数理解析研究所講究録
第1912巻 2014年 172-180

協力区間ゲームにおける解

大阪大学大学院基礎工学研究科
(Graduate School of Engineering Science, Osaka Univ.)
鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi)

大阪大学基礎工学部
(School of Engineering Science, Osaka Univ.)
久保田 萌美 (Megumi Kubota)

大阪大学大学院基礎工学研究科
(Graduate School of Engineering Science, Osaka Univ.)
乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)

1. はじめに

複数の意思決定者が存在する状況における意思決定には，協力ゲーム理論が有効であるということが知られている．協力ゲームの解は，各意思決定者が得られる利益配分や影響力を表す．協力ゲームの解の重要なものとして，Shapley 値，Banzhaf 値などがある．

提携によって得られる利益が，確定的でないために，上限値と下限値によって，すなわち区間値によって与えられるような状況もある．このような状況を扱うための協力ゲームの定式化として，協力区間ゲーム [1, 2, 3, 4, 7] が提案されている．これまで，協力区間ゲームにおける Shapley 値や Banzhaf 値に対応する概念として，区間 Shapley 値 (interval Shapley value)[2]，絶対 Shapley 値 (interval Shapley-like value)[6]，改良 Shapley 値 (improved interval Shapley-like value)[6]，直接 Shapley 値 (direct Shapley value)[4], 間接 Shapley 値 (indirect Shapley value)[4], 区間 Banzhaf 値 (Banzhaf-like value)[8] が提案されている．

本研究では，Shapley 値や Banzhaf 値に関連する協力区間ゲームにおける解として，考えられる解を定義し，提携によって得られる値の上限値と下限値の差が解によって得られる値の上限値と下限値の差へ与える影響などの性質を明らかにする．

2. 通常の協力ゲームとその解

プレイヤーの集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ するとき，通常の協力ゲームは $v(\emptyset)=0$ を満たす $v:2^{N}\rightarrow \mathbb{R}$ で定義される．協力ゲームを単にゲームともよび，通常の協力ゲーム全体を $\mathcal{G}$ と表す．

$\mathcal{G}'\subseteq \mathcal{G}$ に対して，関数 $g:\mathcal{G}'\rightarrow \mathbb{R}^{N}$，あるいはその関数値 $g(v)=(g_{i}(v))_{i\in N}$ は，$\mathcal{G}'$ 上の通常の協力ゲームの解と考えられる．協力ゲームの主要な解として，Shapley 値，Banzhaf 値，正規化 Banzhaf 値がある．いずれも，投票状況での意思決定者の影響力分析などに有効であることが知られており，それぞれ次のように定義される．

定義 1 次で定義される $\phi:\mathcal{G}'\rightarrow \mathbb{R}^{N}$ は，($\mathcal{G}'$ 上の) Shapley 値と呼ばれる．

$$\phi_{i}(v) = \sum_{S\subseteq N\backslash \{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\}$$

定義 2 次で定義される $\beta:\mathcal{G}'\to\mathbb{R}^N$ は，($\mathcal{G}'$ 上の) Banzhaf 値と呼ばれる．

$$\beta_i(v) = \frac{1}{2^n}\sum_{S\subseteq N}\{v(S\cup\{i\})-v(S\backslash\{i\})\} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\}$$

Shapley 値，Banzhaf 値は，それぞれ順列に基づく貢献度の期待値と提携に基づく貢献度の期待値とみなすことができ，公理系によってその合理性が示されている．

3. 協力区間ゲームとその解

3.1. 協力区間ゲーム

実数の区間の集合を $I(\mathbb{R})$ と表す．$x\in I(\mathbb{R})$ に対して，$x=[x^L,x^R]$ と表し，$x,y\in I(\mathbb{R})$ に対して，$x\sim y$ は $(x^L+x^R)/2=(y^L+y^R)/2$ が成立することを意味し，$x\leq y$ は，$x^R\leq y^R$ かつ $x^R\leq y^R$ を意味する．$(x^L+x^R)/2=(y^L+y^R)/2$ が成立することを意味するものとする．$x\in I(\mathbb{R})$ に対して，$|x|=x^R-x^L$ とする．

$v(\emptyset)=[0,0]$ をみたす $v:2^N\to I(\mathbb{R})$ は協力区間ゲームとよばれる [2]．協力区間ゲームの全体を $\mathcal{IG}$ と表す．関数値 $v(S)$ は $[v^L(S),v^R(S)]$ と表される．$v\in\mathcal{IG}$ が与えられたとき，その下限値を導く $v^L:2^N\to\mathbb{R}$，上限値を導く $v^R:2^N\to\mathbb{R}$ は，それぞれ通常の協力ゲームとみなせる．提携の大きさに関して提携値の幅が非減少な協力区間ゲーム全体を $\mathcal{IG}_{IM}=\{v\in\mathcal{IG}\mid v^R(S)-v^L(S)\leq v^R(T)-v^L(T),\forall(S,T);S\subseteq T\subseteq N\}$ とする．

$T\subseteq N,T\neq\emptyset$ に対して，$u_T^f,u_T^z\in\mathcal{IG}$ を次で定義する．

$$u_T^f(S)=\begin{cases}[1,1] & T\subseteq S\\ [0,0] & \text{otherwize}\end{cases}\qquad u_T^z(S)=\begin{cases}[-1,1] & T\subseteq S\\ [0,0] & \text{otherwize}\end{cases}$$

$v=\sum_{T\subseteq N,T\neq\emptyset}\{c_T^fu_T^f+c_T^zu_T^z\}$ を満たす $c_T^f,c_T^z,T\subseteq N,T\neq\emptyset$ が一意に存在する [6]．すなわち，$\{c_T^f,c_T^z\mid T\subseteq N,T\neq\emptyset\}$ は $\mathcal{IG}$ の基底となる．

3.2. 協力区間ゲームにおける既存の解

$\mathcal{IG}'\subseteq\mathcal{IG}$ に対して，$f:\mathcal{IG}'\to I(\mathbb{R})^N$ あるいはその関数値 $f(v)=([f_i^L(v),f_i^R(v)])_{i\in N}$ を $\mathcal{IG}'$ 上の協力区間ゲームの解とよぶ．

$\mathcal{IG}_{IM}$ 上の解として，区間 Shapley 値が提案されている．

定義 3 [2] 次で定義される $\phi:\mathcal{IG}_{IM}\to I(\mathbb{R})^N$ を区間 Shapley 値 (interval Shapley value) とよぶ．

$$\phi_i^{(I)L}(v) = \phi_i(v^L)=\sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v^L(S\cup\{i\})-v^L(S)\}$$

$$\phi_i^{(I)R}(v) = \phi_i(v^R)=\sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v^R(S\cup\{i\})-v^R(S)\}$$

区間 Shapley 値は，通常の協力ゲーム $v^L\in\mathcal{G}$ と $v^R\in\mathcal{G}$ のそれぞれに対して Shapley 値を計算することで得られる．すなわち，$\phi_i^{(I)L}(v)=\phi_i(v^L)$, $\phi_i^{(I)R}(v)=\phi_i(v^R)$ が成り立つ．

$([\phi_i^{(I)L}(v),\phi_i^{(I)R}(v)])_{i\in N}$ は，$v\in\mathcal{IG}_{IM}$ に対しては区間となるが，任意の $v\in\mathcal{IG}$ に対して区間となるとは限らないことに注意する．

区間 Shapley 値はプレイヤー i の提携 S における貢献度 $v(S\cup\{i\})-v(S)$ を $[v^L(S\cup\{i\})-v^L(S),v^R(S\cup\{i\})-v^R(S)]$ とみなしたときの順列における貢献度の期待値と解釈できる．すなわちプレイヤー i が協力した場合の利益と協力しない場合の利益に関する必然的な貢献度に基づく解と解釈できる．このように区間同士の差を考えて，通常の協力ゲームにおける公理を拡張したとき，それらの公理を満たす唯一の解であることが示されており，さまざまな特徴づけがなされている [2].

また，Branzei らは，それ以前の研究において [5]，協力区間ゲームの部分クラスである破産問題から生じる協力区間ゲームに対して次の二つの解を提案している．破産問題から生じる協力区間ゲーム全体を $\mathcal{IG}_B\subseteq\mathcal{IG}$ と表すと，これらは次のように定義される．

定義 4 [4] 次で定義される $\phi^{(ID)}:\mathcal{IG}_B\to I(\mathbb{R})^N$ を間接 Shapley 値とよぶ.

$$\phi_i^{(ID)L}(v)=\min\{\phi_i(v^L),\phi_i(v^R)\},\qquad \phi_i^{(ID)R}(v)=\max\{\phi_i(v^L),\phi_i(v^R)\}$$

また，次で定義される $\phi^{(D)}:\mathcal{IG}_B\to I(\mathbb{R})^N$ を直接 Shapley 値とよぶ.

$$\phi_i^{(D)L}(v)=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v^L(S\cup\{i\})-v^R(S)\}$$

$$\phi_i^{(D)R}(v)=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v^R(S\cup\{i\})-v^L(S)\}$$

$v\in\mathcal{IG}_{IM}$ ならば，$v^L(S\cup\{i\})-v^L(S)\le v^R(S\cup\{i\})-v^R(S)$ が成り立つので，$\phi_i(v^L)\le\phi_i(v^R)$ が成り立つ．したがって，$v\in\mathcal{IG}_{IM}\cap\mathcal{IG}_B$ においては，区間 Shapley 値と間接 Shapley 値は一致する．

また，Han らによって，絶対 Shapley 値が提案されている．

定義 5 [6] 次で定義される $\phi^{(A)}:\mathcal{IG}\to I(\mathbb{R})$ を協力区間ゲームにおける絶対 Shapley 値とよぶ.

$$\begin{aligned}\phi_i^{(A)L}(v)&=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v^L(S\cup\{i\})-v^R(S)\}\\ \phi_i^{(A)R}(v)&=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v^R(S\cup\{i\})-v^L(S)\}\end{aligned}$$

$I-J=[I^L-J^R,I^R-J^L]$ で定義される区間の差は区間同士のすべての組み合わせを考えたものであるといえる．したがって，絶対 Shapley 値は，プレイヤーの貢献度をこの差に基づいて定義した場合の順列に基づく貢献度の期待値であると考えることができる．

絶対 Shapley 値は，Branzei らが破産問題から生じる協力区間ゲームに対して提案した直接 Shapley 値を一般の協力区間ゲームに定義域を拡張して定義したものであるとみなせる．

絶対 Shapley 値は，後述する全体合理性を満たさないので，この性質を満たすようにした改良 Shapley 値が提案されている．

定義 6 [6] 次で定義される $\phi^{(IM)}:\mathcal{IG}\to I(\mathbb{R})^N$ を改良 Shapley 値とよぶ.

$$\phi_i^{(IM)}(v)=\phi_i^{(A)}\left(\frac{v^L+v^R}{2}\right)+\frac{|\phi_i^{(A)}(v_u)|}{\sum_{i\in N}|\phi_i^{(A)}(v_u)|}\left[-\frac{1}{2}|v(N)|,\frac{1}{2}|v(N)|\right]$$

ここで $v^L+v^R\in\mathcal{IG}$ は, 任意の $S\subseteq N$ に対して $v^L+v^R(S)=v^L(S)+v^R(S)$ で定義され, $v^L+v^R\in\mathcal{G}$ でもあり, $v_u\in\mathcal{IG}$ は任意の $S\subseteq N$ に対して $v_u(S)=[-|v(S)|/2,|v(S)|/2]$ で定義される.

協力区間ゲームにおける Banzhaf 値として, 次の解が提案されている.

定義 7 [8] 次で定義される $\beta^{(I)}:\mathcal{IG}\to I(\mathbb{R})^N$ を区間 Banzhaf 値とよぶ.

$$\beta_i^{(I)L}(v)=\beta_i(v^L)=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{1}{2^{n-1}}\{v^L(S\cup\{i\})-v^L(S)\}$$

$$\beta_i^{(I)R}(v)=\beta_i(v^R)=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{1}{2^{n-1}}\{v^R(S\cup\{i\})-v^R(S)\}$$

3.3. 協力区間ゲームにおける解に関する性質

通常の協力ゲームの解の性質を拡張し, $\mathcal{IG}'\subseteq\mathcal{IG}$ 上の解 $f:\mathcal{IG}'\to I(\mathbb{R})^N$ の性質として, 次のような性質が考えられている.

性質 E 全体合理性 (efficiency)[2]

任意の $v\in\mathcal{IG}'$ に対して次が成り立つとき, f は全体合理性を満たすという.

$$\sum_{i\in N}f_i(v)=v(N)$$

これを緩和した性質として, 次が定義されている.

性質 I-E 中央値に関する全体合理性 (indifference efficiency)[6]

任意の $v\in\mathcal{IG}'$ に対して次が成り立つとき, f は中央値に関する全体合理性を満たすという.

$$\sum_{i\in N}f_i(v)\sim v(N)$$

性質 S 対称性 (symmetry)[2, 6, 8]

任意の $v\in\mathcal{IG}'$ に対して, 任意の $S\subseteq N\setminus\{i,j\}$ で $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$ が成り立つならば $f_i(v)=f_j(v)$ が成り立つとき, f は対称性を満たすという.

性質 A 加法性 (additivity)[2, 6]

$v,w\in\mathcal{IG}'$ が与えられたとき, $v+w$ を任意の $S\subseteq N$ に対して $v+w(S)=v(S)+w(S)$ で定義する. $v,w,v+w\in\mathcal{IG}'$ ならば $f(v+w)=f(v)+f(w)$ が成り立つとき, f は加法性を満たすという.

性質 N ナルプレイヤーの性質 (null player property)

任意の $v \in \mathcal{IG}'$ において，任意の $S \subseteq N \backslash \{i\}$ に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ となるプレイヤー $i \in N$ について $f_i(v) = [0,0]$ のとき，f はナルプレイヤーの性質を満たすという.

性質 I-N 中央値に関するナルプレイヤーの性質 (indifference null player property)[6]

任意の $v \in \mathcal{IG}'$ において，任意の $S \subseteq N \backslash \{i\}$ に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ となるプレイヤー $i \in N$ について $f_i(v) \sim [0,0]$ のとき，f は中央値に関するナルプレイヤーの性質を満たすという.

性質 D ダミー性 (dummy player property)[2, 8]

任意の $v \in \mathcal{IG}'$ において，任意の $S \subseteq N \backslash \{i\}$ に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ となるプレイヤー $i \in N$ について $f_i(v) = v(\{i\})$ が成り立つならば f はダミー性を満たすという.

性質 I-D 中央値に関するダミー性 (indifference dummy player property)

任意の $v \in \mathcal{IG}'$ において，任意の $S \subseteq N \backslash \{i\}$ に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ となるプレイヤー $i \in N$ について $f_i(v) \sim v(\{i\})$ であるならば，f は中央値に関するダミー性を満たすという.

ダミー性は，$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ を $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$ で定義すると，区間の差の定義のしかたによる違いが生じることに注意する.

性質 SM 強単調性 (strong monotonicity)[8]

提携 $S \in 2^N$ におけるプレイヤー i の限界貢献度 $\Delta_i v(S) = (\Delta_i v^L(S), \Delta_i v^R(S))$ を次で定義する.

$$\Delta_i v^L(S) = \begin{cases} v^L(S) - v^R(S \setminus \{i\}) & i \in S \\ v^L(S \cup \{i\}) - v^R(S) & i \notin S \end{cases}$$

$$\Delta_i v^R(S) = \begin{cases} v^R(S) - v^L(S \setminus \{i\}) & i \in S \\ v^R(S \cup \{i\}) - v^L(S) & i \notin S \end{cases}$$

$\Delta_i v = (\Delta_i v^L(S), \Delta_i v^R(S))_{S \in 2^N}$ をプレイヤー i の限界貢献度ベクトルとよぶ．このとき，$v, w \in \mathcal{IG}$ において，任意の i について $\Delta_i v \leq \Delta_i w$ ならば $f_i(v) \leq f_i(w)$ が成り立つとき，f は強単調性を満たすという.

性質 2Eff 二人効率性 (2-efficiency property) [8]

$v \in \mathcal{IG}$ に対して，二人のプレイヤー $i, j \in N$ を一人のプレイヤー p として扱うゲーム $v_p : N_p \to I(\mathbb{R})$ を任意の $S \subseteq N_p \backslash \{p\}$ に対して $v_p(S \cup \{p\}) = v(S \cup \{i, j\})$ と $v_p(S) = v(S)$ で定める．ただし，$N_p = N \backslash \{i, j\} \cup \{p\}$ とする．このとき，

$$f_i(v) + f_j(v) = f_p(v_p)$$

が成り立つならば，$f : \mathcal{IG} \to I(\mathbb{R})^N$ は二人効率性を満たすという.

区間 Shapley 値 $\phi^{(I)}$ は，性質 E, 性質 S, 性質 A, 性質 D を満たす唯一の $\mathcal{IG}_{IM}$ 上の解である [2].

絶対 Shapley 値 $\phi^{(A)}$ は，性質 I-E, 性質 S, 性質 A, 性質 I-N を満たす解であり，また，これらの性質を満たす解は絶対 Shapley 値 $\phi^{(A)}$ と中央値が一致することが示されている [6].

$\mathcal{IG}_{IM}$ のある部分クラスについては，区間 Banzhaf 値 $\beta^{(I)}$ は，性質 S, 性質 D, 性質 SM, 性質 2Eff を満たす唯一の $\mathcal{IG}_2$ 上の解であることが示されている [8].

4. 協力区間ゲームにおける Shapley 値と Banzhaf 値として考えられる定義

ここでは，Shapley 値と Banzhaf 値を協力区間ゲームに拡張した解として考えられるものについて議論する.

4.1. 協力区間ゲームにおける Shapley 値に関する解

改良 Shapley 値は，各提携における利益の中央値から通常の Shapley 値を求め，それを中央値とし，全体合理性を満たすように幅のみに着目した協力区間ゲームの Shapley 値に基づいて $[-v(N)/2, v(N)/2]$ の幅を分け合うことで得られる解であった．しかし，$[-v(N)/2, v(N)/2]$ の幅は，任意の $S \subseteq N$ に対して $v^R - v^L(S) = v^R(S) - v^L(S)$ で定められる通常の協力ゲーム $v^R - v^L$ における Shapley 値に基づいて分配すると考えるほうが自然であると考えられる．そこで，次の解を幅反映 Shapley 値として定義する.

定義 8 次で定義される $\phi^{(IM)} : \mathcal{IG} \to I(\mathbb{R})$ を協力区間ゲームにおける幅反映 Shapley 値とよぶ.

$$\phi_i^{(IM)}(v) = \phi_i\left(\frac{v^L + v^R}{2}\right) + \frac{\phi_i(v^R - v^L)|}{\sum_{i\in N}\phi_i(v^R - v^L)}\left[-\frac{1}{2}|v(N)|, \frac{1}{2}|v(N)|\right]$$

幅反映 Shapley 値をこのように定めると，区間 Shapley 値との関係が次のように得られる.

定理 1 幅反映 Shapley 値は，区間 Shapley 値と一致する.

この定理から，区間 Shapley 値を別の観点から特徴づけることができたことになる.

また，Han らによる絶対 Shapley 値に基づき，全体合理性を満たすように正規化した解として，次の解を定義する.

定義 9 次で定義される $\phi^{(P)} : \mathcal{IG} \to I(\mathbb{R})$ を協力区間ゲームにおける正規化 Shapley 値とよぶ.

$$\begin{aligned}
\phi_i^{(P)L}(v) &= \frac{v^L(N)}{\sum_{i\in N}\phi_i^{(A)L}(v)}\phi_i^{(A)L}(v) \\
&= \frac{v^L(N)}{\sum_{i\in N}\phi_i^{(A)L}(v)}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v^L(S\cup\{i\}) - v^R(S)\} \\
\phi_i^{(P)R}(v) &= \frac{v^R(N)}{\sum_{i\in N}\phi_i^{(A)R}(v)}\phi_i^{(A)R}(v) \\
&= \frac{v^R(N)}{\sum_{i\in N}\phi_i^{(A)R}(v)}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v^R(S\cup\{i\}) - v^L(S)\}
\end{aligned}$$

正規化 Shapley 値は，全体合理性，対称性を満たすが，加法性，ナルゼロ性，中央値に関するナルゼロ性については，$\mathcal{IG}$ では満たさない．

幅反映 Shapley 値において，Shapley 値を Banzhaf 値に置き換えると，次のような定義が得られる．

定義 10 次で定義される $\phi^{(IM)} : \mathcal{IG} \to I(\mathbb{R})$ を協力区間ゲームにおける幅反映 Banzhaf 値とよぶ．

$$\beta_i^{(IM)}(v) = \beta_i\left(\frac{v^L + v^R}{2}\right) + \frac{\beta_i(v^R - v^L)|}{\sum_{i\in N}\beta_i(v^R - v^L)}\left[-\frac{1}{2}|v(N)|, \frac{1}{2}|v(N)|\right]$$

区間 Shapley 値と幅反映 Shapley 値は一致することが示されたが，区間 Banzhaf 値と幅反映 Banzhaf 値は一致するとは限らないことに注意する．

同様に，改良 Shapley 値，絶対 Shapley 値，正規化 Shapley 値について，Shapley 値の代わりに Banzhaf 値に基づいた解をそれぞれ考えることができる．それぞれを改良 Banzhaf 値 $\beta^{(IM)}$，絶対 Banzhaf 値 $\beta^{(A)}$，正規化 Banzhaf 値 $\phi^{(N)}$ と呼ぶ．

5. 提携値の上限値と下限値の差が解の上限値と下限値の差に与える影響

提携によって得られる利益の上限値と下限値の差を大きくするプレイヤーほど，分配される利益の上限値と下限値の差が大きくなると考えるのが自然である．このような観点から，任意の $S \subseteq N\backslash\{i,j\}$ において $|v(S\cup\{i\})| - |v(S)| \leq |v(S\cup\{j\})| - |v(S)|$ ならば，$|f_i(v)| \leq |f_j(v)|$ が成り立つか否かを各解について検討すると，次の命題が得られる．

命題 1 区間 Shapley 値，すなわち幅反映 Shapley 値と，区間 Banzhaf 値，幅反映 Banzhaf 値については，提携によって得られる利益の上限値と下限値の差を大きくするプレイヤーほど，分配される利益の上限値と下限値の差が大きくなる．すなわち，解を f と表すと，区間 Shapley 値，すなわち幅反映 Shapley 値と，区間 Banzhaf 値，幅反映 Banzhaf 値を解として考えたとき，それぞれについて，任意の $S \subseteq N\backslash\{i,j\}$ において $|v(S\cup\{i\})| - |v(S)| \leq |v(S\cup\{j\})| - |v(S)|$ ならば $|f_i(v)| \leq |f_j(v)|$ が成り立つ．

区間 Shapley 値，すなわち幅反映 Shapley 値，および区間 Banzhaf 値，および幅反映 Banzhaf 値については，この性質は成り立たない．

6. 数値例

三つの企業（企業 1，企業 2，企業 3）が共同で事業を行う場合を考える．すなわち，$N = \{1, 2, 3\}$ とする．特性関数 v は各協力関係が成立したときにで得られる利益を表すものとし，v は，$v(\{1\}) = [0, 12]$, $v(\{2\}) = [12, 24]$, $v(\{3\}) = [12, 36]$, $v(\{1, 2\}) = [24, 48]$, $v(\{1, 3\}) = [12, 48]$, $v(\{2, 3\}) = [36, 72]$, $v(\{1, 2, 3\}) = [96, 240]$ で与えられるものとする．このゲームでは，他の企業と比較して，企業 3 が提携によって得られる利益の上限値と下限値の差が大きいプレイヤーとなっていることに注意する．

このとき，区間 Shapley 値 $\phi^{(I)}$，絶対 Shapley 値 $\phi^{(A)}$，改良 Shapley 値 $\phi^{(IM)}$，正規化 Shapley 値 $\phi^{(N)}$，幅反映 Shapley 値 $\phi^{(L)}$，およびそれぞれの上限値と下限値の差と，区間 Banzhaf 値 $\beta^{(I)}$，絶対 Banzhaf 値 $\beta^{(A)}$，改良 Banzhaf 値 $\beta^{(IM)}$，正規化 Banzhaf 値 $\beta^{(N)}$，幅反映 Banzhaf 値 $\beta^{(L)}$，およびそれぞれの上限値と下限値の差は，表 1 で与えられる．

表 1: 数値例における各解の値およびその幅

	$i=1$	$i=2$	$i=3$		$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\phi_i^{(I)}(v)$	$[22,66]$	$[40,84]$	$[34,90]$	$\beta_i^{(I)}(v)$	$[18,54]$	$[36,72]$	$[30,78]$
$\lvert\phi_i^{(I)}(v)\rvert$	44	44	56	$\lvert\beta_i^{(I)}(v)\rvert$	36	36	48
$\phi_i^{(A)}(v)$	$[4,84]$	$[22,102]$	$[22,102]$	$\beta_i^{(A)}(v)$	$[0,72]$	$[18,90]$	$[18,90]$
$\lvert\phi_i^{(A)}(v)\rvert$	80	80	80	$\lvert\beta_i^{(A)}(v)\rvert$	72	72	72
$\phi_i^{(IM)}(v)$	$[20,68]$	$[38,86]$	$[38,86]$	$\beta_i^{(IM)}(v)$	$[12,60]$	$[30,78]$	$[30,78]$
$\lvert\phi_i^{(IM)}(v)\rvert$	48	48	48	$\lvert\beta_i^{(IM)}(v)\rvert$	48	48	48
$\phi_i^{(N)}(v)$	$[8,70]$	$[44,85]$	$[44,85]$	$\beta_i^{(N)}(v)$	$[0,480/7]$	$[48,600/7]$	$[48,600/7]$
$\lvert\phi_i^{(N)}(v)\rvert$	62	41	41	$\lvert\beta_i^{(N)}(v)\rvert$	480/7	264/7	264/7
$\phi_i^{(L)}(v)$	$[22,66]$	$[40,84]$	$[34,90]$	$\beta_i^{(L)}(v)$	$[14,58]$	$[32,76]$	$[26,82]$
$\lvert\phi_i^{(L)}(v)\rvert$	44	44	56	$\lvert\beta_i^{(L)}(v)\rvert$	44	44	56

区間 Shapley 値，すなわち幅反映 Shapley 値，および区間 Banzhaf 値，および幅反映 Banzhaf 値は，提携によって得られる利益の上限値と下限値の差が大きいプレイヤーである企業 3 が，配分される利益でも上限値と下限値の幅が大きくなっている．これに対して，絶対 Shapley 値，改良 Shapley 値，絶対 Banzhaf 値，改良 Banzhaf 値では，どのプレイヤーも上限値と下限値の幅が等しくなっており，提携によって得られる利益の上限値と下限値の差を反映していないことがわかる．

7. おわりに

本研究では，協力区間ゲームにおいて Shapley 値や Banzhaf 値に対応する解として，考えられる解を定義し，それらの解について，提携値の上限値と下限値の差が解の上限値と下限値の差に与える影響など，いくつかの性質を明らかにした．今後の課題として，これらの解の他の性質に関する議論や，他の公理系による合理性の証明，協力区間ゲームにおける他の解に関する議論などが考えられる．

8. 謝辞

本研究の一部は，JSPS 科研費 24710166 の助成，および，大阪大学研究支援員制度の支援により実施されました．

参考文献

[1] S.Z. Alparslan Gök, R. Branzei, S. Tijs, “Convex interval games,” *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences* 2009 (2009) 1-14

[2] S.Z. Alparslan Gök, R. Branzei, S. Tijs, “The interval Shapley value : an axiomatization,” *CEJOR* 18 (2010) 131-140

[3] S.Z. Alparslan Gök, O. Branzei, R. Branzei, S. Tijs, "Set-valued solution concepts using interval-type payoffs for interval games," *Journal of Mathematical Economics* 47 (2011) 621-626

[4] R. Branzei, O. Branzei, S.Z. Alparslan Gök, S. Tijs, "Cooperative interval games:a survey," *CEJOR* 18 (2010) 397-411

[5] R. Branzei, D. Dimitrov, S. Tijs, "Shapley-like values for interval bankruptcy games," *Economics Bulletin* 3, No.8 (2003) 1-8

[6] W. Han, H. Sun, G. Xu, "A new approach of cooperative interval games : The interval core and Shapley value revisited," *Operations Research Letters* 40 (2012) 462-468

[7] L. Mallozzi, V. Scalzo, S. Tijs, "Fuzzy interval cooperative games," *Fuzzy Sets and Systems* 165 (2011) 98-105

[8] L. Pusillo, "Banzhaf like value for games with interval uncertainty," *Czech Economic Review* 7 (2013) 5-14