数理解析研究所講究録
第 1910 巻 2014 年 144-153

The generalized amount of information between the prior distribution and the asymptotic posterior one

筑波大　赤平昌文 (Masafumi Akahira)
(University of Tsukuba)
筑波大・数理物質　小池健一 (Ken-ichi Koike)
(Faculty of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

1. はじめに

ベイズ (Bayes) 理論においては, ある事前分布について適当な推定量の値を与えたときの事後分布を求め, それを改めて事前分布として用いることを繰り返すベイズ更新が知られている. そこで, その事前分布と事後分布の差異を測ることは重要になり, その尺度として Kullback-Leibler 情報量等が用いられている (Bernardo[B79], Ghosh et al. [GDS06]).

いま, 母数 θ をもつ母集団分布からの無作為標本に基づく θ の最尤推定量を $\hat{\theta}_{ML}$ とし, θ の事前分布の密度を π とするとき, その π と $\hat{\theta}_{ML}$ の値を与えたときの漸近事後密度の間の差異について考える. その際, π は一様分布の密度のように滑らかであるとは限らないのでその差異を測る尺度として一般化情報量を採用して, その値を求める. そして, 実際に事前分布として正規分布, 一様分布, 両側指数分布, 指数分布を取ったときにそれら各々と $\hat{\theta}_{ML}$ の値を与えたときの漸近事後分布との間の一般化情報量を求めて, その期待値を数値的に比較する.

2. 一般化情報量

まず, 標本空間 $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ 上の確率測度 P, Q が或る σ-有限測度 μ に関して絶対連続であると仮定する. このとき, 一般化情報量を各 α $(|\alpha| < 1)$ について

$$I^{(\alpha)}(P, Q) := -\frac{8}{1-\alpha^2} \log \int_{\mathscr{X}} \left(\frac{dP}{d\mu}\right)^{(1-\alpha)/2} \left(\frac{dQ}{d\mu}\right)^{(1+\alpha)/2} d\mu \qquad (2.1)$$

によって定義する ([A96]). この情報量は測度 μ のとり方に依存しないことに注意. また Hölder の不等式から各 α $(|\alpha| < 1)$ について

$$\int_{\mathscr{X}} \left(\frac{dP}{d\mu}\right)^{(1-\alpha)/2} \left(\frac{dQ}{d\mu}\right)^{(1+\alpha)/2} d\mu \leq 1$$

となるから $I^{(\alpha)}(P,Q) \geq 0$ になる．このとき，一般情報量 $I^{(\alpha)}(P,Q)$ について P, Q が異なれば異なる程大きくなることが分かる．特に $\alpha = 0$ とすると

$$I^{(0)}(P,Q) = -8 \log \int_{\mathscr{X}} \left(\frac{dP}{d\mu} \cdot \frac{dQ}{d\mu} \right)^{1/2} d\mu \tag{2.2}$$

となり ([AT91]), (2.2) の右辺の中の積分値は類似度 (affinity) と呼ばれている ([M55]).

次に, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ を互いに独立にいずれも（Lebesgue 測度に関する）密度関数 $f(x,\theta)\,(\theta \in \Theta)$ に従う実確率変数列とする．ただし, Θ は母数空間とし, $\mathbb{R}^1$ の開区間とする．このとき, 任意の $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ に対して $f(\cdot,\theta_1)$ と $f(\cdot,\theta_2)$ の間の X_1 に基づく一般化情報量は, 各 $\alpha\,(|\alpha| < 1)$ について

$$I_{X_1}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) := -\frac{8}{1-\alpha^2} \log \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta_1)^{(1-\alpha)/2} f(x,\theta_2)^{(1+\alpha)/2} dx$$

となる．また同様にして, $f(\cdot,\theta_1)$ と $f(\cdot,\theta_2)$ の $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ に基づく一般化情報量を $I_{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)}$ で表せば

$$I_{\boldsymbol{X}}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) = nI_{X_1}^{(\alpha)}(\theta_1,\theta_2) \quad (|\alpha| < 1)$$

となる．もっと一般に, 統計量 $T_n := T_n(\boldsymbol{X})$ の密度関数 $f_{T_n}(t)$ が与えられれば同様にして T_n に基づく一般化情報量も定義でき, それを $I_{T_n}^{(\alpha)}(\cdot,\cdot)$ で表す.

3. 最尤推定量の漸近正規分布と事後分布

まず, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ を互いに独立にいずれも（Lebesgue 測度に関する）密度関数 $f(x,\theta)\,(\theta \in \Theta)$ に従う実確率変数列とする．ただし, Θ は $\mathbb{R}^1$ の開区間とする．ここで $f(x,\theta)$ に関する適当な正則条件を仮定すれば, θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は漸近正規性をもつ, すなわち $n \to \infty$ のとき $\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}_{ML} - \theta)$ の分布は標準正規分布 $N(0,1)$ に収束することが知られていて, これを $\mathscr{L}_\theta(\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}_{ML} - \theta)) \to N(0,1)\,(n \to \infty)$ で表す ([LC98], [A03]). ただし, $I(\theta) := E_\theta[\{(\partial/\partial\theta) \log f(\boldsymbol{X},\theta)\}^2]$（Fisher 情報量）とする．いま, $\theta_0 \in \Theta$ を特定の母数値として $Z := \sqrt{nI(\theta_0)}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0)$, $\xi := \sqrt{nI(\theta_0)}(\theta - \theta_0)$ とおき, $\xi = O(1)\,(n \to \infty)$ と仮定すると $I(\theta)/I(\theta_0) = 1 + O(1/\sqrt{n})$ となるから, 任意の $\theta \in \Theta$ について

$$\mathscr{L}_\theta(\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}_{ML} - \theta)) = \mathscr{L}_\theta(Z - \xi) \to N(0,1) \quad (n \to \infty)$$

になる．ここで, ξ を与えたときの Z の漸近条件付密度は

$$f_{Z|\xi}(z|\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\xi)^2} := \phi(z - \xi)$$

になるから, ξ の事前密度を $\pi_0(\cdot)$ とすれば Z の漸近周辺密度は

$$f_Z^{\pi}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z|\xi}(z|\xi)\pi_0(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z-\xi)\pi_0(\xi)d\xi$$

となるから, $Z=z$ を与えたときの ξ の漸近事後密度は

$$f_{\xi|Z}(\xi|z) = \frac{\phi(z-\xi)\pi_0(\xi)}{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(z-\xi)\pi_0(\xi)d\xi}$$

となる.

上記の設定について, たとえば $f(x,\theta)$ を平均 $\theta(>0)$ をもつ指数分布 $Exp(\theta)$ の密度, すなわち $f(x,\theta)=\theta^{-1}e^{-x/\theta}$ $(x>0)$; $=0$ $(x \le 0)$ とすれば, $I(\theta)=1/\theta^2$ となる. また θ の最尤推定量は $\bar{X}=(1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ となるから,

$$\mathscr{L}_\theta(\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)/\theta) \to N(0,1) \quad (n\to\infty)$$

となり, $\theta_0=1$ とすると $Z=\sqrt{n}(\bar{X}-1)$, $\xi=\sqrt{n}(\theta-1)$ となり

$$\mathscr{L}_\theta(\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)/\theta) = \mathscr{L}_\theta(Z-\xi) \to N(0,1) \quad (n\to\infty)$$

になる. 次節において, この漸近事後密度 $f_{\xi|Z}$ と事前密度 π_0 の漸近的差異を一般化情報量 (2.2) を尺度として測ってみよう.

4. 事前分布と最尤推定値を与えたときの漸近事後分布の漸近的差異

まず, (2.2) より $f_{\xi|Z}$ と π_0 について

$$\begin{aligned} I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z),\pi_0(\cdot)) &:= -8\log\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\phi(z-\xi)\pi_0(\xi)}{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(z-\xi)\pi_0(\xi)d\xi}\cdot\pi_0(\xi)\right\}^{1/2}d\xi \\ &= -8\log\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\phi^{1/2}(z-\xi)\pi_0(\xi)d\xi}{\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(z-\xi)\pi_0(\xi)d\xi\right\}^{1/2}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

となる. これから具体的に事前密度 π_0 を与えて, (4.1) より $I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z),\pi_0)$ の値を計算してみよう.

(i) 正規事前分布 $N(0,1)$ の場合, すなわち事前密度 π_0 として $\pi_1(\xi):=(1/\sqrt{2\pi})e^{-\xi^2/2}$

の場合を考える．このとき

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{1/2}(z-\xi)\pi_1(\xi)d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/2} e^{-(z-\xi)^2/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} d\xi \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/2} e^{-z^2/6} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} e^{-\xi^2/2} d\xi \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-z^2/6},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z-\xi)\pi_1(\xi)d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-\xi)^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\xi-\frac{z}{2}\right)^2} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2/4}
\end{aligned}
$$

となるから, (4.1) より

$$
\begin{aligned}
I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z), \pi_1(\cdot)) &= -8\log \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-z^2/6}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-z^2/8}} = -8\log\left(2^{1/4}\sqrt{\frac{2}{3}} e^{-z^2/24}\right) \\
&= \frac{z^2}{3} - 6\log 2 + 4\log 3 \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

になる．

(ii) 一様事前分布 $U(-1/(2c), 1/(2c))$ の場合, すなわち事前密度 π_0 として $\pi_{2,c}(\xi) = c\,(|\xi| < 1/(2c));\ = 0\,$(その他) の場合を考える．このとき,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{1/2}(z-\xi)\pi_{2,c}(\xi)d\xi &= \int_{-\frac{1}{2c}}^{\frac{1}{2c}} c\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/2} e^{-(z-\xi)^2/4} d\xi \\
&= \sqrt{2}c(\sqrt{2\pi})^{1/2} \int_{-\frac{1}{2c}}^{\frac{1}{2c}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(z-\xi)^2/4} d\xi \\
&= \sqrt{2}c(\sqrt{2\pi})^{1/2} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z-\frac{1}{2c}\right)}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z+\frac{1}{2c}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\
&= \sqrt{2}c(\sqrt{2\pi})^{1/2} \\
&\qquad \cdot \left\{\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z+\frac{1}{2c}\right)\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z-\frac{1}{2c}\right)\right)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{Z,c}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z-\xi)\pi_{2,c}(\xi)d\xi = \int_{-\frac{1}{2c}}^{\frac{1}{2c}} c\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(z-\xi)^2/2}d\xi \\
&= c\int_{z-\frac{1}{2c}}^{z+\frac{1}{2c}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt \\
&= c\left\{\Phi\left(z+\frac{1}{2c}\right) - \Phi\left(z-\frac{1}{2c}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

となるから, (4.1) より

$$
\begin{aligned}
I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z), \pi_{2,c}(\cdot)) &= -8\log\left[\sqrt{2c}(2\pi)^{1/4}\frac{\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4c}\right)-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4c}\right)}{\left\{\Phi\left(z+\frac{1}{2c}\right)-\Phi\left(z-\frac{1}{2c}\right)\right\}^{1/2}}\right] \\
&= -6\log 2 - 4\log c - 2\log\pi \\
&\quad - 8\log\left\{\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4c}\right)-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4c}\right)\right\} \\
&\quad + 4\log\left\{\Phi\left(z+\frac{1}{2c}\right)-\Phi\left(z-\frac{1}{2c}\right)\right\} \\
&=: p_z(c) \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

になる. ここで, $p_z(c)$ において $z \in \mathbb{R}^1$ を任意に固定し, $c \to \infty$ とすると $p_z(c) \to 0$ となり, $p'_z(c) \to 0$ になる. よって, $c \to \infty$ のとき $f_{\xi|Z}(\cdot|z)$ と $\pi_{2,c}(\cdot)$ の間の一般化情報量は 0 に収束するので, c が大きければその事後分布と事前分布は近づく, すなわち一様事前分布が一般 (improper) 一様事前分布に近づけば, それと事後分布の間の一般化情報量の近似差異は無くなる. また, (4.3) において $z=0$ とすると

$$
\begin{aligned}
I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|0), \pi_{2,c}(\cdot)) &= -6\log 2 - 4\log c - 2\log\pi - 8\log\left\{2\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{4c}\right)-1\right\} \\
&\quad + 4\log\left\{2\Phi\left(\frac{1}{2c}\right)-1\right\} \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

になる. また, $c=\sqrt{3}/6$ のとき一様分布 $U(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ の分散が 1 になり, (4.3) より

$$
\begin{aligned}
I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z), \pi_{2,\sqrt{3}/6}(\cdot)) &= -2\log 2 + 2\log 3 - 2\log\pi \\
&\quad - 8\log\left\{\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right\} \\
&\quad + 4\log\left\{\Phi\left(z+\sqrt{3}\right)-\Phi\left(z-\sqrt{3}\right)\right\} \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

になる.

(iii) 両側指数事前分布 T-Exp$(0, 1/\sqrt{2})$ の場合, すなわち事前密度 π_0 として $\pi_3(\xi) = (1/\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}|\xi|}$ $(\xi \in \mathbb{R}^1)$ の場合を考える. この分布の分散が 1 であることに注意. このとき

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{1/2}(z-\xi)\pi_3(\xi)d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/2} e^{-\sqrt{2}|\xi|-((z-\xi)^2/4)}d\xi \\ &= (2\pi)^{1/4}e^2 \\ &\quad \cdot \left\{e^{-\sqrt{2}z}\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-2\right) + e^{\sqrt{2}z}\left(1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+2\right)\right)\right\},\end{aligned}$$

$$f_Z(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z-\xi)\pi_3(\xi)d\xi = \frac{e}{\sqrt{2}}\left\{e^{-\sqrt{2}z}\Phi\left(z-\sqrt{2}\right) + e^{\sqrt{2}z}\left(1-\Phi\left(z+\sqrt{2}\right)\right)\right\}$$

となるから, (4.1) より

$$\begin{aligned}&I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z), \pi_3(\cdot)) \\ &= -8\log\left[\sqrt{2}\pi^{1/4}e^{3/2}\frac{e^{-\sqrt{2}z}\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-2\right)+e^{\sqrt{2}z}\left(1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+2\right)\right)}{\left\{e^{-\sqrt{2}z}\Phi\left(z-\sqrt{2}\right)+e^{\sqrt{2}z}\left(1-\Phi\left(z+\sqrt{2}\right)\right)\right\}^{1/2}}\right] \\ &= -4\log 2 - 2\log\pi - 12 \\ &\quad - 8\log\left\{e^{-\sqrt{2}z}\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-2\right)+e^{\sqrt{2}z}\left(1-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+2\right)\right)\right\} \\ &\quad + 4\log\left\{e^{-\sqrt{2}z}\Phi\left(z-\sqrt{2}\right)+e^{\sqrt{2}z}\left(1-\Phi\left(z+\sqrt{2}\right)\right)\right\} \qquad (4.6)\end{aligned}$$

になる.

(iv) 指数事前分布 Exp$(1; -1)$ の場合, すなわち事前密度 π_0 として $\pi_4(\xi) = e^{-(\xi+1)}$ $(\xi > -1)$; $= 0$ $(\xi \leq -1)$ の場合を考える. この分布は平均 0, 分散 1 をもつことに注意. このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{1/2}(z-\xi)\pi_4(\xi)d\xi = 2^{3/4}\pi^{1/4}e^{-z}\Phi\left(\frac{z-1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$f_Z(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z-\xi)\pi_4(\xi)d\xi = e^{-(1/2)-z}\Phi(z)$$

となるから, (4.1) より

$$I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z),\pi_4(\cdot)) = -8\log\left[2^{3/4}\pi^{1/4}e^{\frac{1}{4}-\frac{z}{2}}\frac{\Phi\left(\frac{z-1}{\sqrt{2}}\right)}{\{\Phi(z)\}^{1/2}}\right]$$
$$= -6\log 2 - 2\log\pi - 2 + 4z - 8\log\Phi\left(\frac{z-1}{\sqrt{2}}\right) + 4\log\Phi(z) \tag{4.7}$$

になる.

ここで, 以上の結果を (4.2), (4.5), (4.6), (4.7) よりまとめ, また各一般化情報量の期待値を求めると表 1 のようになる. なお, $I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z),\pi_i)(i=1,2,3)$ は z の偶関数であり, またここでの各事前分布は平均 0, 分散 1 であることに注意.

5. 一般化情報量による比較

第 4 節の表 1 で与えられた一般化情報量 $I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z),\pi_i)$ $(i=1,2,3,4)$ をグラフによって比較すると図 1, 2 のようになり, $|z|<2$ においては $I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z),\pi_i)$ $(i=1,2,4)$ は 2 以下になるので, 最尤推定値を与えたときの漸近事後分布はいずれの事前分布にも漸近的に比較的近いことが分かる. 一方, 表 1 より一般化情報量の期待値の観点からも, いずれの事後分布も平均的に事前分布に近いことが分かる.

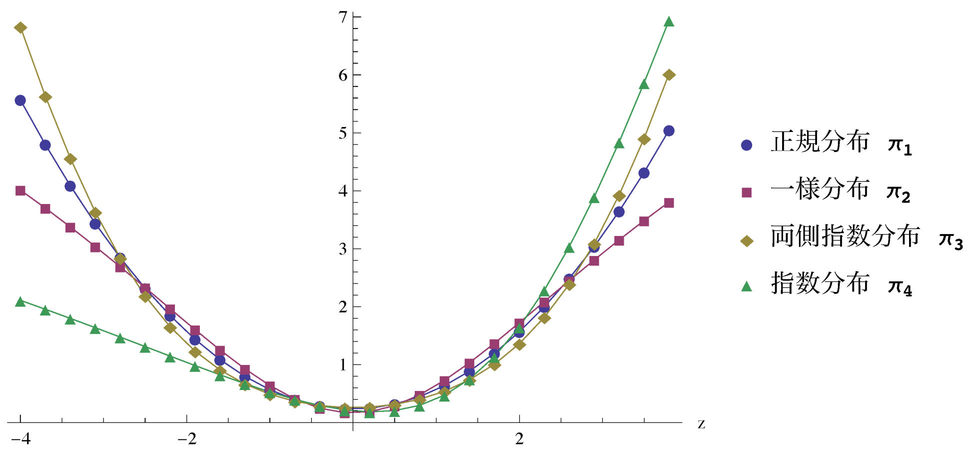

図 1 事前分布と最尤推定値を与えたときの漸近事後分布の間の一般化情報量 $I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z),\pi_i)$ $(i=1,2,3,4)$

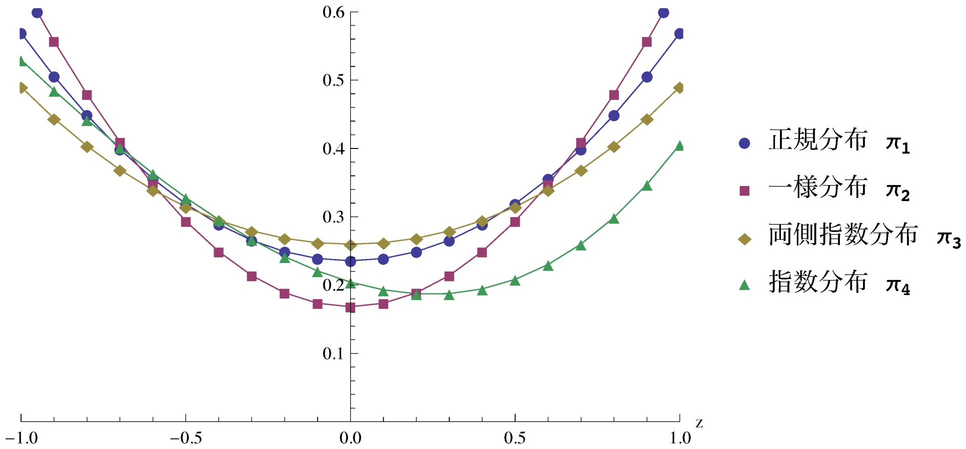

図 2 事前分布と最尤推定値を与えたときの漸近事後分布の間の一般化情報量 $I^{(0)}(f_{\xi|Z}(\cdot|z), \pi_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

6. おわりに

本稿において，いくつかの事前分布について，各々の最尤推定値を与えたときの漸近事後分布の差異を一般化情報量を用いて調べた．特に，事前分布として正規分布 $N(0, 1)$，一様分布 $U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$，両側指数分布 T-Exp$(0, 1/\sqrt{2})$，指数分布 Exp$(1; -1)$ を取り上げて，それぞれと最尤推定値を与えたときの漸近事後分布の間の一般化情報量を計算したが，解析的に比較するのは容易ではない（表 1 参照）．そこで，一般化情報量を数値的に比較をしグラフで表し，また各一般化情報量の期待値も求めた．事前分布が平均 0，分散 1 をもつ上記の分布の場合には，漸近事後分布は事前分布に漸近的に比較的近いことが分かった．特に一様事前分布が一般一様事前分布に近づけば，それと事後分布の近似差は無くなることも分かった．本稿では正則な場合に漸近的に有効な最尤推定量を用いたが，非正則な場合にも範囲の中央 (mid-range) や最良位置共変推定量を与えたときの事後分布と事前分布の差異を調べることも興味深いと思われる．

表 1　事前分布と最尤推定値を与えたときの漸近事後分布の間の一般化情報量とその期待値 *

事前密度 π_i	$I^{(0)}(f_{\xi\|Z}(\cdot\|z), \pi_i)$, $E[I^{(0)}(f_{\xi\|Z}(\cdot\|Z), \pi_i)]$
正規分布 $N(0,1)$ の密度 π_1	$-6\log 2 + 4\log 3 + \frac{z^2}{3}$, 0.9022
一様分布 $U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ の密度 $\pi_2 = \pi_{2,\sqrt{3}/6}$	$-2\log 2 + 2\log 3 - 2\log\pi$ $-8\log\left\{\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right\}$ $+4\log\left\{\Phi\left(z+\sqrt{3}\right) - \Phi\left(z-\sqrt{3}\right)\right\}$, 0.9219
両側指数分布 T-Exp$(0, 1/\sqrt{2})$ の密度 π_3	$-4\log 2 - 2\log\pi - 12$ $-8\log\left\{e^{-\sqrt{2}z}\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - 2\right) + e^{\sqrt{2}z}\left(1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + 2\right)\right)\right\}$ $+4\log\left\{e^{-\sqrt{2}z}\Phi\left(z - \sqrt{2}\right) + e^{\sqrt{2}z}\left(1 - \Phi\left(z + \sqrt{2}\right)\right)\right\}$, 0.8751
指数分布 Exp$(1; -1)$ の密度 π_4	$-6\log 2 - 2\log\pi - 2 + 4z - 8\log\Phi\left(\frac{z-1}{\sqrt{2}}\right) + 4\log\Phi(z)$, 0.8456

参考文献

[A96] Akahira, M. (1996). Loss of information of a statistic for a family of non-regular distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **48** (2), 349–364.

[A03] 赤平昌文 (2003). 統計解析入門. 森北出版.

[AT91] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1991). A definition of information amount applicable to non-regular cases. *Journal of Computing and Information,* **2,** 71–

* 期待値の数値計算は橋本真太郎氏 (筑波大), 河合伸一氏 (防災研) による.

92. Also included In (2003) *Joint Statistical Papers of Akahira and Takeuchi* (pp. 455–476). New Jersey: World Scientific.

[B79] Bernardo, J. M. (1979). Reference posterior distributions for Bayesian inference (with discussion). *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B41, 113–147.

[GDS06] Ghosh, J. K., Delampady, M. and Samanta, T. (2006). *An Intruduction to Bayesian Analysis.* Springer, New York.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation* (2nd Ed.), Springer, New York.

[M55] Matusita, K. (1955). Decision rules based on the distance for problems of fit, two samples and estimation. *Ann. Math. Statist.*, **26,** 631–640.