数理解析研究所講究録
第 1912 巻 2014 年 65-70

ファジィ集合の非凸度について

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要

本稿では、ファジィ集合の凸性を合接的集計関数を用いて一般化し、その一般化された凸性の応用としてファジィ集合の非凸度を考える。そして、ファジィ集合の演算に関して、ファジィ集合の一般化された凸性およびファジィ集合の非凸度の性質を調べる。

1. はじめに

ファジィ集合の概念は不確実性または曖昧性を含む集合を表現するために Zadeh [7] によって最初に導入され、ファジィ集合論として経済学や最適化理論などの様々な意思決定論に広く応用されている。$\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合を考え、$\mathbb{R}^n$ 上の各ファジィ集合をそのメンバーシップ関数と同一視する。ファジィ集合の凸性はそのメンバーシップ関数の準凹性によって定義される。関数の準凹性は min 演算によって定義される。経済学や最適化理論などにおける重要性が認識され、関数の準凹性の一般化がいくつか提案され調べられてきた ([6] 参照)。[3] において、メンバーシップ関数の準凹性が min 演算の代わりに任意の合接的集計関数を用いることによって一般化された。[5] において、その一般化された準凹性の応用として、メンバーシップ関数の非準凹度が提案された。ファジィ集合の凸性はそのメンバーシップ関数の準凹性によって定義されるので、メンバーシップ関数の一般化された準凹性はファジィ集合の一般化された凸性とみなすことができ、メンバーシップ関数の非準凹度はファジィ集合の非凸度とみなすことができる。

本稿では、ファジィ集合の演算に関して、ファジィ集合の一般化された凸性およびファジィ集合の非凸度の性質を調べる。

2 節において、連続合接的集計関数の性質を与える。3 節において、ファジィ集合に関する準備を行う。4 節において、演算に関して、ファジィ集合の一般化された凸性の性質とファジィ集合の非凸度の性質を与える。最後に、5 節において、結論を述べる。

2. 集計関数

本節では、連続合接的集計関数の性質を調べる。合接的集計関数は、ファジィ集合の凸性を一般化するために用いられる。集計関数に関して、詳しくは [1,6] 参照。

$a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して、$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ とする。

本研究は弘前大学理工学研究科研究支援事業の助成を受けたものである。

まず、集計関数の定義を与える。

定義 1 ([1]) $G:[0,1]^2 \to [0,1]$ とする。G が**集計関数**であるとは、次の性質をみたすときをいう。

(G1)（単調性）各 $x_i, y_i \in [0,1], i=1,2$ に対して、$x_i \leq y_i, i=1,2$ ならば $G(x_1,x_2) \leq G(y_1,y_2)$ となる。

(G2)（境界条件）$G(0,0)=0, G(1,1)=1$

次に、集計関数の性質に関する定義を与える。

定義 2 ([1]) $G:[0,1]^2 \to [0,1]$ を集計関数とする。G が**合接的**であるとは、任意の $x,y \in [0,1]$ に対して $G(x,y) \leq \min\{x,y\}$ となるときをいう。

次に、2 つの集計関数の間の関係に関する定義を与える。

定義 3 ([4]) $G, G':[0,1]^2 \to [0,1]$ を集計関数とする。G が G' を**優越する**（$G \gg G'$）とは、任意の $x_i, y_i \in [0,1], i=1,2$ に対して $G(G'(x_1,y_1), G'(x_2,y_2)) \geq G'(G(x_1, x_2), G(y_1, y_2))$ となるときをいう。

4 節においてファジィ集合の非凸度を測るために、各 $p \in [1,\infty[$ に対して

$$G^{(p)}(x,y) = [\min\{x,y\}]^p \quad \text{for } x,y \in [0,1] \tag{1}$$

と定義される連続合接的集計関数 $G^{(p)}:[0,1]^2 \to [0,1], p \in [1,\infty[$ を考える。p が大きくなればなるほど $G^{(p)}$ と $\min = G^{(1)}$ の違いが大きくなる。

次の命題は、$\min = G^{(1)}$ と $G^{(p)}, p \in [1,\infty[$ の間の関係を示している。ここで、$G^{(p)}, p \in [1,\infty[$ は (1) において定義された連続合接的集計関数である。

命題 1 任意の $p \in [1,\infty[$ に対して、$\min = G^{(1)} \gg G^{(p)}$ となる。

3. ファジィ集合に関する準備

本節では、ファジィ集合に関する準備を行う。

$\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合を考える。$\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合 $\widetilde{a}$ とそのメンバーシップ関数を同一視し、そのメンバーシップ関数も $\widetilde{a}:\mathbb{R}^n \to [0,1]$ と表す。$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべてのファジィ集合の集合とする。

$S \subset \mathbb{R}^n$ をクリスプ集合とする。各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$c_S(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in S \\ 0 & \text{if } \boldsymbol{x} \notin S \end{cases}$$

と定義される関数 $c_S:\mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ を S の定義関数という。c_S をファジィ集合とみなすときは、$c_S:\mathbb{R}^n \to [0,1]$ と解釈する。

$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が凸であるとは、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\lambda \in]0,1[$ に対して $\widetilde{a}(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \geq \min\{\widetilde{a}(\boldsymbol{x}), \widetilde{a}(\boldsymbol{y})\}$ となるときをいう。すなわち、$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が凸であるとは、$\widetilde{a}$ が準凹関数であるときをいう。

Zadeh の拡張原理による $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ 上の加法とスカラー倍の定義を与える。Zadeh の拡張原理については、[2] 参照。

定義 4 $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とし、$\lambda \in \mathbb{R}$ とする。このとき、$\widetilde{a} + \widetilde{b}, \lambda\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対してそれぞれ

$$(\widetilde{a} + \widetilde{b})(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}} \min\left\{\widetilde{a}(\boldsymbol{y}), \widetilde{b}(\boldsymbol{z})\right\}, \quad (\lambda\widetilde{a})(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y}} \widetilde{a}(\boldsymbol{y})$$

と定義する。

4. 一般化された凸性と非凸度

本節では、ファジィ集合の演算に関して、ファジィ集合の一般化された凸性およびファジィ集合の非凸度の性質を調べる。

次の定義は、min 演算の代わりに任意の合接的集計関数を用いたファジィ集合の凸性の一般化であり、[3] においてメンバーシップ関数の一般化された準凹性として最初に提案された。ここでは、メンバーシップ関数の一般化された準凹性をファジィ集合の一般化された凸性とみなす。

定義 5 ([3]) $G : [0,1]^2 \to [0,1]$ を合接的集計関数とし、$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とする。$\widetilde{a}$ が ***G*-凸**であるとは、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\lambda \in]0,1[$ に対して

$$\widetilde{a}(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \geq G(\widetilde{a}(\boldsymbol{x}), \widetilde{a}(\boldsymbol{y}))$$

となるときをいう。

合接的集計関数 $G : [0,1]^2 \to [0,1]$ と $\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して、定義 5 より、$\widetilde{a}$ が凸ならば $\widetilde{a}$ は G-凸になる。

次の命題は、演算に関するファジィ集合の G-凸性の性質を示している。

命題 2 $G : [0,1]^2 \to [0,1]$ を連続合接的集計関数とし、$\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とし、$\lambda \in \mathbb{R}$ とする。

(i) $\min = G^{(1)} \gg G$ とする。$\widetilde{a}$ と $\widetilde{b}$ が G-凸ならば、$\widetilde{a} + \widetilde{b}$ も G-凸になる。

(ii) $\widetilde{a}$ が G-凸ならば、$\lambda\widetilde{a}$ も G-凸になる。$\lambda \neq 0$ のとき、$\lambda\widetilde{a}$ が G-凸ならば、$\widetilde{a}$ も G-凸になる。

$G : [0,1]^2 \to [0,1]$ を合接的集計関数とし、$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ は G-凸であるとする。このとき、G と $\min = G^{(1)}$ の間の違いが大きければ大きいほど $\widetilde{a}$ の許容される非凸性が大きくなる。

ここで、ファジィ集合の非凸度の定義を与える。ファジィ集合の非凸度は、[5] においてメンバーシップ関数の非準凹度として最初に提案された。ここでは、メンバーシップ関数の非準凹度をファジィ集合の非凸度とみなす。

定義 6 ([5]) $\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$D(\widetilde{a}) = \min\{p \in [1,\infty[: \widetilde{a} \text{ は } G^{(p)}\text{-凸} \} \tag{2}$$

を $\widetilde{a}$ の**非凸度**とよぶ。ここで、$\emptyset \subset [1,\infty[$ に対して $\min\emptyset = \infty$ とし、$G^{(p)}, p \in [1,\infty[$ は (1) において定義された連続合接的集計関数である。

(2) において、$\{p \in [1,\infty[: \widetilde{a} \text{ は } G^{(p)}\text{-凸} \} \neq \emptyset$ ならば、その最小値が存在する（[5] 参照）。(2) において定義された $\widetilde{a}$ の非凸度は次のような意味をもつ。$D(\widetilde{a}) = 1$ のとき、$\widetilde{a}$ は凸である。$D(\widetilde{a})$ が大きければ大きいほど、$\widetilde{a}$ の非凸性は大きくなる。

次の命題は、ファジィ集合の非凸度の性質を示している。

命題 3 ([5]) $\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とする。

(i) $\widetilde{a}$ が凸であるための必要十分条件は、$D(\widetilde{a}) = 1$ となることである。

(ii) 任意の $p \in [1, D(\widetilde{a})[$ に対して、$\widetilde{a}$ は $G^{(p)}$-凸にならない。

(iii) 任意の $p \in [D(\widetilde{a}), \infty[$ に対して、$\widetilde{a}$ は $G^{(p)}$-凸になる。

次は、ファジィ集合の非凸度の例である。

例 1 ([5]) 各 $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ に対して、$\widetilde{a}_\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を

$$\widetilde{a}_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in]-\infty, 0] \cup [6, \infty[\\ \frac{1}{2}x & \text{if } x \in [0,1] \\ \alpha \sin 4x\pi + \frac{1}{2} & \text{if } x \in [1,2] \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{if } x \in [2,3] \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & \text{if } x \in [3,4] \\ \alpha \sin 4x\pi + \frac{1}{2} & \text{if } x \in [4,5] \\ -\frac{1}{2}x + 3 & \text{if } x \in [5,6] \end{cases}$$

と定義する（図 1）。このとき、$D(\widetilde{a}_\alpha) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\log\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}$ となる（図 2）。

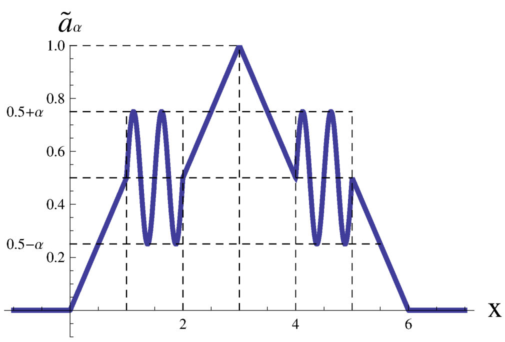

図 1　$\widetilde{a}_\alpha(x)$ $(\alpha = 0.25)$

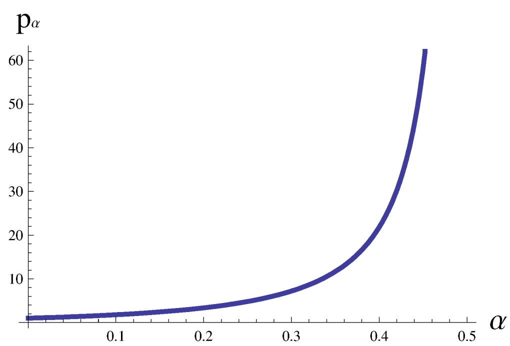

図 2　$p_\alpha = \frac{\log\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\log\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$

次の命題は、演算に関するファジィ集合の非凸度の性質を示している。

命題 4 $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とし、$\lambda \in \mathbb{R}$ とする。

(i) $D(\widetilde{a}+\widetilde{b}) \leq \max\{D(\widetilde{a}), D(\widetilde{b})\}$

(ii) $D(\lambda\widetilde{a}) \leq D(\widetilde{a})$ となる。$\lambda \neq 0$ のとき、$D(\lambda\widetilde{a}) = D(\widetilde{a})$ となる。

次は、演算に関するファジィ集合の非凸度の性質を表す例である。

例 2 例 1 において定義された、$\widetilde{a}_\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ を考える。$p_\alpha = \frac{\log\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\log\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}$ とする。このとき、$p_\alpha > 1$ となり、$D(\widetilde{a}_\alpha) = p_\alpha$ である。$\widetilde{\mathbb{R}} = c_{\mathbb{R}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ とし、$\widetilde{0} = c_{\{0\}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ とする。

(i) $\widetilde{a} = \widetilde{a}_\alpha$ とし、$\widetilde{b} = \widetilde{\mathbb{R}}$ とする。このとき、$\widetilde{a}+\widetilde{b} = \widetilde{\mathbb{R}}$, $D(\widetilde{a}) = p_\alpha$, $D(\widetilde{b}) = 1$ であるので

$$D(\widetilde{a}+\widetilde{b}) = 1 < p_\alpha = \max\{D(\widetilde{a}), D(\widetilde{b})\}$$

となる。

(ii) $\widetilde{a} = \widetilde{a}_\alpha$ とし、$\widetilde{b} = \widetilde{0}$ とする。$\widetilde{a}+\widetilde{b} = \widetilde{a}$, このとき、$D(\widetilde{a}) = p_\alpha$, $D(\widetilde{b}) = 1$ であるので

$$D(\widetilde{a}+\widetilde{b}) = p_\alpha = \max\{D(\widetilde{a}), D(\widetilde{b})\}$$

となる。

(iii) $\widetilde{a} = \widetilde{a}_\alpha$ とし、$\lambda = 0$ とする。このとき、$\lambda\widetilde{a} = \widetilde{0}$, $D(\widetilde{a}) = p_\alpha$, $D(\lambda\widetilde{a}) = 1$ であるので

$$D(\lambda\widetilde{a}) = 1 < p_\alpha = D(\widetilde{a})$$

となる。

5. 結論

ファジィ集合の G-凸性を考えた。ファジィ集合の G-凸性は、min 演算の代わりに任意の合接的集計関数を用いたファジィ集合の凸性の一般化である。そして、演算に関するファジィ集合の G-凸性の性質を調べた。ファジィ集合の G-凸性の応用として、ファジィ集合の非凸度を考えた。そして、演算に関するファジィ集合の非凸度の性質を調べた。

参考文献

[1] G. Beliakov, A. Pradera and T. Calvo, *Aggregation functions: a guide for practitioners*, Springer-Verlag, 2007.

[2] D. Dubois, W. Ostasiewicz and H. Prade, *Fuzzy sets: history and basic notions*, in *Fundamentals of Fuzzy Sets* (D. Dubois and H. Prade, Eds.) (Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000), pp.21–124.

[3] M. Kon and H. Kuwano, *Concepts of generalized concavity based on aggregation functions*, Fuzzy Sets and Systems, **198** (2012), 112–127.

[4] S. Saminger, R. Mesiar and U. Bodenhofer, *Domination of aggregation operators and preservation of transitivity*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, **10** (2002), 11–35.

[5] A. Sato and M. Kon, *Degree of non-quasiconcavity of membership functions*, Submitted to *Proceedings of the Third Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization* (W. Takahashi, S. Akashi and T. Tanaka Eds.) (Yokohama Publishers, Japan).

[6] J. Ramík and M. Vlach, *Generalized concavity in fuzzy optimization and decision analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[7] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control, **8** (1965), 338–353.