数理解析研究所講究録
第 1912 巻 2014 年 71-79

メンバシップ関数設定の柔軟性を考慮したファジィ数理計画問題
Fuzzy mathematical programming problem with flexibility of membership functions

大阪大学大学院・情報科学研究科　蓮池隆
Takashi Hasuike
Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University
広島大学大学院・工学研究院　片桐英樹
Hideki Katagiri
Graduate School of Engineering, Hiroshima University
統計数理研究所・データ科学研究系　椿広計
Hiroe Tsubaki
Department of Data Science, The Institute of Statistical Mathematics

1. はじめに

実社会の様々な意思決定問題に対し，数理計画問題を利用して最適な意思決定を行う場合，パラメータ値を固定すれば，多様な数理計画法を用いて最適解を求め，実社会の意思決定につなげることが可能となる．しかし，実社会には不確実性が多数存在し，これらを数理計画問題で表現するには，関連する係数を確率統計手法により確率分布を求め導入することが考えられる．さらに，言語や画像情報などの非数値情報の解釈や人間心理の影響に由来する不確定性を考慮する場合，確率統計手法の適用が必ずしも適切であるとは限らず，ファジィ理論などの適用により，数理計画法の枠組みで意思決定支援を行うことが考えられる．

実際，ファジィ理論を用いたファジィ数を係数に導入したファジィ数理計画問題に関しては，相当数の理論・応用研究が存在し，その有用性については，それぞれの論文において，特に固定値の場合や確率分布を用いた場合等と比較して議論がされている．しかし確率分布のように，統計的手法のような客観的かつ理論的な分布の構築法とは異なり，メンバシップ関数を主観的に設定し，その関数を基に最適解を求め，他手法との比較・検証を行っているものが多いことも事実である．しかし，意思決定の場面において，このような主観的手法と他の客観的手法との比較を議論しても，メンバシップ関数設定の妥当性を保証していないで行っているため，「やってみればこうなった」という，実際の意思決定現場への適用をあまり意識しない，つまり信頼性を有しない議論展開をすることになってしまう．意思決定問題においては，係数の妥当な事前設定が出力となる最適解の信頼性を担保し，ダイレクトに意思決定の信頼性へとつながることに注視しなければならない．

主観性をメンバシップ関数により構築できる点は，ファジィ理論の特徴であり，また制

御理論のように出力結果をフィードバックし，メンバシップ関数を調整することで状況を適切に表現したメンバシップ関数を得ることができるかもしれない．しかし，意思決定の場面はその一時限りの場合も多く，また出力結果からのフィードバックをすぐに得られない場合も多い．以上のことから，本論文では，数理計画問題における妥当なメンバシップ関数構築法は非常に重要な研究テーマであり，これまでにも様々なメンバシップ関数構築法・同定法に関する研究が多くなされている[1, 4-6, 8-10, 12, 14-16]．にもかかわらず，メンバシップ関数の妥当な構築法は，意思決定分野を含めたほとんど全ての適用分野において未解決である．やはり，ファジィ理論の特徴である主観が大きく寄与していることが原因の 1 つとして挙げられる．しかし，意思決定者の主観であったとしても，ある事象が所属する，所属しない，つまりメンバシップ値が 1 と 0 の領域に関しては，意思決定者も自信を持ってその根拠を説明できることが多いため，主観が入っていても一定以上の客観性が存在すると考えられる．一方で，所属か非所属か判然としない，つまりメンバシップ値が 1/2 の状況が最も自信のない状況であり，この部分にはかなりの曖昧さが残っている．以上の議論からも，メンバシップ関数は 1 つの関数ではなく，メンバシップ値に依存した，ある程度幅を持った関数であると考えることが自然である．

このメンバシップ値が幅を持っているメンバシップ関数として，Type-2 fuzzy 数が近年ファジィ理論で盛んに研究され始め，数理計画問題に応用した研究もいくつか存在する[3, 7, 11]．しかしこれらの研究において，メンバシップ関数設定の妥当性は議論されていない．そこで本研究では，Type-2 fuzzy 数の中でも特に，上記の妥当なメンバシップ関数設定を考慮して，メンバシップ値を区間値で表現した Interval type-2 fuzzy 数を数理計画問題に導入する．その範囲内に入るどのメンバシップ関数になったとしても，共通の意思決定を行っているだけで良好な結果を出せば，メンバシップ関数設定の柔軟性を有しながら，妥当な意思決定が可能である．そこで，本研究では，Interval type-2 fuzzy 数での最小値と最大値に注目し，それらを新たな区間値ととらえ，区間値計画法をベースとした意思決定手法を提案する．

2. ファジィ数理計画問題とメンバシップ関数設定

確率理論のみならずファジィ理論をベースとした数理計画問題とその実社会問題への適用に関しては，様々な形で研究がなされている．本研究では以下で表わされる最も基本的な線形計画問題を取り扱う．

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{subject to } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \\
&\qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

目的関数の係数c_jや制約条件の係数a_{ij}やb_iが確率変数，もしくはファジィ数といった不確実・不確定状況を考えなければいけないことは，前章からも明らかであり，これらの状況下での適切な意思決定を行う必要がある．最適性基準として，確率変数・ファジィ数両方において，平均値や分散，目標値を設定した確率機会制約や可能性・必然性測度など，様々な最適化・意思決定が行われる．本研究では，以下の Carlsson and Fullér[2]により提案された possibilistic mean value の下での最適化に焦点を当てる．

$$E(\tilde{a}) = \int_0^1 \gamma\left(a_L(\gamma) + a_U(\gamma)\right) d\gamma \tag{2}$$

ここで$\tilde{a}$はファジィ数であり，そのγカット集合を$[\tilde{a}]^\gamma = [a_L(\gamma), a_U(\gamma)]$として設定する．

この possibilistic mean value は確率変数における期待値の自然な拡張となっており，既存のファジィ数理計画問題でも広く一般的に利用されている．よって本研究では，以下の数理計画問題の最適解を得ることを目的とする．

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } E\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j\right) \\ &\text{subject to } E\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j\right) \geq b_i,\ i = 1,2,\ldots,m \\ &\qquad x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{3}$$

メンバシップ関数に関しては，前章の議論より，

・ある事象が所属する，所属しない，つまりメンバシップ値が 1 と 0 の領域に関しては，意思決定者も自信を持ってその根拠を説明できることが多い

・その他の部分に関しては，メンバシップ値に曖昧さが生じるが，核となる関数は存在し，そこからの曖昧さに起因する幅を考える

ことを考慮して，核となるメンバシップ関数は以下の台形型メンバシップ関数を設定する．

$$\tilde{c}_j = \left(c_j^L, c_j^R, \alpha_j, \beta_j\right) = \begin{cases} \dfrac{\omega - \left(c_j^L - \alpha_j\right)}{\alpha_j} & \left(c_j^L - \alpha_j \leq \omega \leq c_j^L\right) \\ 1 & \left(c_j^L \leq \omega \leq c_j^U\right) \\ \dfrac{\left(c_j^L + \beta_j\right) - \omega}{\beta_j} & \left(c_j^U \leq \omega \leq c_j^U + \beta_j\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

上記は目的関数の係数がファジィ数$\tilde{c}_j$と設定した場合だが，本研究では同様に，制約条件

の係数 $\tilde{a}_{ij}$ に関しても台形型メンバシップ関数をもつファジィ数と設定する．目的関数 $\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j$ の possibilistic mean value は, Zadeh の拡張原理も利用して, 次のように得られる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j=\left(\sum_{j=1}^{n}c_j^L x_j,\sum_{j=1}^{n}c_j^R x_j,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j\right)\\
&E\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(c_j^L+c_j^R\right)x_j+\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j-\alpha_j\right)x_j
\end{aligned} \tag{5}$$

一方で，本研究でさらに考えるべきこととして，上記の核となる台形型メンバシップ関数における，メンバシップ値が 0 と 1 以外の部分に関する曖昧さがある．特にその曖昧さは前章の議論から，1/2 の時に最も大きくなるように設定すべきである．この曖昧さをメンバシップ関数がとりうる領域と考えることで，様々なメンバシップ関数を包含する関数を柔軟に設定することが可能となる．以上のことから，γ カット $\left[\tilde{c}_j\right]^{\gamma}$ における両端の値 $c_j^L(\gamma),c_j^U(\gamma)$ を中心とした区間幅 $\left[c_j^{L-}(\gamma),c_j^{L+}(\gamma)\right]$ および $\left[c_j^{U-}(\gamma),c_j^{U+}(\gamma)\right]$ を考慮した次のメンバシップ関数を導入する．

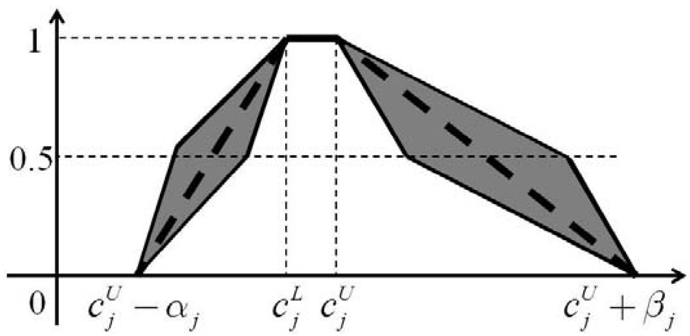

図 1　核となるメンバシップ関数からの幅を考慮したメンバシップ関数

図 1 のメンバシップ関数はメンバシップ値が曖昧である場合を表現できる Type-2 fuzzy 数のメンバシップ関数の 1 つと見ることができる．また特に，メンバシップ値が 1/2 の時の区間幅を，その時の区間幅を $\left[\hat{c}_j^{L-},\hat{c}_j^{L+}\right]$ および $\left[\hat{c}_j^{U-},\hat{c}_j^{U+}\right]$ と置くことで図 1 における各領域境界を線形式で書くことが可能となる．しかし区間幅を持つことで, (5)で計算された possibilistic mean value の値もまた区間値となってしまう．よって本研究では区間値計画法を導入するこ

とで，区間幅となっても妥当な解を導出できることを示す．

3．区間値計画法を利用した提案ファジィ数理計画問題の解法構築

図 1 により設定されたメンバシップ関数において，その possibilistic mean value の区間値は，図 2 と図 3 で表わすメンバシップ関数を用いて計算することで，それぞれ最小値と最大値を求めることができるため，困難ではない．

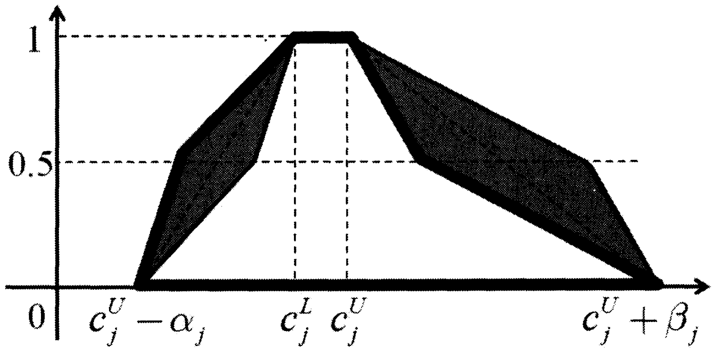

図 2　possibilistic mean value が最小となるメンバシップ関数

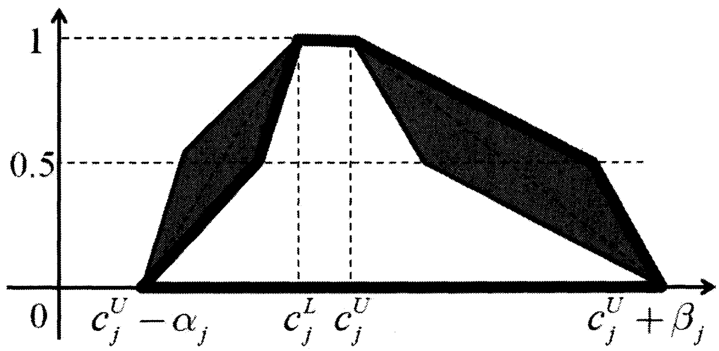

図 3　possibilistic mean value が最大となるメンバシップ関数

図 2 におけるメンバシップ関数を利用して，最小となる possibilistic mean value を求める．$E\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}E\left(\tilde{c}_j\right)x_j$ が成り立つため，$E\left(\tilde{c}_j\right)$ を計算すると次の結果が得られる．

$$
\begin{aligned}
E_{\min}\left(\tilde{c}_j\right) &= \int_0^{1/2} \gamma\left(\left(c_j^L-\alpha_j\right)+2\gamma\left(\hat{c}_j^{L-}-\left(c_j^L-\alpha_j\right)\right)\right)d\gamma \\
&+\int_{1/2}^{1} \gamma\left(\left(2\hat{c}_j^{L-}-c_j^L\right)+2\gamma\left(c_j^L-\hat{c}_j^{L-}\right)\right)d\gamma \\
&+\int_0^{1/2} \gamma\left(\left(c_j^U+\beta_j\right)-2\gamma\left(c_j^U+\beta_j-\hat{c}_j^{U-}\right)\right)d\gamma \\
&+\int_{1/2}^{1} \gamma\left(\left(2\hat{c}_j^{U-}-c_j^U\right)-2\gamma\left(\hat{c}_j^{U-}-c_j^U\right)\right)d\gamma \\
&=\frac{1}{4}\left(c_j^L+c_j^U+\hat{c}_j^{L-}+\hat{c}_j^{U-}\right)+\frac{1}{24}\left(\beta_j-\alpha_j\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

よって，$E_{\min}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{4}\left(c_j^L+c_j^U+\hat{c}_j^{L-}+\hat{c}_j^{U-}\right)+\frac{1}{24}\left(\beta_j-\alpha_j\right)\right\}x_j$ となる．同様にして，$E_{\max}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{4}\left(c_j^L+c_j^U+\hat{c}_j^{L+}+\hat{c}_j^{U+}\right)+\frac{1}{24}\left(\beta_j-\alpha_j\right)\right\}x_j$ となることから，この $E_{\min}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j\right)$ と $E_{\max}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j\right)$ を用いて目的関数は区間値で表現できる．さらに，制約条件 $E\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j\right)\geq b$ に対しても，$\tilde{a}_{ij}=\left(a_{ij}^L,a_{ij}^U,\delta_{ij},\xi_{ij}\right)$ に関するメンバシップ値 1/2 の区間幅を $\left[\hat{a}_{ij}^{L-},\hat{a}_{ij}^{L+}\right]$ および $\left[\hat{a}_{ij}^{U-},\hat{a}_{ij}^{U+}\right]$ と設定することで，同様の計算結果を得る．

一方で，数理計画問題の観点から，目的関数や制約条件内に区間値が含まれているままでは，直接数理計画法を適用することができない．そこで本研究では，Sengupta et al. [13] による Acceptability Index を利用した解法を構築する．2 つの区間値 $A=\left[a_L,a_R\right]$, $B=\left[b_L,b_R\right]$ において，Acceptability Index $AI\left(A\leq B\right)$ は次のように定義される．

$$
AI\left(A\leq B\right)=\frac{m\left(B\right)-m\left(A\right)}{w\left(B\right)+w\left(A\right)} \tag{7}
$$

ただし，$m\left(A\right)=\frac{1}{2}\left(a_L+a_R\right)$, $w\left(A\right)=\frac{1}{2}\left(a_R-a_L\right)$ である．この Acceptability Index に対し，Sengupta et al. [13]より以下の特性が示されている．

特性 1

$$AI(A \le B)\begin{cases} = 0 & \text{if } m(A) = m(B) \\ > 0, < 1 & \text{if } m(A) < m(B) \text{ and } a_R > b_L \\ \ge 1 & \text{if } m(A) < m(B) \text{ and } a_R \le b_L \end{cases}$$

特性 2

意思決定者が定めたパラメータ値 $\alpha_G \in [0,1]$ に対し，

$$Ax \le B \Rightarrow \begin{cases} a_R x \le b_R \\ AI(B < Ax) \le \alpha_G \end{cases}$$

この 2 つの特性から，possibilistic mean value をベースとしたファジィ数理計画問題(3)は以下のように等価変換できる．

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\left(c_j^L + c_j^U\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{c}_j^{L-} + \hat{c}_j^{L+} + \hat{c}_j^{U-} + \hat{c}_j^{U+}\right) + \frac{1}{3}\left(\beta_j - \alpha_j\right)\right)x_j}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\hat{c}_j^{L+} + \hat{c}_j^{U+} - \hat{c}_j^{L-} - \hat{c}_j^{U-}\right)x_j} \\ &\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\left(a_{ij}^L + a_{ij}^U + \hat{a}_{ij}^{L+} + \hat{a}_{ij}^{U+}\right) + \frac{1}{24}\left(\xi_{ij} - \delta_{ij}\right)\right)x_j \ge b_i,\ i = 1,2,\ldots,m \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\left(a_{ij}^L + a_{ij}^U\right) + \frac{1}{8}\left(\hat{a}_{ij}^{L-} + \hat{a}_{ij}^{L+} + \hat{a}_{ij}^{U-} + \hat{a}_{ij}^{U+}\right) + \frac{1}{12}\left(\xi_{ij} - \delta_{ij}\right)\right)x_j \\ &\qquad + \frac{\alpha_G}{8}\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{a}_{ij}^{L+} + \hat{a}_{ij}^{U+} - \hat{a}_{ij}^{L-} - \hat{a}_{ij}^{U-}\right)x_j \ge b_i,\ i = 1,2,\ldots,m \\ &\qquad x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{8}$$

上記問題(8)はパラメータが多いため，一見複雑そうに見えるが，全ての式が線形式であるため，基本的な分数計画問題である．よって，(目的関数)$=t$ とパラメータを導入することにより，同等の最適解が得られる線形計画問題へと変換することが可能である．よって，大規模な問題であったとしても，計算時間を要することなく最適解を求めることが可能である．またメンバシップ関数値の最小値と最大値を利用した解法であるため，その中間的なメンバシップ関数であっても，最適に近い実用的な意思決定が可能であると考えられる．

4. まとめ

本研究では，ファジィ線形計画問題に関して，メンバシップ関数の妥当性な表現が可能な部分と柔軟性を必要とする部分を考慮するため，Type-2 fuzzy 数を導入し，それに対応するファジィ数理計画法を提案した．まず最適性基準として possibilistic mean value を導入し，その値が区間値として表現されるため，区間値計画法の 1 つである Acceptability Index を導入し，主問題を等価な分数計画問題として定式化した．これにより，メンバシップ関数の形に関わらず，また大規模であっても最適解を求めることができるような数理モデルを構築することが可能となっている．一方で，区間幅を設定するための核となるメンバシップ関数構築法に関しては，台形型メンバシップ関数を想定し，また Type-2 fuzzy 数に関しても，線形領域を仮定していることから，領域表現による柔軟性はあるものの，完全な形での客観的なメンバシップ関数設定とは言い難い．よって，今後はより完全かつ妥当な形でのメンバシップ関数構築法を開発するとともに，意思決定にどの程度メンバシップ関数の妥当性が必要かを検証していく．

参考文献

[1] B. Bharathi and V.V.S. Sarma, “Estimation of fuzzy membership from histograms”, Information Sciences, 35, pp. 43-59, 1985.

[2] C. Carlsson and R. Fullér, “On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers”, Fuzzy Sets and Systems, 122(2), pp. 315–326, 2001.

[3] J. Carlos and F. Garcia, “Solving fuzzy linear programming problems with interval type-2 RHS”, Proceeding of SMC'09 Proceedings of the 2009 IEEE international conference on Systems, Man and Cybernetics, pp. 262-267, 2009.

[4] J.L. Chameau and J.C. Santamarina, “Membership function I: Comparing methods of Measurement”, International Journal of Approximate Reasoning, 1, pp.287-301, 1987.

[5] H.D. Cheng and J.R. Cheng, “Automatically determine the membership function based on the maximum entropy principle”, Information Sciences, 96, pp.163-182, 1997.

[6] M.R. Civanlar and H.J. Trussell, “Constructing membership functions using statistical data”, Fuzzy Sets and Systems, 18, pp. 1-13, 1986.

[7] J.C. Figueroa Garcia and G. Hernandez, “Solving linear programming problems with Interval Type-2 fuzzy constraints using interval optimization”, IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS 2013), pp. 623-628, 2013.

[8] S. Gottwald, “A note on measures of fuzziness”, Elektron Informationsverarb Kybernet, 15, pp. 221-223, 1979.

[9] T. Hasuike, H. Katagiri, and H. Tsubaki, "Constructing an appropriate membership function integrating fuzzy Shannon entropy and human's interval estimation", ICIC Express Letters,

accepted.

[10] 蓮池隆, 片桐英樹, 椿広計, “統計理論に基づく数理的妥当性を有したメンバシップ関数構築法の開発”, 統計数理解析研究所 共同研究リポート 305, 2013.

[11] S.O. Mashchenko, “A mathematical programming problem with the fuzzy set of indices of constraints”, Cybernetics and Systems Analysis, 49(1), pp 62-68, 2013.

[12] G. Nieradka and B. Butkiewicz, “A method for automatic membership function estimation based on fuzzy measures”, Proceedings of IFSA2007, LNAI4529, pp. 451-460, 2007.

[13] A. Sengupta, T.K. Pal, D. Chakraborty, “Interpretation of inequality constraints involving interval coefficients and a solution to interval programming”, Fuzzy Sets and Systems 119, pp.129-138, 2001.

[14] I.B. Turksen (1986), “Measurement of membership functions”, in Applications of Fuzzy Set Theory in Human Factors, Elsevier, pp.55-67, 1986.

[15] 山下利之, ファジィー心理学への展開ー, 垣内出版, 1992.

[16] 吉川歩(2007), “対話型同定法が同定されたメンバーシップ関数形状に及ぼす影響”, 日本知能情報ファジィ学会誌, 19(1), pp.69-78, 2007.