数理解析研究所講究録
第1914巻 2014年 39-55

測度・距離空間上の解析学
– Cheeger 理論とフラクタル上の解析学

木上 淳
京都大学大学院情報学研究科
e-mail: kigami@i.kyoto-u.ac.jp

1 初めに

近年、測度・距離空間で解析学に対していくつかの試みが行われている。本稿ではそのうちの2つ、Cheeger による測度論的可微分構造の理論とフラクタル上の解析学を取り上げそれらの概説を行うと共に、その間の関係について述べる。

Cheeger [7] による測度論的可微分構造の理論は、可微分多様体の類推として測度・距離空間上に解析学を構築する試みである。その主役は Lipschitz 関数である。Rademacher の定理（$\mathbb{R}^n$ の Lipschitz 関数は殆ど至るところ微分可能）の拡張として、Lipschitz 関数の gradient にあたる概念を upper gradient として拡張し、Sobolev 空間の構成などを行う。詳しくは3節以降に紹介する。この系列の仕事としては、Hajłasz[11] による Sobolev spaces $M^{1,p}(X)$ の構成、Shanmugalingam[26] による Newtonian spaces $N^{1,p}(X)$ の構成などが挙げられる。

フラクタル上の解析学は Kusuoka[23] と Goldstein[9] による Sierpinski gasket 上への（今日では Brown 運動と呼ばれる）拡散過程の構成を嚆矢とする。その代表的な手法は、対象であるフラクタルをグラフによって離散近似し、離散的な Laplacian あるいは Random walk の「適切な」scaling limit をとることで、フラクタル上に Laplacian あるいは拡散過程を構成することである。Sierpinski gasket を始めとする p.c.f self-similar sets に対する研究 [21] や Sierpinski carpet に対する Barlow-Bass の一連の研究 [1, 2, 3, 4, 5] などがある。

この2つの測度・距離空間における解析学へのアプローチは独立に研究されている。両者の間の関係は興味深いが殆ど何も分かっていない。現在のところ、両者の間には後に紹介する Sierpinski gasket 上の測度論的リーマン構造というただ一つの接点しか知られていないのである。この接点をどのように拡張し両者の関係を明らかにしていくための一つの方法について本稿の最後で述べる。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では、復習のため $\mathbb{R}^n$ での Sobolev 空間論、特に Poincareé 不等式について述べる。第3節、4節では Cheeger による測度・距離空間上での測度論的可微分構造の存在の理論を概説する。第5節では Cheeger 理論から測度・距離空間上に導かれる拡散過程の熱核の漸近挙動が Gauss 型の評価を持つことを述べ、このような熱核の挙動はフラクタル上で知られている sub-Gauss 型の挙動とは両立しないことを指摘する。第6節では Sierpinski gasket 上の Brown 運動に対応する Dirichlet form の構成について概説し、第5節でも触れたように Brown 運動の熱核の漸近挙動は sub-Gauss 型であり、Cheeger 理論から導かれるものとは異なることを紹介する。第7節では、Sierpinski gasket 上の測度論的リーマン構造について紹介し、距離を測地線距離、測度をリーマン容量に相当するものに取り換えれば Sierpinski gasket の測度論的リーマン構造は Cheeger 理論から導かれる測度論的可微分構造と一致することを解説する。第8節では、第7節の結果を受けて、一般の測度・距離空間上の拡散過程に対応する Dirichlet form を Cheeger 理論から導かれる Cheeger 2-energy

と同定できるかどうかという問題への一つのアプローチについて紹介する。特に Hino による一般の strongly local regular Dirichlet form に対する測度論的リーマン構造の存在定理について述べる。

仮定と記号: 本稿を通じての仮定と、記号を紹介する。本稿に出てくる距離空間は全て完備かつ arcwise connected とする。また距離空間 (X,d) に対して、$B_d(x,r) = \{y|y \in X, d(x,y) < r\}$ とおく。また、本稿に出てくる測度は全て Borel regular であり、全ての球 $B_d(x,r)$ の測度は有界であるとする。

2 $\mathbb{R}^n$ の Sobolev 空間論

測度・距離空間での Cheeger 理論を述べる前に、そのモデルとなっている $\mathbb{R}^n$ 上の Sobolev 空間の理論と Poincaré 不等式について復習しておく。Cheeger 理論においては、Poincaré 不等式がその大前提として大きな役割を果たす。

Definition 2.1. $p \geq 1$ とする。Sobolev 空間 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ は

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{u|u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ であり超関数の意味の微分 } \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)^n\}.$$

で定義される。 任意の $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$||u||_{1,p} = ||u||_p + ||\nabla u||_p.$$

と定義する。ただし、$||u||_p$ は L^p-norm である。

このとき以下の事実はよく知られている。

- $(W^{1,p}(\mathbb{R}^n), ||\cdot||_{1,p})$ は Banach 空間である.
- **Sovolev 不等式** $1 \leq p < n$ とする。任意の $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$||u||_{\frac{np}{n-p}} \leq C(n,p)||\nabla u||_p.$$

さらに $p > n$ のときは, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ は "連続" である。すなわち

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n,p)|x-y|^{1-\frac{n}{p}}||\nabla u||_p.$$

- **(p,p)-Poincaré 不等式** $1 \leq p < +\infty$ とする。任意の $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ と任意の $x \in X$, $r > 0$ に対して,

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^p dx \leq C(n,p) r^p \fint_{B(x,r)} |\nabla u|^p dx,$$

ただし $B(x,r) = \{y|y \in \mathbb{R}^n, |x-y| < r\}$, $|A|$ は $A \subseteq \mathbb{R}^n$ の n-次元 Lebesgue 測度の値、さらに

$$f_A = \fint_A f dx = \frac{1}{|A|}\int_A f dx.$$

Remark. $|B(x,r)| < +\infty$ なので Poincaré 不等式より $1 \le q \le p$ ならば任意の $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le Cr\left(\fint_{B(x,r)} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

3 Cheeger 理論

この節では、測度・距離空間における Cheeger の理論 (Cheeger[7], Keith[18, 19]) について解説する。(X,d) を距離空間とし、μ は (X,d) 上の Borel regular な測度とする。

Cheeger 理論の中心となるのは Lipschitz 連続な関数である。

Definition 3.1. $f : X \to \mathbb{R}$ が Lipchitz 関数であるとは

$$\mathrm{LIP}(f) = \sup_{x,y\in X, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} < +\infty.$$

が成り立つこと。$f : X \to \mathbb{R}$ が 局所 Lipschitz であるとは $f|_{B(x,r)}$ が任意の $x \in X, r > 0$ で Lipschitz となることである。(X,d) 上の Lipschitz 関数（あるいは局所 Lipschitz 関数）の全体を $\mathcal{L}ip(X)$ （あるいは $\mathcal{L}ip_{\mathrm{loc}}(X)$）であらわす。

$f : X \to \mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{Lip}f(x) = \limsup_{r\downarrow 0} \sup_{y\in B(x,r)} \frac{|f(x) - f(y)|}{r}$$

and

$$\mathrm{lip}f(x) = \liminf_{r\downarrow 0} \sup_{y\in B(x,r)} \frac{|f(x) - f(y)|}{r}.$$

と定義する。

次の定理の仮定である $(1,p)$-Poincaré 不等式と volume doulbling property については次の節で定義を行う。

Theorem 3.2. ある $p \in (1,\infty)$ に対して $(1,p)$-*Poincaré* 不等式 (略して *PI*) が成立し、さらに μ は *volume doubling property* (略して *VD*) を持つとする。このとき (X,d,μ) は次の意味で測度論的可微分構造をもつ。すなわち $\{(X_i, \xi^{(i)})\}_{i\ge 1}$ は次の *1, 2, 3, 4* の性質を持つものが存在する。

1 任意の i に対して X_i は X の可測な部分集合であり $\mu(X_i) > 0$ である。さらに $\mu(X \setminus \cup_{i\ge 1} X_i) = 0$.

2 任意の i に対して $m_i \in \mathbb{N}$ があって $\xi_i = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_{m_i}^{(i)}) \in \mathcal{L}ip(X)^{m_i}$ である。さらに

$$\sup_{i\ge 1} m_i < +\infty,$$

が成り立つ。この m_i の上限を $\{(X_i, \xi_i)\}_{i\ge 1}$ の次元という。

3 任意の i に対して線型写像 $d^i : \mathcal{L}ip_{\mathrm{loc}}(X) \to \{u | u : X_i \to \mathbb{R}, u$ は可測 $\}$ があって次の性質を持つ。μ-*a.e.* (μ に関して殆ど至る) $x \in X_i$ で

$$\limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x) - d^i f(x) \cdot (\xi_i(y) - \xi_i(x))|}{d(x, y)} = 0 \tag{3.1}$$

さらに　$d^i(fg) = fd^i g + gd^i f$ が成り立ち $d^i f$ は零集合を除いて一意に決まる。

4 任意の i と μ-*a.e.* $x \in X_i$ に対して, $\mathbb{R}^{m_i}$ 上のノルム $|\cdot|_{i,x}$ で、 任意の $f \in \mathcal{L}ip_{\mathrm{loc}}(X)$ に対して $|d^i f(x)|_{i,x}$ が可測であり μ-*a.e.* $x \in X_i, \cap X_j$ に対して

$$|d^i f(x)|_{i,x} = |d^j f(x)|_{j,x}$$

となるものがある。 さらに $C > 0$ があって

$$C^{-1} \mathrm{Lip} f(x) \leq |d^i f(x)|_{i,x} \leq C \mathrm{Lip} f(x)$$

が任意の $f \in \mathcal{L}ip_{\mathrm{loc}}(X)$ と任意の i について μ-*a.e.* $x \in X_i$ で成立する。

この定理より、測度論的な意味での tangent bundle

$$TX = \cup_{x \in X} T_x X$$

を

$$T_x X = \left\{ \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi_k^{(i)}} \middle| \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i} \in \mathbb{R} \right\}$$

ただし

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k^{(i)}} f = (d^i f)_k$$

とおくことで定義できる。さらに cotangent bundle T^*X および $f \in \mathcal{L}ip_{\mathrm{loc}}(X)$ に対して section df を定義することもできる。. このとき任意の x に対して T^*X はノルム $|\cdot|_x$ を持って $|df|_x$ は X 上可測である。

Theorem 3.3. $p \in (1, \infty)$ に対して $(1,p)$-*Poincaré* 不等式が成り立ち、μ は *volume doubling property* を持つとする。このとき

$$||f||_{1,p} = ||f||_p + ||df||_p,$$

(ただし $||df||_p = \left(\int_X (|df(x)|_x)^p \mu(dx) \right)^{1/p}$)　で定義するとき、

$$\{u | u \in \mathcal{L}ip_{\mathrm{loc}}(X), ||u||_{1,p} < +\infty\}$$

は *p-closable* である。すなわち $||u_n||_p \to 0$ *and* $||du_n - \varphi||_p \to 0$ *as* $n \to \infty$ ならば $\varphi = 0$ が成り立つ。さらに $\{u | u \in \mathcal{L}ip_{\mathrm{loc}} X, ||u||_{1,p} < +\infty\}$ の $||\cdot||_{1,p}$ に関する完備化を $H^{1,p}(X)$ とおくと $H^{1,p}(X)$ は反射的である。

$H^{1,p}(X)$ を Cheeger の意味の $(1,p)$-Sovolev space、$||df||_p^p$ を Cheeger p-energy と呼ぶ。

Remark. p-closed という性質から $H^{1,p}(X) \subseteq L^p(X)$ であり section df は任意の $f \in H^{1,p}(X)$ に対して well-defined である。

Remark. $c_1, c_2 > 0$ があって、任意の $f \in H^{1,p}(X)$ に対して

$$c_1||\mathrm{Lip} f||_p \leq ||df||_p \leq c_2||\mathrm{Lip} f||_p$$

となることも示すことができる。

Example 3.4 (Heisenberg group). 第一 Heisenberg 群 $\mathbb{H}_1$ は

$$\mathbb{H}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

で定義される。群としての演算は行列のかけ算で与える。このとき $\mathbb{H}_1$ は 3×3-行列の群の部分群となっている。 さて $\sigma : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}xy\right)$$

と定義する。このとき　σ は全単射であり、$\mathbb{H}_1$ の群構造は σ を通して、$\mathbb{R}^2$ 上に非可換群の構造を導く。 $\mathbb{R}^3$ に σ によって導かれた群構造を考えたものも第一 Heisenberg 群と呼ばれる。 このとき $\mathbb{R}^3$ の群演算は

$$(x, y, t) \cdot (x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + \frac{1}{2}(xy' - x'y))$$

となる。$(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$||(x, y, t)|| = ((x^2 + y^2)^2 + t^2)^{1/4}$$

と定義し $a, b \in \mathbb{R}^3$ に対して $d(a, b) = ||a^{-1} \cdot b||$ とおくと、$d(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^3$ 上の距離となる。μ を Lebesgue 測度とすると $(\mathbb{R}^3, d, \mu)$ では (1.1)-Poincaré 不等式が成り立ち、 μ は volume doubling property を持つ。

Example 3.5. $\{M_n\}_{n \geq 1}$ を

$$\inf_{n \geq 1} Ricci(M_n) > -\infty$$

かつ

$$\sup_{n \geq 1} \mathrm{diam}(M_n) < +\infty.$$

をみたすリーマン多様体の列とする。(M, d, μ) を $\{M_n\}_{n \geq 1}$ の Gromov-Hausdorff limit とするとき (M, d, μ) では $(1,1)$-Poincaré 不等式と volume doubling property が成り立つ。このときの M 上の測度 μ は M_n のリーマン測度 μ_n の自然な極限として与えられる。

4 Volume doubling property と Poincaré 不等式

この節では、Cheeger の定理の仮定である volume doubling property と一般の測度・距離空間における Poincaré 不等式について解説する。

(X,d) を距離空間、μ を (X,d) 上の Borel regular な測度とする。

Definition 4.1 (Volume doubling property). μ が volume doubling propety を持つとはある $C>0$ に対して任意の $x\in X$ と $r>0$ で

$$\mu(B_d(x,2r))\le C\mu(B_d(x,r))$$

が成り立つことである。

volume doubling property は各 x でのボール $B_d(x,r)$ の測度の r に関する増大度が（空間に関して一様に）多項式的であることを意味する。

つぎに距離空間における長さを持つ曲線（rectifiable curve）の概念を定義しておく。

Definition 4.2. 連続曲線 $\gamma:[a,b]\to X$ が rectifiable であるとは、

$$\sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1}d(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))|a=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=b\right\}<+\infty. \tag{4.1}$$

を満たすときである。γ が rectifiable であるとき上の上限を γ の長さといい $\ell(\gamma)$ で表す。

Definition 4.3 (Upper gradient[12]). 可測関数 $\rho:X\to\mathbb{R}$ が $f:X\to[0,\infty]$ の upper gradient であるとは、任意の $x,y\in X$ と x と y を結ぶ任意の rectifiable な曲線 γ に対して

$$|f(x)-f(y)|\le\int_\gamma\rho(s)ds \tag{4.2}$$

が成り立つことである。

x と y を結ぶ rectifiable な曲線が存在しないときは、(4.3) は無条件に成り立つ。つまり、X が rectifiable な曲線を持たないときは任意の ρ が任意の f の upper gradient となる。もちろんそのような場合、upper gradient という概念にはあまり意味が無い。また $\rho=\infty$ は常に任意の f の upper gradient となる。

X 上の Lipschitz 関数に対しては常に自明でない upper gradient が存在する。

Lemma 4.4. $f\in\mathcal{L}ip_{\mathrm{loc}}(X)$ のとき $\mathrm{Lip}f$ と $\mathrm{lip}f$ は f の *upper gradient* である。

以上の準備のもとに、Poincaré 不等式の定義を行う。

Definition 4.5 (Poincaré inequality). $1\le q\le p<\infty$ をみたす p,q に対して測度・距離空間 (X,d,μ) で (q,p)-Poincaré 不等式が成立するとは、 ある $C,L\ge1$ があって任意の $f\in\mathcal{L}ip(X)$, 任意の $x\in X$, 任意の $r>0$ と任意の f の upper gradient ρ に対して

$$\left(⨍_{B(x,r)}|f-f_B|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\le Cr\left(⨍_{B(x,Lr)}\rho^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.3}$$

が成り立つことである。

$q' \leq q \leq p \leq p'$ ならば (q,p)-Poincaré 不等式は (q',p')-Poincaré 不等式を導く。$L > 1$ のとき (4.3) は弱 (q,p)-Poincaré 不等式と呼ばれる。$L = 1$ のときは (4.3) は強 (q,p)-Poincaré 不等式を呼ばれる。

Definition 4.6 (quasiconvex). 距離空間 (X,d) が quasiconvex であるとは、ある $C > 0$ があって任意の $x, y \in X$ に対して x と y を結ぶ rectifiable な曲線で長さが $Cd(x,y)$ 以下のものが存在することである。

Poincaré 不等式と quasiconvex という性質の間には次のような関係がある。

Theorem 4.7 (Semmes). $1 \leq q \leq p$ とする。μ が *volume doubling property* を持っており、(X,d,μ) で (q,p)-*Poincaré* 不等式が成立するなら (X,d) は *quasiconvex* である。

さらに次のことも成り立つ。

Theorem 4.8 (Heinonen-Koskela[13]). $1 \leq q \leq p < \infty$ とする。(X,d) は *proper* とする。すなわち任意の $x \in X$ と任意の $r > 0$ で $B_d(x,r)$ は *pre-compact* であるとする。いま (X,d) が *quasiconvex* で (q,p)-*Poincaré* 不等式が成り立つならば (4.3) は任意の *measurable function* f に対して成立する。

5 Cheeger 2-energy と拡散過程

Cheeger の定理が成り立つ場合でも特に $(2,2)$-Poincaré 不等式が成り立つときは Cheeger 2-energy

$$||df||_2^2 = \int_X (||df||_x)^2 \mu(dx)$$

から拡散過程が導かれることがわかる。

Theorem 5.1 (Cheeger). μ が *volume doubling property* を持ち (X,d,μ) で $(2,2)$-*Poincaré* 不等式が成り立つとする。このとき *Cheeger* 2-*energy* は $L^2(X,\mu)$ 上の *local regular Dirichlet from* を与える。つまり、$u, v \in H^{1,2}(X)$ に対して

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{4}\Big(||d(u+v)||_2^2 - ||d(u-v)||_2^2\Big)$$

とおくとき、$\mathcal{E}(\cdot,\cdot)$ は $L^2(X,\mu)$ 上の *local regular Dirichlet form* である。

Dirichlet form は $\mathbb{R}^n$ における Dirichlet 積分 $\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u, \nabla v)dx$ の一般化である。ここでは Dirichlet form の理論については深入りしないが、local regular Dirichlet form に対しては拡散過程 $(\{X_t\}_{t>0}, \{P_x\}_{x\in X})$ と $L^2(X,\mu)$ 上の強連続な semigroup $\{T_t\}_{t>0}$ が導かれて、任意の $f \in L^2(X,\mu)$ と任意の $t > 0$ に対して μ-a.e. $x \in X$ で

$$E_x(f(X_t)) = (T_t f)(x). \tag{5.1}$$

が成り立つことが知られている。($E_x(\cdot)$ は P_x に関する期待値)

さていま $p(t,x,y)$ を拡散過程 $(\{X_t\}_{t>0}, \{P_x\}_{x\in X})$ の熱核 (heat kernel) とする。すなわち、

$$E_x(f(X_t)) = \int_X p(t,x,y) f(y) \mu(dy)$$

が成り立つとする。今の状況 (volume doubling + Poincaré) では $p(t,x,y)$ は null set (拡散過程が訪れる確率が 0 の集合) を除いて well-defined であることが知られている。Saloff-Coste[25] と Grigor'yan[10] によって

Poincaré inequality + volume doubling ⇒ Gaussian heat kernel esitimate

が示されている。Theorem 5.1 の仮定のもとではこの条件が満たされているので、$p(t,x,y)$ は Gaussian heat kernel estimate (略して Gauss 型熱核評価) を満たす。すなわち

$$p(t,x,y) \asymp \frac{c_1}{\mu(B_d(x,\sqrt{t}))} \exp -\Big(c_2 \frac{d(x,y)^2}{t}\Big) \tag{5.2}$$

が任意の $(t,x,y) \in (0,\infty) \times X \times X$ で成り立つ。ただし $\asymp$ は $p(t,x,y)$ が左辺の c_1, c_2 が異なった式で上と下から評価されるという意味である。この熱核の Gauss 型評価 は、Cheeger 理論とフラクタル上の解析の間に決定的な違いがあることを物語っている。実は、Sierpinski gasket や Sierpinski carpet を始めとするフラクタル上の拡散過程の熱核では Gauss 型 ではなく sub-Gaussian heat kernel estimate と呼ばれる次のタイプの評価が成り立っている。すなわち $\beta > 2$ に対して

$$p(t,x,y) \asymp \frac{c_1}{\mu(B_d(x,t^{1/\beta}))} \exp -\Big(c_2 \Big(\frac{d(x,y)^\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{\beta-1}}\Big) \tag{5.3}$$

が任意の $(t,x,y) \in (0,\infty) \times X \times X$ で成り立つ。$\beta = 2$ のときが Gauss 型評価に当る。

この事実から、測度・距離空間上のへの解析学の構築という見地からは、Cheeger 理論とフラクタル上の解析学は全く異なった理論で、それらは無関係であるように見える。しかしながら、第 7 節で示すように Sierpinski gasket については、Cheeger 2-energy とフラクタル上の解析学において構成された Brown 運動に対応する Dirichlet form が一致することが示される。

6 Sierpinski gasket 上の解析学

この節以降では、Seirpinski gasket (略して SG) 上の Brown 運動とそれに付随する Dirichlet form について解説する。Sierpinski gasket 上の Brown 運動に付随する Dirichlet form は Cheeger 理論とフラクタル上の解析学の現時点で知られているただ一つの接点である。

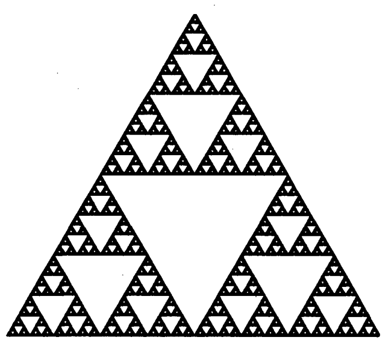

Figure 1: Sierpinski gasket

まずは図形としての Sierpinski gasket の定義を与える。$p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$ を一辺の長さが 1 の正三角形の頂点とする。このとき $i = 1,2,3$ に対して $F_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$F_i(z) = (z - p_i)/2 + p_i$$

で定義する。Sierpinski gasket K は、

$$K = F_1(K) \cup F_2(K) \cup F_3(K)$$

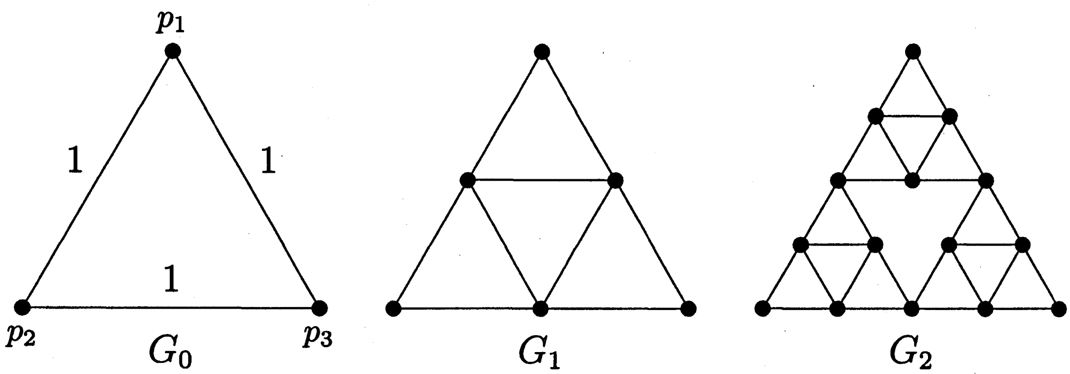

Figure 2: グラフ G_m による Sierpsinski Gasket の近似列

をみたす $\mathbb{C}$ のただ一つの空でないコンパクト集合として定義される。(Figure 1) その Euclid の距離に関する Hausdorff 次元 は $\dim_H K = \dfrac{\log 3}{\log 2}$ である。

SG 上に Brown 運動（あるいは Dirichlet form）を定義するために、そのグラフによる近似列 G_m を構成する。(Figure 2 を参照のこと）グラフ G_m の頂点 V_m は次の式で帰納的に定義される。

$$V_0 = \{p_1, p_2, p_3\}$$
$$V_{m+1} = F_1(V_m) \cup F_2(V_m) \cup F_3(V_m)$$

またその辺 E_m は $E_0 = \{(p_1, p_2), (p_2, p_3), (p_3, p_1)\}$ として

$$E_{m+1} = \{(F_i(p), F_i(q)) | (p, q) \in E_m, i = 1, 2, 3\}$$

で帰納的に与えられる。ここで、$x \in V_m$ の近傍 $V_{m,x}$ を

$$V_{m,x} = \{y | y \in V_m, (x, y) \in E_m \text{または} (y, x) \in E_m\}$$

とする。(Figure 3 参照）すなわち　$V_{m,x}$ は x と G_m において辺で繋がっている頂点の集合である。

ここで、$\ell(V_m) = \{u | u : V_m \to \mathbb{R}\}$ とし G_m 上の自然な離散的 Laplacian $H_m : \ell(V_m) \to \ell(V_m)$ を

$$(H_m u)(x) = H_{m,x} u = \sum_{y \in V_{m,x}} (u(y) - u(x))$$

と定義する。V_m 上の Laplacian H_m のスケーリング極限として　K 上の Laplacian Δ_ν の $x \in V_m$ での値 $(\Delta_\nu u)(x)$ は（下の式の右辺の極限が存在する場合には）下の極限で与えられることになる。(正式の定義は後ほど)

$$(\Delta_\nu u)(x) = \lim_{m \to \infty} 5^m H_{m,x} u$$

ν は SG 上の normalized $\log 3 / \log 2$-次元 Hausdorff 測度である。ν は SG 上の (Euclid の距離に関して) 一様な質量分布に対応し、重み $(1/3, 1/3, 1/3)$ の自己相似測度と一致することが知られている。(Figure 4)　後に述べるように、SG 上では与えられた測度 μ に応じて Laplacian Δ_μ を定義することが出来る。

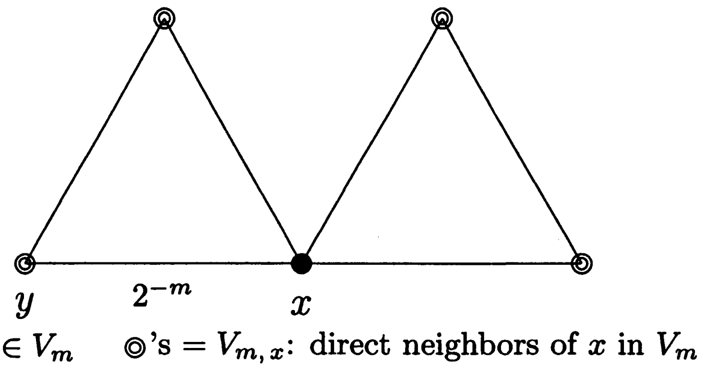

Figure 3: グラフ G_m における近傍の構造

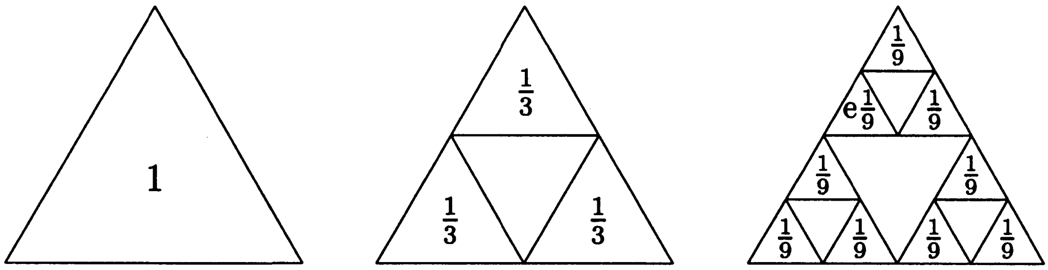

Figure 4: 正規化された $\log 3/\log 2$ 次元 Hausdorff 測度

さて H_m に対応する V_m 上の離散的な Dirichlet form Q_m を $u, v \in \ell(V_m)$ に対して

$$Q_m(u,v) = -{}^t u H_m v$$

で定義する。この Q_m にスケーリング $(5/3)^m$ を掛けたものを $\mathcal{E}_m$ とおく。すなわち

$$\mathcal{E}_m(u,v) = \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{(p,q)\in E_m} (u(p) - u(q))^2$$

である。このとき、任意の $u \in \ell(V_{m+1})$ に対して、

$$\mathcal{E}_m(u,u) \le \mathcal{E}_{m+1}(u,u)$$

が成り立つことがわかる。この事実から $\mathcal{E}_m$ の極限として SG 上の standard resistance form $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が次のように定義でき、自明ではないことがわかる。

$$\mathcal{F} = \{u | u \in C(K), \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u,u) < +\infty\}$$
$$\mathcal{E}(u,v) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u,v)$$

この $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は SG 上の Brown 運動を導く Dirichlet form である。

Theorem 6.1. *μ を SG 上の Borel regular な確率測度で任意の開集合 O に対して $\mu(O)>0$, 任意の有限集合 V に対して $\mu(V)=0$ を満たすとする。このとき $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(K,\mu)$ 上の local regular Dirichlet form になる。特に $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は closed form であり、対応する $L^2(K,\mu)$ 上の non-positive な self-adjoint operator を Δ_μ とするとき、任意の $u\in L^2(K,\mu)$ と任意の $v\in \mathrm{Dom}(\Delta_\mu)$ に対して*

$$\mathcal{E}(u,v)=-\int_K u\Delta_\mu v d\mu.$$

Dirichlet form についての詳しい解説は [8] などを参照して欲しい。本稿を読み進むには、とりあえず「local regular Dirichlet form は (5.1) の関係を持つ拡散過程を導く」ということを知っていれば十分である。とくに $\mu=\nu$ の場合に導かれる拡散過程がいわゆる SG 上の Brown 運動である。さて $\mu=\nu$ の場合、すなわち SG 上の Brown 運動の場合の熱核を $p_\nu(t,x,y)$ とする。解析的な観点からは $p_\nu(t,x,y)$ は SG 上の熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta_\nu u$$

の初期値問題の基本解である。この熱核の漸近挙動については次のことが知られている。

Theorem 6.2 (Barlow-Perkins [6]). *$(t,x,y)\in(0,1]\times K\times K$ において、*

$$p_\nu(t,x,y)\asymp \frac{c_1}{(t^{d_H})^{1/d_w}}\exp\left(-c_2\left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t}\right)^{1/(d_w-1)}\right), \tag{6.1}$$

ただし $d_w=\dfrac{\log 5}{\log 2}$ かつ $d_H=\dfrac{\log 3}{\log 2}$。

d_w は SG の walk 次元と呼ばれる。

(6.1) は (5.3) に紹介した sub-Gaussian heat kernel estimate の $\beta=d_w$ の場合である。$\beta=d_w>2$ であるから、通常の Gauss 型の熱核評価 (5.2) よりは拡散の進む早さが遅いのである。

以前にも述べたように Theorem 6.2 は Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が Cheeger 2-energy とはなっていないことを示す。もう少し正確に言えば、d_E を SG への Euclid の距離の制限するとき、測度・距離空間 (K,d_E,ν) では（任意の p に対して）$(1,p)$-Poincaré 不等式が成り立たず、Cheeger 理論は適用できない。したがって、$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は Cheeger 2-energy ではあり得ないのである。

7 SG 上の測度論的リーマン構造

前節で述べたように、SG 上の standard resistance form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は Euclid の距離 d_E と正規化された $\log 3/\log 2$-次元 Hausdorff 測度 ν の基では Cheeger 2-energy にはなり得ない。しかしながら、距離と測度を変更することで、Cheeger 2-energy と同定することができる。そのために、この節では SG 上の測度論的リーマン構造について解説する。

まず、SG 上の調和関数の概念を導入する。

Proposition 7.1. 任意の $\rho : V_0 \to \mathbb{R}$ に対して次の最小値をとる $u|_{V_0} = \rho$ をみたす $u \in \mathcal{F}$ がただ一つ存在する。

$$\min\{\mathcal{E}(v,v) | v \in \mathcal{F}, v|_{V_0} = \rho\}.$$

上の proposition で与えられた u を境界値 ρ をもつ K 上の調和関数という。ここでは V_0 を SG の境界と考えている。さて、$i = 1,2,3$ に対して $\rho_i : V_0 \to \mathbb{R}$ を $\rho_i(p_j) = \delta_{ij}$ と定義する。(δ_{ij} は Kronecker のデルタ) さらに ψ_i を ρ_i を境界値とする SG 上の調和関数とする。このとき、任意の $\rho : V_0 \to \mathbb{R}$ に対して ρ を境界値とする SG 上の調和関数 u は

$$u = \rho(p_1)\psi_1 + \rho(p_2)\psi_2 + \rho(p_3)\psi_3$$

で与えられることがわかる。ここで、$\Phi : K \to \mathbb{R}^3$ を

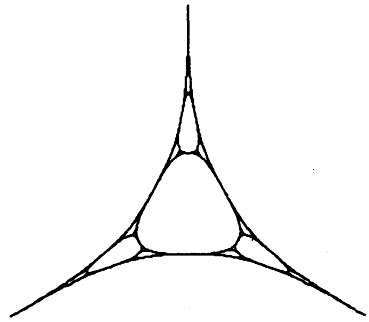

Figure 5: 調和 Sierpinski gasket

$$\Phi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x))$$

と定義すると、$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \equiv 1$ なので $\Phi(x) \in \{(x,y,z) | x+y+z = 1\}$ となる。$\{(x,y,z)|x+y+z\}$ を自然な等長移動で $\mathbb{R}^2$ と同一視し、$\Phi : K \to \mathbb{R}^2$ と考える。

Proposition 7.2. $\Phi : K \to \mathbb{R}^2$ は K と $\Phi(K)$ の間の同相写像である。

$K_H = \Phi(K)$ とおいて、調和 Sierpinski gaket とよぶ。$\Phi|_K$ を通して K と K_H を同一視する。Figure 5 をみると、調和 SG では各点で 1-次元の接空間があるように見える。

下の定理が SG 上の測度論的リーマン構造を与えるものである。

Theorem 7.3 (SG 上の測度論的リーマン構造). K_H 上に *Borel regular* な確率測度 μ_* と μ_*-*a.e.* $x \in K_H$ で定義された 2×2 行列 Z_x で $\operatorname{rank} Z_x = 1$, $\operatorname{trace} Z_x = 1$ をみたすもの、さらに任意の $u \in \mathcal{F}$ に対して、$\widetilde{\nabla} u : K_H \to \mathbb{R}^2$ が存在し、

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_{K_H} (\widetilde{\nabla} u, Z_x \widetilde{\nabla} v) d\mu_* \tag{7.1}$$

が成り立つ。($(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^2$ の標準的な内積) さらに

$$C^1(K_H) = \{u|_{K_H} : \text{ある } K_H \text{ を含む } \mathbb{R}^2 \text{ の開集合 } U \text{ に対して } u \in C^1(U)\}.$$

と定義するとき、$C^1(K_H) \subseteq \mathcal{F}$ であり任意の $v \in C^1(K_H)$ に対して

$$\widetilde{\nabla} v = {}^t\Big(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\Big). \tag{7.2}$$

μ_* は SG 上の Kusuoka 測度と呼ばれリーマン容量に相当する。Z_x は各点におけるリーマン計量、$\widetilde{\nabla} u$ は gradient に相当する。μ_*, Z_x, $\widetilde{\nabla}$ の存在と (7.1) は Kusuoka[24] で与えられた。[24] では ν と μ_* は互いに特異な測度であることも示されている。K_H に関する $\widetilde{\nabla}$ の表現 (7.2) は [20] で示された。さてこの測度論

的リーマン構造に関する測地線距離 $d_*(x,y)$ を次のように定義する。$x,y \in K_H$ に対して、

$$d_*(x,y) = \inf\{K_H \text{ 内で } x \text{ と } y \text{ を結ぶ rectifiable な曲線の長さ }\}.$$

ここで、Theorem 6.1 から SG 上の Laplacian Δ_μ は測度 μ に応じて決まっていたことを思い出そう。それでは、$\mu = \mu_*$ としたとき何が起こるのであろうか。Theorem 6.1 によれば $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(K_H,\mu_*)$ 上の local regular Dirichlet form となり、対応する SG 上の拡散過程と Laplacian Δ_{μ_*} が決まる。この拡散過程の熱核を $p_*(t,x,y)$ とする。すなわち、Δ_{μ_*} から決まる $L^2(K_H,\mu_*)$ 上の強連続な半群を $\{e^{\Delta_{\mu_*}t}\}_{t>0}$ とおくとき、

$$(e^{\Delta_{\mu_*}t}u)(x) = \int_{K_H} p_*(t,x,y)u(y)\mu_*(dy)$$

が成り立つ。この $p_*(t,x,y)$ の漸近挙動は次の定理に示すように Gauss 型となる。

Theorem 7.4 ([22]). $B_*(x,r) = \{y | y \in K_H, d_*(x,y) < r\}$ かつ $V_*(x,r) = \mu_*(B_*(x,r))$ とするとき

$$p_*(t,x,y) \asymp \frac{c_1}{V_{d_*}(x,\sqrt{t})} \exp\left(-c_2 \frac{d_*(x,y)^2}{t}\right).$$

この熱核の Gauss 型の評価から、測度・距離空間 (K_H, d_*, μ_*) においては Cheeger の意味の Poincaré 不等式が成り立つことが示され、Cheeger 2-energy と $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が一致していることが解る。

Theorem 7.5 ([17]). μ_* は距離 d_* に関して *volume doubling property* をもち、(K_H, d_*, μ_*) においては $(2,2)$-*Poincaré* 不等式が成り立つ。さらに、*Cheeger* の *Sobolev* 空間 $H^{1,2}(K_H) = \mathcal{F}$ であり任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して μ_*-*a.e.*$x \in K_H$ で $||df||_x^2 = (\widetilde{\nabla} f(x), Z_x \widetilde{\nabla} f(x))$ が成り立つ。

このように、もともとの距離 d_E と測度 ν に関しては Cheeger 理論との関係は見いだせなかったのであるが、距離と測度を測度論的リーマン構造から決まる d_* と μ_* に取り換えることで Cheeger の測度論的可微分構造と測度論的リーマン構造が一致することが示されたのである。

ここで特に注意しておきたいのは、フラクタル上の解析学によって SG 上の standard resistance form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ がまず構成され、その $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の構造を調べることで d_* と μ_* が見いだされたことである。最終的な結果として $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は Cheeger 理論から導かれることが解ったのであり、d_* と μ_* が得られなければ Cheeger 理論を用いて $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が構成できないのである。

8 一般化への道

前節で述べたように、Cheeger 理論とフラクタル上の解析学の現在知られているただ一つの接点 Sierpinski gasket においては、Dirichlet form に付随する測度論的リーマン構造から決まる測地線距離 d_* とリーマン容量にあたる測度 μ_* が重

要な役割を果たした。本節ではこのような関係を一般化するための一つの方向として Hino による strongly local regular Dirichlet form に対する測度論的リーマン構造の構成を紹介する。strongly local regular Dirichlet form については詳しくは [8] を参照してもらいたい。ここでは strongly local regular Dirichlet form からは自然に拡散過程が導かれるということを言及するに留めておく。

(X, d, μ) を測度・距離空間とし、$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(X, \mu)$ 上の strongly local regular Dirichlet from とする。($\mathcal{F}$ は $L^2(X, \mu)$ の稠密な部分集合、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 上の双線型な非負値の２次形式）このとき、各 $f \in \mathcal{F} \cap L^\infty(X, \mu)$ には energy 測度と呼ばれる測度 μ_f が対応する。

Proposition 8.1 (**Energy measure**). 任意の $f \in \mathcal{F} \cap L^\infty(X, \mu)$ に対して (X, d) 上の *Borel regular measure* μ_f があって任意の $g \in \mathcal{F} \cap C_0(X)$ に対して、

$$\int_X g d\mu_f = 2\mathcal{E}(f, fg) - \mathcal{E}(f^2, g)$$

が成り立つ。ただし $C_0(X)$ は X 上の *support compact* で連続な実数値関数の全体である。

μ_f は f の energy 測度と呼ばれる。

$$\int_X d\mu_f = 2\mathcal{E}(f, f)$$

が成り立つことに注意して欲しい。Hino は [14] で次のことを示した。

Theorem 8.2. 任意の $f \in \mathcal{F} \cap L^\infty(X, \mu)$ に対して μ_f が μ に対して絶対連続となるような (X, d) 上の *Borel regular* な測度 μ が存在する。

上の Theorem で与えられる μ のなかで、ある意味で最小のものを minimal energy dominant measure と呼ぶ。さらに Hino は [14] で strongly local regular Dirichlet form の index という量を定義した。index は Martigale 次元とも呼ばれ、フラクタル上の Dirichlet form に関しては Kusuoka が [24] においてすでに定義を与え、例えば SG の場合には 1 であることを示している。この index = Martingale 次元はリーマン多様体の接空間の次元に対応する量であることが、次に紹介する Theorem 8.3 から解る。一般に index は ∞ も含めた自然数の値をとる。[16] において Hino は 2 次元に埋め込まれる Sierpinski carpet の場合にも index が 1 であることを示した。

Hino は [15] において一般の strongly local regular Dirichlet form に対する測度論的リーマン構造の存在を示した。

Theorem 8.3 (Measurable Riemannian structure [15]). μ を *minimal energy dominant measure* とし、$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の *index* p は有限であるとする。このとき $\nabla : \mathcal{F} \to \{\textit{measurable functions on } X\}^p$ と μ*-a.e.* $x \in X$ で $p \times p$ 行列 Z_x が存在し任意の $u, v \in \mathcal{F}$ に対して

$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2} \int_X (Z_x \nabla u, \nabla v) \mu(dx)$$

が成立する。ただし $(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^p$ の標準的な内積である。特に、$f \in \mathcal{F} \cap L^\infty(X,\mu)$ ならば、

$$\frac{d\mu_f}{d\mu} = (Z_x \nabla f, \nabla f)$$

この Theorem は測度・距離空間上の一般の strongly local regular Dirichlet form を Cheeger 理論から来る Cheeger 2-energy と同定するための一つの処方せんを与えてくれる。すなわち、空間の測度としては minimal energy dominant measure をとるべきであることを教えてくれる。ただ現段階ではこの測度論的リーマン構造に対応する測地線距離の存在が解っていない。近い将来、この測地線距離の構成の問題が解決され、それを通じて strongly local regular Dirichlet form と Cheeger 理論の関係が明らかになる、すなわち測度論的可微分構造と測度論的リーマン構造の関係が明らかになることが期待される。

References

[1] M. T. Barlow and R. F. Bass, *The construction of Brownian motion on the Sierpinski carpet*, Ann. Inst. Henri Poincaré **25** (1989), 225–257.

[2] ———, *Local time for Brownian motion on the Sierpinski carpet*, Probab. Theory Related Fields **85** (1990), 91–104.

[3] ———, *On the resistance of the Sierpinski carpet*, Proc. R. Soc. London A **431** (1990), 354–360.

[4] ———, *Transition densities for Brownian motion on the Sierpinski carpet*, Probab. Theory Related Fields **91** (1992), 307–330.

[5] ———, *Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets*, Canad. J. Math. **51** (1999), 673–744.

[6] M. T. Barlow and E. A. Perkins, *Brownian motion on the Sierpinski gasket*, Probab. Theory Related Fields **79** (1988), 542–624.

[7] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **3** (1999), 428–517.

[8] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, de Gruyter Studies in Math. vol. 19, de Gruyter, Berlin, 1994.

[9] S. Goldstein, *Random walks and diffusions on fractals*, Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems (H. Kesten, ed.), IMA Math. Appl., vol. 8, Springer, 1987, pp. 121–129.

[10] A. Grigor'yan, *The heat equation on noncompact Riemannian manifolds. (in Russian)*, Mat. Sb. **182** (1991), 55–87, English translation in Math. USSR-Sb. 72(1992), 47–77.

[11] P. Hajłasz, *Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces*, Pontential Analysis **5** (1996), 403–415.

[12] J. Heinonen and P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta. Math. **181** (1998), 1 - 61.

[13] ______, *A note on Lipschitz functions, upper gradients and the Poincaré inequality*, New Zealand Math. J. **28** (1999), 37–42.

[14] M. Hino, *Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals*, Proc. London Math. Soc. (3) **100** (2010), 269–302.

[15] ______, *Measurable riemannian structures associated with strong local dirichlet forms*, Math. Nachr. **286** (2013), 1466–1478.

[16] ______, *Upper estimate of martingale dimension for self-similar fractals*, Probab. Theory Related Fields **156** (2013), 739–793.

[17] N. Kajino, *Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure on the Sierpiski gasket*, Contemporary Math. **600** (2013), 91–133.

[18] S. Keith, *A differentiable structure for metric measure spaces*, Adv. Math. **183** (2004), 271–315.

[19] ______, *Measurable differentiable structures and the Poincaré inequality*, Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), 1127–1150.

[20] J. Kigami, *Harmonic metric and Dirichlet form on the Sierpinski gasket*, Asymptotic problems in probability theory: stochastic models and diffusions on fractals (K. D. Elworthy and N. Ikeda, eds.), Pitman Research Notes in Math., vol. 283, Longman, 1993, pp. 201–218.

[21] ______, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Math. vol. 143, Cambridge University Press, 2001.

[22] ______, *Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket: the Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate*, Math. Ann. **340** (2008), 781–804.

[23] S. Kusuoka, *A diffusion process on a fractal*, Probabilistic Methods on Mathematical Physics, Proc. of Taniguchi International Symp. (Katata & Kyoto, 1985) (Tokyo) (K. Ito and N. Ikeda, eds.), Kinokuniya, 1987, pp. 251–274.

[24] ______, *Dirichlet forms on fractals and products of random matrices*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 659–680.

[25] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities*, Internat. Math. Res. Notices (1992), 27–38.

[26] N. Shanmugalingam, *Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoamer. **16** (2000), 243–279.