta \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{R}+\}$ の個数パラメータに対し、個数測定 $M_N = \{M_N(i) := |i\rangle\langle i||i \in \mathbb{N}\}$ は不偏推定量かつ一様に最小推定誤差を達成する。ただし $|i\rangle$ は個数状態を表す。

上記の定理の他にも位相パラメータの最適測定 [1] や、平均パラメータと個数パラメータの同時測定に関する研究がある。

5 結論

本論文では量子系の漸近正規性と、そこに現れる量子ガウス状態に対する統計的結果に関して概観した。漸近正規性は確率分布をガウス分布で漸近的に近似する手法であり、従来の統計学において重要な役割を果たしてきた。一方で量子状態に対する統計学においても漸近正規性は成り立ち、量子状態はガウス分布の代わりにガウス状態と呼ばれる状態で近似される。そして従来の統計学で適用されたのと同様の考え方で、量子状態をガウス状態で近似することで漸近的に最適な統計処理を導出しうる。すなわち、量子状態をガウス状態で近似し、ガウス状態に対して最適な統計手法を適用することで漸近的に有効な方法がえられるのである。本論文では仮説検定及び推定に関する定式化にも触れ、ガウス状態族に対する具体的な結果にも触れた。

謝辞

本文の一部は林正人教授との共同研究に基づいている。

References

[1] Aspachs, M., Calsamiglia, J., Munoz-Tapia, R., Bagan, E.: Phase estimation for thermal Gaussian states. Phys. Rev. A **79**, 033834 (2009)

[2] Brown, L.D., Hwang, J.T.G., Munk, A.: An unbiased test for the bioequivalence problem. Ann. Statist. **25** 2345-2367 (1997)

[3] Guta, M., Jencova, A.: Local asymptotic normality in quantum statistics. Commun. Math. Phys., **276**, 341-379 (2007)

[4] Kahn, J., Guta, M.: Local asymptotic normality for finite dimensional quantum systems. Commun. Math. Phys. **289**, 597-652 (2009)

[5] Guta, M., Kahn, J.: Local asymptotic normality for qubit states. Phys. Rev. A, **73**, 052108 (2006)

[6] Hiai, F., Mosonyi, M., Hayashi, M.: Quantum hypothesis testing with group symmetry. J. Math. Phys. **50**, 103304 (2009)

[7] Holevo, A.S.: *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory.* North-Holland, Amsterdam, (1982)

[8] Kumagai, W., Hayashi, M. Quantum Hypothesis Testing for Gaussian States: Quantum Analogues of χ^2, t-, and F-Tests, Commun. Math. Phys., 318(2), 535-574. (2013)

[9] Le Cam, L. M. Locally asymptotically normal families of distributions: certain approximations to families of distributions and their use in the theory of estimation and testing hypotheses **3(2)**, University of California Press. (1960)

[10] Mosonyi, M.: Hypothesis testing for Gaussian states on bosonic lattices. J. Math. Phys. **50**, 032105 (2009)

[11] Yuen, H.P., Lax, M.: Multiple-parameter quantum estimation and measurement of non-selfadjoint observables. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-**19**, 740-750 (1973)

[12] Yamagata, K., Fujiwara, A., Gill, R. D.: Quantum Local Asymptotic Normality based on a new Quantum Likelihood Ratio, Ann. Statist. **41(4)**, 1693-2262 (2013)