数理解析研究所講究録
第 1912 巻 2014 年 103-111

Smooth fit conditions on the double stopping boundaries for American put option

芝浦工業大学・大学院理工学研究科 冨田 享平 (Kyohei Tomita)
芝浦工業大学・大学院理工学研究科 穴太 克則 (Katsunori Ano)
Graduate School of Engineering and Science,
Shibaura Institute of Technology

Abstract : 有限期間中に権利行使が 2 回できるアメリカン・プット・オプションの最適停止問題を研究する. 最初に権利行使が 1 回のときの性質をリビューし, 次に 2 回権利行使可能なときの性質を各関数ごとに補題として述べ, 最後に価格関数と境界の一意性についての Verification Theorem を証明する.

1 Introduction

株価過程は幾何ブラウン運動に従うものとする.

$$dX_{t+s} = rX_{t+s}dt + \sigma X_{t+s}dB_t, \tag{1.1}$$

なお, $X_t = x \geq 0$ で, $s \geq 0$ である. また, $(B_s)_{s\geq 0}$ は標準ブラウン運動であり, $T > 0$ を満期日, $K > 0$ を権利行使価格, $\sigma > 0$ をボラティリティとする. さらに, X は強マルコフ性をもつので, 無限小生成作用素 $\mathcal{L}_X = rx\frac{\partial}{\partial x} + \sigma^2 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ を持つ. 権利行使が 2 回できるときのアメリカン・プット・オプションの価格を次で定義する.

$$V^{[2]}(t,x) := \sup_{0\leq\tau_1<\tau_2\leq T-t} \mathbb{E}\left[e^{-r\tau_1} g\left(X_{t+\tau_1}(x)\right) + e^{-r\tau_2} g\left(X_{t+\tau_2}(x)\right)\right].$$

なお, $g(x) = (K-x)^+$ である. また, 残り 2 回権利行使できる条件のもとで, $X_{T-t} = x$ において権利行使して得られる利得は

$$U^{[2]}(t,x) := \begin{cases} g(x) + e^{-r\delta}\mathbb{E}\left[V^{[1]}\left(t+\delta, X_{t+\delta}(x)\right)\right], & 0 < t \leq T-\delta, \\ (K-x)^+, & T-\delta < t \leq T. \end{cases}$$

となる. さらに, 1 回目の停止時刻 τ_1 と 2 回目の停止時刻 τ_2 の間は, $\delta(>0)$ あけるものとする, i.e. $\tau_2 - \tau_1 \geq \delta$ となるようにする.

2 回停止のアメリカン・プット・オプションを探求する前に, 1 回停止のアメリカン・プット・オプションについて簡単に見てゆく.

- 価格関数 : $V^{[1]}(t,x) = \sup_{0\leq\tau\leq T-t} \mathbb{E}\left[e^{-r\tau} g(X_{t+\tau}(x))\right]$
- 利得関数 (権利行使したときの利得) : $U^{[1]}(t,x) = g(x) = (K-x)^+$
- 最適停止時刻 : $\tau^* = \inf\{0 \leq s \leq T : X_{t+s}(x) \leq b^{[1]}(t+s)\}$
- 継続領域 :

$$\begin{aligned} C^{[1]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : V^{[1]}(t,x) > U^{[1]}(t,x)\right\} \\ &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x > b^{[1]}(t)\right\} \end{aligned}$$

- 停止領域:

$$
\begin{aligned}
D^{[1]} &= \left\{(t,x)\in[0,T)\times(0,\infty): V^{[1]}(t,x)=U^{[1]}(t,x)\right\}\\
&= \left\{(t,x)\in[0,T)\times(0,\infty): x\le b^{[1]}(t)\right\}
\end{aligned}
$$

上記を満たす境界 $b^{[1]}(t)$ が存在し, 増加関数であることが知られている. また自由境界問題は

$$
\begin{cases}
V_t^{[1]}+\mathcal{L}_X V^{[1]}=rV^{[1]}, & \text{in } C^{[1]},\\
V^{[1]}(t,x)=U^{[1]}(t,x), & \text{for } x=b^{[1]}(t),\\
V_x^{[1]}(t,x)=-1, & \text{for } x=b^{[1]}(t),\\
V^{[1]}(t,x)>U^{[1]}(t,x), & \text{in } C^{[1]},\\
V^{[1]}(t,x)=U^{[1]}(t,x), & \text{in } D^{[1]}
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

となる. これを満たす境界 $b^{[1]}(t)$ と価格関数 $V^{[1]}$ は一意であることが証明されている (cf. [2] S. D. Jacka (1991), [4] G. Peskir and A. N. Shiryaev (2006)).

2 Double Stopping Ploblem

前述した通り求める 2 回停止のアメリカン・プット・オプションの最適停止問題は

$$
V^{[2]}(t,x)=\sup_{0\le\tau_1<\tau_2\le T-t}\mathbb{E}\left[e^{-r\tau_1}g\left(X_{t+\tau_1}(x)\right)+e^{-r\tau_2}g\left(X_{t+\tau_2}(x)\right)\right]. \tag{2.1}
$$

また, 利得関数は次であった:

$$
U^{[2]}(t,x)=\begin{cases}
g(x)+e^{-r\delta}\mathbb{E}\left[V^{[1]}\left(t+\delta,X_{t+\delta}(x)\right)\right], & 0<t\le T-\delta,\\
(K-x)^+, & T-\delta<t\le T.
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

なお, $g(x)=(K-x)^+$ で, τ_1 は 1 回目の停止時刻であり, $\tau_2-\tau_1\ge\delta>0$ である.

補題 2.1

(i) $x\mapsto V^{[2]}(t,x)$ は $t\in[0,T]$ に対して, $\mathbb{R}^+$ 上で減少する凸関数である.

(ii) $t\mapsto V^{[2]}(t,x)$ は $x\in\mathbb{R}^+$ に対して, $[0,T]$ 上で減少する.

(iii) $(t,x)\in(0,T]$ に対して, $V^{[2]}(t,x)\ge V^{[1]}(t,x)$ である.

(iv) $(t,x)\mapsto V^{[2]}(t,x)$ は $[0,T]\times\mathbb{R}^+$ 上で連続である.

証明の概要

(i) : $V^{[1]}(t,x)$ が減少する凸関数なので, $V^{[2]}(t,x)$ も減少する凸関数だということがわかる. (ii) : t を減少させると上限をとる幅が減少していくので, $V^{[2]}(t,x)$ は減少する関数である. (iii) : $e^{-rt}>0$, $(K-x)^+>0$ なので, $V^{[1]}(t,x)\le V^{[2]}(t,x)$ である. (iv) : $V^{[2]}$ の構造より, x に関する連続性は明らかである. また t に関する連続性は, $\tau_*(t,x)$ を $V^{[2]}(t,x)$ の最適停止時刻とすると, $V^{[1]}$ が連続という事実より, 連続性が証明できる. □

補題 2.2 (利得関数の性質)

(i) $x \mapsto U^{[2]}(t,x)$ は全ての $t \in [0,T]$ に対して, $\mathbb{R}^+$ 上で減少し凸関数である.

(ii) 全ての $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^+$ に対して, $U^{[2]}(t,x) \geq U^{[1]}(t,x)$ である.

(iii) $(t,x) \mapsto U^{[2]}(t,x)$ は $[0,T] \times \mathbb{R}^+$ 上で連続である.

証明の概要

(i) : $U^{[2]}(t,x)$ の構造より明らかである. (ii) : $\mathbb{E}\left[V^{[1]}(t,x)\right] > 0$ なので, 成り立つ. (iii) : $(t,x) \mapsto V^{[1]}(t,x)$ と $g(x)$ が連続なので明らか.

□

補題 2.3 以下の性質も成り立つ.

(i) Smooth-fit : $\frac{\partial V^{[2]}}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial U^{[2]}}{\partial x}(t,x)$ *for* $x = b^{[2]}(t)$

(ii) $V_t^{[2]} + \mathcal{L}_X V^{[2]} = rV^{[2]}$ in $C^{[2]}$

(iii) $D^{[1]} \subseteq D^{[2]}$

証明の概要

(i) Smooth-fit は, はさみうちの定理を使って示していく.

まず, $x+\epsilon < K$ となる $\epsilon > 0$ をとる. $x = b^{[2]}$ より点 $(t, x+\epsilon) \in C^{[2]}$ なので, $V^{[2]}(t,x+\epsilon) > U^{[2]}(t,x+\epsilon)$ であり, $V^{[2]}(t,x) = U^{[2]}(t,x)$ となる. 従って,

$$\frac{V^{[2]}(t,x+\epsilon) - V^{[2]}(t,x)}{\epsilon} \geq \frac{U^{[2]}(t,x+\epsilon) - U^{[2]}(t,x)}{\epsilon}$$

を得る. 次に逆の不等式

$$\frac{V^{[2]}(t,x+\epsilon) - V^{[2]}(t,x)}{\epsilon} \leq \frac{U^{[2]}(t,x+\epsilon) - U^{[2]}(t,x)}{\epsilon}$$

は, $V^{[2]}(t,x+\epsilon)$ の最適停止時刻を定めることで, $V^{[2]}(t,x+\epsilon) - V^{[2]}(t,x)$ を上から抑えることができるので成り立つことを示せる.

(ii) τ_1^* を一回目の最適停止時刻とするとき, $s \in [0, \tau_1^*(t,x)]$ に対する $e^{-rs}V^{[2]}(t+s, X_{t+s}(x))$ は, 伊藤の公式が適用可能で, マルチンゲールである. これより

$$d\left(e^{-rs}V^{[2]}(t+s, X_{t+s}(x))\right) = e^{-rs}\left\{-rV^{[2]} + V_s^{[2]} + rxV_x^{[2]} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx}^{[2]}\right\} ds + e^{-rs}\sigma x V_x^{[2]} dB_s.$$

$e^{-rs}V^{[2]}(t+s, X_{t+s}(x))$ はマルチンゲールなので,

$$e^{-rs}\left\{-rV^{[2]} + V_s^{[2]} + rxV_x^{[2]} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx}^{[2]}\right\} ds = 0 \Longleftrightarrow V_s^{[2]} + rxV_x^{[2]} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx}^{[2]} = rV^{[2]}$$

従って,

$$V_t^{[2]} + \mathcal{L}_X V^{[2]} = rV^{[2]} \quad \text{in } C^{[2]}. \tag{2.3}$$

(iii)

$$\begin{aligned} D^{[1]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : V^{[1]}(t,x) = U^{[1]}(t,x)\right\}, \\ D^{[2]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : V^{[2]}(t,x) = U^{[2]}(t,x)\right\} \end{aligned}$$

と補題 2.1(iii) より, 明らかである. □

補題 2.4 (境界の性質) 境界は次を満たす.

(i) [境界の存在]：次の条件を満たす境界 $b^{[2]}(t)$ は存在し, 増加関数である.

$$\begin{aligned} \text{継続領域} \quad : \quad C^{[2]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x > b^{[2]}(t)\right\}, \\ \text{停止領域} \quad : \quad D^{[2]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x \le b^{[2]}(t)\right\}. \end{aligned}$$

(ii) [境界の連続性]：$b^{[2]}(t)$ は連続で, $b^{[2]}(T) = K$ を満たす.

(iii) $b^{[1]} \le b^{[2]}$.

<u>証明の概要</u> (i) [境界の存在]： 継続領域と停止領域をそれぞれ次で与える.

$$\begin{aligned} C^{[2]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : V^{[2]}(t,x) > U^{[2]}(t,x)\right\}, \\ D^{[2]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : V^{[2]}(t,x) = U^{[2]}(t,x)\right\}. \end{aligned}$$

このときまず, $0 \le t < T$ に対して, 全ての点 (t,x) が $x \ge K$ で $C^{[2]}$ に属することを示す. 次に, $x \le K$ に対して考える. 仮定より $U^{[2]}(t,x) \le V^{[2]}(t,x)$ であり, $U^{[2]}(t,x)$ は $U^{[2]}(t,x) = g(x) + e^{-r\delta}\mathbb{E}\left[V^{[1]}(t+\delta, X_{t+\delta}(x))\right]$ なので, t に依存しない関数である. また, x が限りなく 0 に近いときは停止することが最適なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 0} V^{[2]}(t,x) &= \lim_{x\downarrow 0} U^{[2]}(t,x) \\ &= K + e^{-r\delta}\mathbb{E}\left[V^{[2]}(t+\delta, X_{t+\delta}(x))\right] \end{aligned}$$

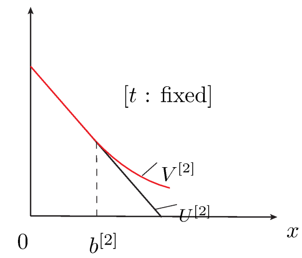

fig 3.1 境界の存在

となる. さらに, 補題 2.1 より $x \mapsto V^{[2]}$ は連続で減少する凸関数であることがわかっているので,

$$\begin{aligned} C^{[2]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x > b^{[2]}(t)\right\}, \\ D^{[2]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x \le b^{[2]}(t)\right\}. \end{aligned}$$

次に, $b^{[2]}(t)$ が増加関数であることを示す. i.e. $0 < t' < t < T$ に対して, $(t,x) \in C^{[2]} \Longrightarrow (t',x) \in C^{[2]}$ を示す. $t \mapsto V^{[2]}$ は減少で, $U^{[2]}(t,x)$ は t に依存しない関数ということを使うと,

$$V^{[2]}(t',x) - U^{[2]}(t',x) \quad \ge \quad V^{[2]}(t,x) - U^{[2]}(t,x) > 0$$

となる. 従って, (t',x) は $C^{[2]}$ に含まれる. よって, $b^{[2]}(t)$ は増加関数である.

(ii) [境界の連続性]：$b(t) = b(t+)$ と $b(t) = b(t-)$ に分けて示す.

(a) $b(t) = b(t+)$ について

$b^{[2]}$ は増加関数なので, $b(t) \le b(t+)$ となる. 一方, $t_n \downarrow t\ (n \to \infty)$ とする. $(t_n, b(t_n)) \in D^{[2]}$ ならば, $D^{[2]}$ は閉なので, $n \to \infty$ とすると, $(t, b(t+)) \in D^{[2]}$ となる. $D^{[2]} =$

$\left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x \leq b^{[2]}(t)\right\}$ より, $b(t+) \leq b(t+)$ となる. 従って, $b(t) = b(t+)$ である.

(b) $b(t) = b(t-)$ について

$b(t_*-) < b(t_*)$ と仮定する. また, $t_* \in (0,T)$ とし, t' は十分 t_* に近く $t' < t_*$ とする. このとき, $R \subseteq C^{[2]}$ を考える. ただし, R は半開区間で, 各頂点は $(t', b(t'))$, $(t_*, b(t_*-))$, (t_*, x'), (t', x') とし, $x' \in (b(t_*-), b(t_*))$ である.

強マルコフ性より, $V^{[2]}$は $C^{1,2}$ in C, $U^{[2]}$は C^2 in R である. これより, $(t,x) \in R$ に対して

$$V^{[2]}(t,x) - U^{[2]}(t,x) = \int_{b^{[2]}(t)}^{x} \int_{b^{[2]}(t)}^{u} V_{xx}^{[2]} - U_{xx}^{[2]} dvdu. \tag{2.4}$$

ここで, $V_t^{[2]} + \mathcal{L}_X V^{[2]} = rV^{[2]}$ より

$$V_{xx}^{[2]} = \frac{2}{\sigma^2 x^2}\left\{rV^{[2]} - V_t^{[2]} - \sigma x V_x^{[2]}\right\}.$$

$V^{[2]}(t,x)$ は t に関して減少関数なので $V_t^{[2]} \leq 0$ となり, 同様に x に関しても減少なので, $V_x^{[2]} \leq 0$ となる. また $V^{[2]}(t,x) \geq U^{[2]}(t,x) \geq (K-x)^+$ より

$$V_{xx}^{[2]} \ = \ \frac{2}{\sigma^2 x^2}\left\{rV^{[2]} - V_t^{[2]} - \sigma x V_x^{[2]}\right\} \ \geq \frac{2}{\sigma^2 x^2}\left\{r(K-x)^+\right\} \geq c > 0.$$

ただし, c は十分に小さい. $U_{xx}^{[2]} = 0$ より (2.4) は,

$$\begin{aligned}
V^{[2]}(t',x') - U^{[2]}(t',x') &= \int_{b^{[2]}(t')}^{x'} \int_{b^{[2]}(t')}^{u} V_{xx}^{[2]} - U_{xx}^{[2]} dvdu. \\
&= \int_{b^{[2]}(t')}^{x'} \int_{b^{[2]}(t')}^{u} V_{xx}^{[2]} dvdu \ \geq \ \int_{b^{[2]}(t')}^{x'} \int_{b^{[2]}(t')}^{u} cdvdu \\
&= \int_{b^{[2]}(t')}^{x'} c\,[v]_{v=b^{[2]}(t')}^{v=u}\, du = \int_{b^{[2]}(t')}^{x'} c\left(u - b^{[2]}(t')\right) du \\
&= c\left[\frac{1}{2}u^2 - b^{[2]}(t')u\right]_{u=b^{[2]}(t')}^{u=x'} = \frac{c}{2}\left(x' - b^{[2]}(t')\right)^2.
\end{aligned}$$

ここで, $t' \uparrow t_*$ とすると,

$$\frac{c}{2}\left(x' - b^{[2]}(t')\right)^2 \longrightarrow \frac{c}{2}\left(x' - b^{[2]}(t_*)\right)^2 > 0$$

となる. これより, $V^{[2]}(t_*, x') > U^{[2]}(t_*, x')$ なので, $(t_*, x') \in C^{[2]}$ となる. しかし, これは $(t_*, x') \in D^{[2]}$ に反するので, $b(t-) = b(t)$ となる. 以上より, $b(t)$ は $[0,T]$ で連続である. さらに, 上記の証明で $t_* = T$ と置いて, 仮定を $b^{[2]}(T) < K$ とする. これで同様に展開していくと, $x \in [b^{[2]}(T), K]$ に対して $V^{[2]}(t,x) > U^{[2]}(t,x)$ となるので, 仮定に矛盾が生じる. よって, $b^{[2]}(T) = K$ となる.

(iii)

$$\begin{aligned}
D^{[1]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x \leq b^{[1]}(t)\right\}, \\
D^{[2]} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x \leq b^{[2]}(t)\right\}, \\
D^{[1]} &\subseteq D^{[2]}
\end{aligned}$$

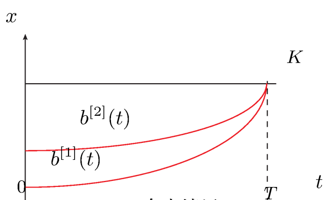

fig 3.2 自由境界

かつ $D^{[1]}, D^{[2]}$ は閉なので, $b^{[1]} \leq b^{[2]}$ となる.

□

3 Free Double Boundaries Ploblem

伊藤の公式を $\{e^{-rs}V^{[2]}(t+s,X_{t+s}(x))\}$ に適用すると,

$$d\left(e^{-rs}V^{[2]}(t+s,X_{t+s}(x))\right) = e^{-rs}\left\{-rV^{[2]}+V_s^{[2]}+rxV_x^{[2]}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2V_{xx}^{[2]}\right\}ds+e^{-rs}\sigma xV_x^{[2]}dB_s.$$

これに $P_{t,x}$-期待値と積分をとる.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} d\left(e^{-rs}V^{[2]}(t+s,X_{t+s}(x))\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} e^{-rs}\left\{-rV^{[2]}+V_s^{[2]}+rxV_x^{[2]}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2V_{xx}^{[2]}\right\}ds\right]\\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} e^{-rs}\sigma xV_x^{[2]}dB_s\right].\end{aligned}$$

これを整理していくと, $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^+$ に対して

$$V^{[2]}(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[U^{[2]}(T,X_T(x))\right]-\int_0^{T-t} e^{-rs}\mathbb{E}\left[H(t+s,X_{t+s}(x))\right]P_{t,x}\left(X_{t+s}(x)\le b^{[2]}(t+s)\right)ds. \tag{3.1}$$

ただし, $H = U_t^{[2]}+\mathcal{L}_XU^{[2]}-rU^{[2]}$. また, $D^{[2]}$ において, $V^{[2]}(t,x) = U^{[2]}(t,x) = (K-x)^+ + e^{-r\delta}\mathbb{E}\left[V^{[1]}(t+\delta,X_{t+\delta}(x))\right]$. なので, $x\in(0,b(t)]$, $t\in[0,T]$ に対して, (3.1) は次のようになる.

$$\begin{aligned}(K-x) &= -e^{-r\delta}\mathbb{E}\left[V^{[1]}(t+\delta,X_{t+\delta}(x))\right]+e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[(K-X_T(x))^+\right]\\ &-\int_0^{T-t} e^{-rs}\mathbb{E}\left[H\left(t+s,X_{t+s}(x)\right)\right]P_{t,x}\left(X_{t+s}(x)\le b^{[2]}\left(t+s\right)\right)ds.\end{aligned}$$

これに $x=b^{[2]}(t)$ を代入することにより, A natural candidate equation を得る. これにより自由境界方程式を導く.

$$\begin{aligned}K-b^{[2]}(t) &= -e^{-r\delta}\mathbb{E}\left[V^{[1]}\left(t+\delta,X_{t+\delta}(b^{[2]}(t))\right)\right]+e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\left(K-X_T\left(b^{[2]}(t)\right)\right)^+\right]\\ &-\int_0^{T-t} e^{-rs}\mathbb{E}\left[H\left(t+s,X_{t+s}\left(b^{[2]}(t)\right)\right)\right]P_{t,b^{[2]}(t)}\left(X_{t+s}\left(b^{[2]}(t)\right)\le b^{[2]}\left(t+s\right)\right)ds.\end{aligned} \tag{3.2}$$

定理 3.1 (Verification Theorem)
アメリカン・プット・オプションの価格関数 $V^{[2]}$ と最適停止境界 $b^{[2]}$ は, 唯一つ存在する:

$$\begin{cases} V_t^{[2]}+\mathcal{L}_XV^{[2]}=rV^{[2]} & x>b^{[2]}(t),\\ V^{[2]}(t,x)=U^{[2]}(t,x) & x=b^{[2]}(t),\ \text{(continuous-fit)}\\ V_x^{[2]}(t,x)=U_x^{[2]}(t,x) & x=b^{[2]}(t),\ \text{(smooth-fit)}\\ V^{[2]}(t,x)>U^{[2]}(t,x) & x>b^{[2]}(t),\\ V^{[2]}(t,x)=U^{[2]}(t,x) & x\le b^{[2]}(t). \end{cases} \tag{3.3}$$

<u>証明の概要</u>
最初に, 価格関数の一意性について述べる. 伊藤の公式より次を得る.

$$e^{-rs}v^{[2]}(t+s,X_{t+s}(x)) = v^{[2]}(t,x)+\int_0^s e^{-rs}\left\{v_s^{[2]}+\mathcal{L}_Xv^{[2]}-rv^{[2]}\right\}ds+\int_0^s e^{-rs}\sigma xv_x^{[2]}dB_s. \tag{3.4}$$

$x\mapsto v^{[2]}(t,x)$ は, 減少する凸関数であり, $v^{[2]}\ge U^{[2]}$ なので, $v_x^{[2]}(t,x)$ は $\mathbb{R}$ 上で有界である. (3.4), $v_t^{[2]}+\mathcal{L}_Xv^{[2]}=rv^{[2]}$ や, すでに証明してある性質を使用すると, $V^{[2]}\le v^{[2]}\le V^{[2]}$ が示せる.

次に境界の一意性を示す. (3.2) を満たすもう一つ自由境界 $0 < c^{[2]}(t) < K$ が存在すると仮定する. 自由境界方程式の導出と同様に以下を定義する:

$$\begin{aligned} W^{c^{[2]}}(t,x) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[U^{[2]}(T,X_T)\right] \\ &\quad - \int_0^{T-t} e^{-ru}\mathbb{E}\left[H\left(t+u, X_{t+u}(x)\right)\right] P_{t,x}\left(X_{t+u} \le c^{[2]}\left(t+u\right)\right) du. \end{aligned} \tag{3.5}$$

なお, $H = U_t^{[2]} + \mathcal{L}_X U^{[2]} - rU^{[2]}$ で, $W^{c^{[2]}}(t,x)$ は連続である. また,

$$\begin{aligned} W_x^{c^{[2]}}(t,x) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[U_x^{[2]}(T,X_T)\right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{T-t} e^{-ru}\mathbb{E}\left[H\left(t+u, X_{t+u}(x)\right)\right] P_{t,x}\left(X_{t+u}\left(c^{[2]}(t)\right) \le c^{[2]}\left(t+u\right)\right) du. \end{aligned}$$

$U_x^{[2]}, U^{[2]}$ が連続なので, $W_x^{c^{[2]}}$ は連続である. 次に

$$V^{c^{[2]}} : [0,T) \times (0,\infty) \to \mathbb{R} = \begin{cases} V^{c^{[2]}}(t,x) = W^{c^{[2]}}(t,x), & x > c^{[2]}(t), \\ V^{c^{[2]}}(t,x) = U^{[2]}(t,x), & x \le c^{[2]}(t) \end{cases}$$

と定義する. また $c^{[2]}(t)$ は)(3.2) の解なので, $V^{c^{[2]}}$ は連続である. i.e. $x = c^{[2]}(t)$ に対して $V^{c^{[2]}}(t,x) = W^{c^{[2]}}(t,x) = U^{[2]}(t,x)$ となる. さらに, $c^{[2]}(t)$ に対する領域を次で定義する.

$$\begin{aligned} C^{c^{[2]}} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x > c^{[2]}(t)\right\}, \\ D^{c^{[2]}} &= \left\{(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty) : x \le c^{[2]}(t)\right\}. \end{aligned}$$

ここで, change-of-variable formula より

$$\begin{aligned} e^{-rs}V^{c^{[2]}}(t+s, X_{t+s}) &= V^{c^{[2]}}(t,x) + \int_0^s e^{-ru}\left(V_t^{c^{[2]}} + \mathcal{L}_X V^{c^{[2]}} - rV^{c^{[2]}}\right)(t+u, X_{t+u})\mathbb{I}_{\{X_{t+u} \neq c^{[2]}(t+u)\}}du \\ &\quad + M_s^{c^{[2]}} + \frac{1}{2}\int_0^s e^{-ru}\Delta_x V_x^{c^{[2]}}(t+u, c(t+u))d\ell_u^{c^{[2]}}(X) \end{aligned} \tag{3.6}$$

を得る. なお, $M_s^{c^{[2]}}$ はマルチンゲール項で, $\ell_u^{c^{[2]}}(X)$ は $c^{[2]}(t)$ 上の X の局所時間. また $t \le v \le T$ に対して, $\Delta V_x^{c^{[2]}}(v, c^{[2]}(v)) = V_x^{c^{[2]}}(v, c^{[2]}(v)+) - V_x^{c^{[2]}}(v, c^{[2]}(v)-)$ とする. この式において, $s = T-t$ とし期待値をとると,

$$\begin{aligned} V^{c^{[2]}}(t,x) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[U^{[2]}(T,X_T)\right] - \int_0^{T-t} e^{-ru}\mathbb{E}\left[H(t+u, X_{t+u})\right] P\left(X_{t+u} \le c^{[2]}(t+u)\right) du \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^{T-t} e^{-ru}\Delta_x V_x^{c^{[2]}}(t+u, c^{[2]}(t+u))du\mathbb{E}\left[\ell_u^{c^{[2]}}(X)\right]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

を得る. なお, $H = U_t^{[2]} + \mathcal{L}_X U^{[2]} - rU^{[2]}$ であり, $x \le c^{[2]}(t)$ で $V^{c^{[2]}}(t,x) = U^{[2]}(t,x)$ かつ, $V_t^{c^{[2]}} + \mathcal{L}_X V^{c^{[2]}} = rV^{c^{[2]}}$ in $C^{c^{[2]}}$ を使用. ここで, (3.5), (3.7) から,

$$\int_0^{T-t} e^{-ru}\Delta_x V_x^{c^{[2]}}(t+u, c^{[2]}(t+u))du\mathbb{E}\left[\ell_u^c(X)\right] = 2(W^{c^{[2]}}(t,x) - U^{[2]}(t,x))\mathbb{I}_{\{x \le c^{[2]}(t)\}}.$$

$x \mapsto V^{c^{[2]}}(t,x)$ が $c^{[2]}(t)$ 上で C^1 であることを示すためには, 全ての $0 \le x \le c^{[2]}(t)$ に対して $W^{c^{[2]}}(t,x) = U^{[2]}(t,x)$ を示せばよい. なぜなら,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(W^{c^{[2]}}(t,x) - U^{[2]}(t,x)\right)\Big|_{x=c^{[2]}(t)} &= V_x^{c^{[2]}}(t, c^{[2]}(t)+) - V_x^{c^{[2]}}(t, c^{[2]}(t)-) \\ &= \Delta_x V_x^{c^{[2]}}(t, c^{[2]}(t)) \end{aligned}$$

であるからである．従って，$W^{c^{[2]}}(t,x) = U^{[2]}(t,x)$ を示す．

強マルコフ性より，$W^{c^{[2]}}$ は $D^{c^{[2]}}$ 上で $C^{1,2}$ である．(3.6) と同様にして，

$$e^{-rs}W^{c^{[2]}}(t+s, X_{t+s}) = W^{c^{[2]}}(t,x) - \int_0^s e^{-ru}G(t+u, X_{t+u})\mathbb{I}_{\{X_{t+u}\le c^{[2]}(t+u)\}}du + \tilde{M}_s^{c^{[2]}}. \qquad (3.8)$$

なお，$G = W_t^{c^{[2]}} + \mathcal{L}_X W^{c^{[2]}} - rW^{c^{[2]}}$ であり，$\tilde{M}_s^{c^{[2]}}$ はマルチンゲール項である．また $W^{c^{[2]}}$ は連続なので，$\Delta_x W_x^{c^{[2]}}(t+u, c^{[2]}(t+u)) = 0$．同様に，

$$\begin{aligned} e^{-rs}U^{[2]}(t+s, X_{t+s}) &= U^{[2]}(t,x) - \int_0^s e^{-ru}H(t+u, X_{t+u})\mathbb{I}_{\{X_{t+u}<K\}}du + M_s^K \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^s e^{-ru}\Delta_x U_x^{[2]}(t+u, K)d\ell_u^K(X). \end{aligned}$$

なお，$H = U_t^{[2]} + \mathcal{L}_X U^{[2]} - rU^{[2]}$ で，M_s^K はマルチンゲール項ある．

ここで，停止時刻

$$\sigma_{c^{[2]}} = \inf\{0 \le s \le T-t : X_{t+s} \ge c^{[2]}(t+s)\}$$

を考える．$c^{[2]}(t)$ が (3.2) の解なので，$0 \le t < T$ に対して，$W^{c^{[2]}}(t, c^{[2]}(t)) = U^{[2]}(t, c^{[2]}(t))$ であり，全ての $x > 0$ に対して $W^{c^{[2]}}(T,x) = U^{[2]}(T,x)$ なので，$W^{c^{[2]}}\left(t+\sigma_{c^{[2]}}, X_{t+\sigma_{c^{[2]}}}\right) = U^{[2]}\left(t+\sigma_{c^{[2]}}, X_{t+\sigma_{c^{[2]}}}\right)$．(3.8) で期待値を取り $s = \sigma_{c^{[2]}}$ として計算すると，

$$W^{c^{[2]}}(t,x) = \cdots = U^{[2]}(t,x)$$

が導ける．従って，

$$W^{c^{[2]}}(t,x) = U^{[2]}(t,x) \implies x \mapsto V^{c^{[2]}}(t,x) \text{ は } c^{[2]}(t) \text{ で } C^1 \text{である．}$$

次に，停止時刻

$$\tau_{c^{[2]}} = \inf\{0 \le s \le T-t : X_{t+s} \le c^{[2]}(t+s)\}$$

について考える．$V_t^{c^{[2]}} + \mathcal{L}_X V^{c^{[2]}} = rV^{c^{[2]}}$ in $C^{c^{[2]}}$ と $x \mapsto V^{c^{[2]}}(t,x)$ は $c^{[2]}(t)$ で C^1 より，(3.6) は，

$$e^{-rs}V^{c^{[2]}}(t+s, X_{t+s}) = V^{c^{[2]}}(t,x) + \int_0^s e^{-ru}H(t+u, X_{t+u})\mathbb{I}_{\{X_{t+u}\le c^{[2]}(t+u)\}}du + M_s^{c^{[2]}} \qquad (3.9)$$

となる．なお，$H = U_t^{[2]} + \mathcal{L}_X U^{[2]} - rU^{[2]}$ である．これに $s = \tau_{c^{[2]}}$ を代入して期待値をとると，

$$\mathbb{E}\left[e^{-rs}V^{c^{[2]}}(t+\tau_{c^{[2]}}, X_{t+\tau_{c^{[2]}}})\right] = V^{c^{[2]}}(t,x).$$

これより，停止領域のとき $W^{c^{[2]}} = U^{[2]}$ なので，

$$V^{c^{[2]}}(t,x) = \mathbb{E}\left[e^{-rs}\left\{g(X_{t+\tau_{c^{[2]}}}) + e^{-r\delta}\mathbb{E}\left[V^{[1]}(t+\tau_{c^{[2]}}+\delta, X_{t+\tau_{c^{[2]}}+\delta})\right]\right\}\right].$$

これと，

$$V^{[2]}(t,x) = \sup_{0\le\tau_1<\tau_2\le T-t} \mathbb{E}\left[e^{-r\tau_1}g(X_{t+\tau_1}(x)) + e^{-r\tau_2}g(X_{t+\tau_2}(x))\right].$$

を比べると，全ての $(t,x) \in [0,T) \times (0,\infty)$ に対して，

$$V^{c^{[2]}}(t,x) \le V^{[2]}(t,x).$$

次に，$c^{[2]} \ge b^{[2]}$ を示す．(3.9) と同様に，

$$e^{-rs}V^{[2]}(t+s, X_{t+s}) = V^{[2]}(t,x) + \int_0^s e^{-ru}H(t+u, X_{t+u})\mathbb{I}_{\{X_{t+u}\le b^{[2]}(t+u)\}}du + M_s^{b^{[2]}} \qquad (3.10)$$

なお, $H = U^{[2]}_t + \mathcal{L}_X U^{[2]} - rU^{[2]}$ である. $x < b^{[2]}(t) \wedge c^{[2]}(t)$ となるように, $(t,x) \in (0,T) \times (0,\infty)$ を fix する. 停止時刻

$$\sigma_{b^{[2]}} = \inf\{0 \le s \le T-t : X_{t+s} \ge b^{[2]}(t+s)\}$$

を考える. (3.9), (3.10) で $s = \sigma_{b^{[2]}}$ とし期待値を取ると , $V^{c^{[2]}} \le V^{[2]}$ より,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\sigma_{b^{[2]}}} e^{-ru} H(t+u, X_{t+u}) \mathbb{I}_{\{X_{t+u} \le c^{[2]}(t+u)\}} du\right] \le \mathbb{E}\left[\int_0^{\sigma_{b^{[2]}}} e^{-ru} H(t+u, X_{t+u}) \mathbb{I}_{\{X_{t+u} \le b^{[2]}(t+u)\}} du\right].$$

ここで, $U^{[2]}_x \le 0$ なので, $H(t+u, X_{t+u}) < 0$ である. よって,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\sigma_{b^{[2]}}} e^{-ru} \mathbb{I}_{\{X_{t+u} \le c^{[2]}(t+u)\}} du\right] \ge \mathbb{E}\left[\int_0^{\sigma_{b^{[2]}}} e^{-ru} \mathbb{I}_{\{X_{t+u} \le b^{[2]}(t+u)\}} du\right].$$

従って,

$$c^{[2]} \ge b^{[2]}$$

となる. 最後に $c^{[2]} > b^{[2]}$ を仮定し,$x \in (b^{[2]}(t), c^{[2]}(t))$ とする. このとき停止時刻:

$$\tau_{b^{[2]}} = \inf\{0 \le s \le T-t : X_{t+s} \le b^{[2]}(t+s)\}$$

を考える. (3.9), (3.10) で $s = \sigma_{b^{[2]}}$ とし期待値を取ると,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-r\tau_{b^{[2]}}} U^{[2]}(t+\tau_{b^{[2]}}, X_{t+\tau_{b^{[2]}}})\right] &= V^{c^{[2]}}(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_{b^{[2]}}} e^{-ru} H(t+u, X_{t+u}) \mathbb{I}_{\{X_{t+u} \le c^{[2]}(t+u)\}} du\right], \\
\mathbb{E}\left[e^{-r\tau_{b^{[2]}}} U^{[2]}(t+\tau_{b^{[2]}}, X_{t+\tau_{b^{[2]}}})\right] &= V^{[2]}(t,x).
\end{aligned}$$

$V^{c^{[2]}} \le V^{[2]}$ で $H(t+u, X_{t+u}) < 0$ なので,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_{b^{[2]}}} e^{-ru} \mathbb{I}_{\{X_{t+u} \le c^{[2]}(t+u)\}} du\right] \le 0.$$

これを満たす $x \in (b^{[2]}(t), c^{[2]}(t))$ は存在しない. よって, $c^{[2]} = b^{[2]}$. 以上より, 境界の一意性が示せた. 従って, 価格と境界は一意である. □

References

[1] S. D. Jacka, (1991), Optimal Stopping and the American Put, Math. Finance, **1** (1-14).

[2] Y. Kitapbayev, (2012), On the Lookback Option with Fixed Strike, Research Report **3**.

[3] G. Peskir, (2005), On the American Option Problem, Math. Finance, **15** (169-181).

[4] G. Peskir, and A. N. Shiryaev, (2006), Optimal Stopping and Free-Boundary Problems, Lectures in Mathematics, ETH Zurich, *Birkhauser.*

[5] S. E. Shreve, (2004), Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models, *Springer Finance.*