数理解析研究所講究録
第1912巻 2014年 141-146

安定な研究室配属問題についての一考察

弘前大学大学院理工学研究科 長谷川 雅紀 (Masaki Hasegawa)
金 正道 (Masamichi Kon)
Graduate School of Science and Tecnology,Hirosaki University

1 はじめに

世の中には様々な配属関係というものがある。代表的なものは、大学での学生の研究室への配属や研修医の研修先への配属などである。研究室配属問題を多対1の安定マッチング問題として考える。学生の研究室への配属を決定するとき、学生に志望する教員（研究室）についてのアンケートをとることが一般的である。本論文では、学生が複数の教員を好む順に記入するアンケートについて、安定な配属を求める上で、アンケートに記入できる教員の数はどれくらいが適切であるかを考察する。

2 安定マッチング問題

安定マッチング問題とは、組合せ問題であるマッチング問題の1つで、安定という性質をもったマッチングを求める問題である。以下、安定マッチング問題である安定結婚問題と研究室配属問題について、定式化し、関連付ける。

2.1 安定結婚問題

まず1対1マッチングの両側マッチングを代表する安定結婚問題について、基本的な定義や定理を紹介する。

安定結婚問題は以下のように定義される M, W, P の組 (M, W, P) で与えられる。M は男性の有限集合とし、W は女性の有限集合とし、M と W は互いに素であるとする。また、全ての $m \in M$ は $W \cup \{m\}$ を好む順に並べた好みのリスト $P(m)$ を持ち、全ての $w \in W$ は $M \cup \{w\}$ を好む順に並べた好みのリスト $P(w)$ を持つ。ただし、全ての人は異性を同順位で好むことは無いとする。また、P は全ての $x \in M \cup W$ についての好みのリストの集合とする。ただし、全ての $a \in M \cup W$ の好みのリスト $P(a)$ について、a が a 以下に好むものについては省略する。例えば、ある $m \in M$ について m の好みのリストが $w, w', m, w", \cdots$ の順になっているときは $P(m)$ は $P(m) = w, w'$ と表す。

このとき、片方の集合のことを側ともいう。例えば、男性側とは男性の集合のことをいう。

また、$m \in M$ が 2 人の女性 w, w' について w を w' より好むとき $w >_m w'$ と表し、$w \in W$ が 2 人の男性 m, m' について m を m' より好むとき $m >_w m'$ と表す。1 対 1 マッチングを以下のように定義する。

定義 1
μ が 1 対 1 マッチングであるとは、μ が $M \cup W$ から $M \cup W$ への全単射であり、全ての $x \in M \cup W$ について $\mu \circ \mu(x) = x$ となり、全ての $m \in M$ について $\mu(m) \neq m$ ならば $\mu(m) \in W$ となり、全ての $w \in W$ について $\mu(w) \neq w$ ならば $\mu(w) \in M$ となるときをいう。

以下、簡単のために 1 対 1 マッチングをマッチングと略する。

定義 1 より、$\mu(m) = w$ ならば $\mu(w) = m$ となることが分かる。また、2 人の異性の組 (m, w) をペアと呼ぶ。$\mu(m) = w(\mu(w) = m)$ となるとき、(m, w) はマッチング μ においてペアであるという。

男性 m が女性 w を許容できるとは $w >_m m$ となることで、女性 w が男性 m を許容できるとは $m >_w w$ となることである。

マッチング μ が個人合理的であるとは、$\mu(m) \in W$ となるような全ての $m \in M$ について m が $\mu(m)$ を許容でき、かつ $\mu(w) \in M$ となるような全ての $w \in W$ について w が $\mu(w)$ を許容できることである。つまり、マッチングが個人合理的であるとは、各個人が自分よりも好まない異性とペアにならないことである。

ブロッキングペアと安定マッチングを以下のように定義する。

定義 2
マッチング μ においてペア (m, w) がブロキングペアになるとは、$m >_w \mu(w)$ かつ $w >_m \mu(m)$ となることである。

定義 3
マッチング μ が安定であるとは μ が個人合理的かつ、μ においてブロッキングペアが存在しないことである。

安定マッチングの定義より、全ての男女は安定マッチングの下でペアを組みなおしても、お互いがより好きな異性とはペアになれない状態となる。このような性質から、駆け落ちなどが起きない状態といえるので安定という。

(M, W, P) において、安定マッチングを必ず求められるアルゴリズムが存在し、Gale-Shapley アルゴリズム (以下 G-S アルゴリズムと呼ぶ) という。G-S アルゴリズムは以下のようなアルゴリズムである。

G-S **アルゴリズム**

STEP1

以下の 2 つの条件をを満たす男性 m が存在するとき STEP2 へ、存在しないとき STEP3 へ行く。

1. 女性とペアになっていない

2. $P(m)$ に自分自身よりも好ましいまだプロポーズしていない女性が存在する。

STEP2

m は、まだプロポーズしていない1番好きな女性 $w \in W$ にプロポーズし、STEP1へ戻る。

(1)w は男性 m' とペアとなっているとき

$m >_w m'$ であれば、w は m' とペアを解消し m とペアとなる。そうでないときは、w は m のプロポーズを拒否しそのまま m' とペアとなる。

(2)w がペアをなす男性がいないとき、w が m を許容できるとき m のプロポーズを受け m とペアとなり、そうでないときプロポーズを拒否しペアとならない。

STEP3

ペアを持たない人を独身とし、得られたマッチングを解として出力。

G-S アルゴリズムは、女性側から男性側にプロポーズしても、安定マッチングを求めることができる。

G-S アルゴリズムから次の定理が得られる。

定理 1[2]

全ての安定結婚問題 (M, W, P) において、G-S アルゴリズムを用いると必ず安定マッチングを求めることができる。

定理1より、次の定理2が成り立つことがわかる。

定理 2[2]

全ての安定結婚問題 (M, W, P) において、安定マッチングは存在する。

また安定マッチングは複数個存在し、どのような安定マッチングをどのように求めるかも問題となっている。

片方の側に属する全てのメンバーが、もう片方の側に対して、共通の好みを持つときについて考えてみる。女性全員がお金持ちの順に男性を好む、見た目がいい順に男性を好む、頭のいい順に男性を好むなどである。このとき、以下のような定理が成立することを示した。

定理 3

安定結婚問題 (M, W, P) において、片方の側の異性についての好みが全て同じならば、安定マッチングは唯一つとなる。

この定理より、片方の側の異性についての好みが全て同じならば、単純に GS アルゴリズムなどを用いて安定マッチングを求めると効率が良い。

2.2 研究室配属問題

研究室配属問題は以下のように定義される $S, \mathbf{C}, P, Q$ の組 $(S, \mathbf{C}, P; Q)$ で与えられる。S 学生の有限集合とし、$\mathbf{C}$ は教員の有限集合とし、S と $\mathbf{C}$ は互いに素であるとする。全ての $s \in S$ は、$\mathbf{C} \cup \{s\}$ を好む順に並べた好みのリスト $P(s)$ を持ち、全ての $C \in \mathbf{C}$ は、$S \cup \{C\}$ を好む順に並べた好みのリスト $P(C)$ を持つ。また、Q は教員が自分の研究室に配属させることができる定員の集合であり、教員 C の定員は q_C と表すとする。ここでも、好みのリストにおいて同順位は無いとする。さらに、P は全ての $x \in S \cup \mathbf{C}$ についての好みのリストの集合とする。また、好みのリストにおいて、自分より好まないものについては省略するとする。

また、$s \in S$ が 2 人の教員 C, C' について C を C' より好むとき、$C >_s C'$ と表し、$C \in \mathbf{C}$ が 2 人の学生 s, s' について s を s' より好むとき、$s >_C s'$ と表す。多対 1 マッチングを以下のように定義する。

定義 4

μ が多対 1 マッチングであるとは、μ が以下の 3 つををみたすような、$S \cup \mathbf{C}$ から $S \cup \mathbf{C}$ の部分集合の集合への写像となることである。

1. 全ての $s \in S$ について $|\mu(s)| = 1$ となり、$\mu(s) \notin \mathbf{C}$ のとなるとき $\mu(s) = s$。
2. 全ての $C \in \mathbf{C}$ について $|\mu(C)| = q_C$ となり、q_C 以下となる r 人の学生が $\mu(C)$ に属しているとき、$\mu(C)$ は $q_C - r$ 個の C を含む。
3. $\mu(s) = C$ となるとは、$s \in \mu(C)$ となることと同値である。

多対 1 マッチングついても単にマッチングと略す。

学生 s が教員 C を許容できるとは、$C >_s s$ となることで、教員 C が学生 s を許容できるとは、$s >_C C$ となることである。

マッチングが個人合理的であるとは、$\mu(s) \in \mathbf{C}$ となるような全ての $s \in S$ が $\mu(s)$ を許容でき、かつ全ての $C \in \mathbf{C}$ について任意の $\sigma \in \mu(C)$ は $\sigma >_C C$ または $\sigma = C$ となることである。

ブロッキングペア、安定マッチングについて以下のように定義する。

定義 5

マッチング μ において、(C, s) がブロッキングペアになるとは $C >_s \mu(s)$、かつある $\sigma \in \mu(C)$ となる σ について $s >_C \sigma$ となることである。

定義 6

マッチング μ が安定であるとは、μ が個人合理的、かつ μ においてブロッキングペアが存在しないことである。

安定結婚問題と研究室配属問題の対応付けをしていく。研究室配属問題 $(S, \mathbf{C}, P)$ において、教員 C を c_1 から c_{q_C} まで分割する。このとき、c_1 から c_{q_C} は S について全て C と

同じ好みを持つとする。さらに、全ての分割された教員の集合を $\mathbf{C}^*$ とする。

学生は教員 C を分割した c_1 から c_{q_C} について、添え字の小さい順に好む。異なる教員を分割したものについては、C を分割した c と C' を分割した c' について、C を C' より好めば c を c' よりも好むとする。また、P^* を全ての $x \in S \cup \mathbf{C}^*$ の好みのリストの集合とする。

このとき、$(S, \mathbf{C}^*, P^*)$ は安定結婚問題 (M, W, P) と同様の問題とみなせる。

$C \in \mathbf{C}$ について $\mu(C) = \{s_1, \cdots, s_r, C, \cdots, C\}$ となるマッチングを μ とする。$i > j$ のとき $s_j >_C s_i$ とし、$\mu(C)$ は $q_C - r$ 個の C を含む。C を c_1 から c_{q_C} まで分割し、$\mu^*(c_1)$,$\cdots$,$\mu^*(c_{q_C})$ の順に $\mu(C)$ に属するより好きな要素を割り振るマッチングを μ^* とする。$\mu(s) \notin \mathbf{C}$ のとき $\mu^*(s) = s$ とする。μ^* を、$(S, \mathbf{C}, P)$ と $(S, \mathbf{C}^*, P^*)$ を対応付けた時の μ に対応するマッチングと呼ぶ。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理 4[2]

$(S, \mathbf{C}, P)$ と $(S, \mathbf{C}^*, P^*)$ を対応付けたときに、$(S, \mathbf{C}, P)$ におけるマッチング μ に対応する $(S, \mathbf{C}^*, P^*)$ におけるマッチングを μ^* とする。このとき、μ が安定であることと、μ^* が安定であることは同値である。

定理 4 より研究室配属問題と安定結婚問題を関連付けたときに、安定マッチングは 1 対 1 で対応する。定理 1 より全ての安定結婚問題において安定マッチングは存在するので、全ての研究室配属問題において安定マッチングは必ず存在することが分かる。また、定理 3 より好みのリストを片方の側について同じにしたとき、研究室配属問題においても安定マッチングは 1 つしか存在しないことが分かる。よって大学の研究室の配属において、成績順などで教員が学生を好むときに、安定な配属を求めたければ、G-S アルゴリズムを用いると効率良く安定な配属を求めることができる。

3 数値実験

大学の研究室配属等において、学生から志望する教員についてのアンケートを取り、そのアンケートを基に配属を決定するとする。このとき、全ての教員サイドは学生について成績順の同じ好みを持つとする。安定な配属を求めるとき、全ての学生の好みが分かれば安定な配属は一意になるので、GS アルゴリズムを用いると安定な配属を簡単に決めることができる。しかし、実際に配属を決めるアンケートをとるとき、大抵の場合は記入できる教員の数が決まっている。そこで、学生がアンケートに記入できる教員の数を 1 人から 6 人の時について、学生の好みとそのとき安定マッチングを、それぞれ 1 万回ずつ Mathematica を用いて求めた。そして、このときのアンケートに記入できる教員の数について考察した。

第 k 希望までしかアンケートを取らないとき、第 k 位までに配属されないときもあるが、その時は配属なし (独身) として考える。

3.1 結果

40人の学生に、成績の良い順に番号(1〜40)を割り振り、12人の教員にも番号(1〜12)を割り振る。学生がアンケートに記入できる人数を1人から6人の時について1万回ずつ計算したところ、未配属の人数がどのくらいでるかの割合についての表は以下のようになった。

表 1: 学生が未配属になる割合 (%)

未配属になる人数＼アンケートに書ける人数	1	2	3	4	5	6
0	0.22	15.91	53.51	80.30	93.22	97.82
1	1.89	32.22	34.40	17.70	6.51	2.10
2	6.74	28.72	9.81	1.92	0.27	0.08
3	13.05	15.36	1.98	0.08	0	0
4人以上	78.10	7.79	0.30	0	0	0
合計	100	100	100	100	100	100

表1より、アンケートに書ける教員が多いと未配属の学生が発生する割合は低くなることが分かる。さらに学生を個人で見ても、全体で見てもアンケートに書ける教員の数が多いと未配属が少なくなることが分かる。

実際に配属のアンケートを取る際、書ける教員の数が多いと学生が教員の順位付けすることが困難である。そこで、未配属になる、つまり不満が出る学生の人数を2,3人までは許すとアンケートにかける教員数が3人のときがそれぞれそれ以上の未配属が出る割合はそれぞれ5%未満となる最小の人数であり適していると言える。

参考文献

[1] D.Gusfield and Robert.W.Irving "The Stable Marriage Problem Structure and Algorithms",The MIT Press,1989

[2] A.E.Roth and M.A.O.Sotomayor"Two Sided Macthing A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis",Cambridge University Press,1990

[3] 大村　悠史 "学生の成績と配属希望を考慮したゼミクラス編成問題"　生駒経済論叢第9巻第2号 pp.17(133)–35(151) 2011