数理解析研究所講究録
第1914巻 2014年 76-93

Non-trivial ω-limit sets and oscillating solutions in a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass[*1]

山田 哲也[*2]

1 導入

本論説では, 以下の初期値問題について考察する.

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u(\nabla N * u)), & t > 0,\, x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,t) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}
$$

ただし, $N(x)$ は Newton ポテンシャルで, $(\nabla N * u)(t,x)$ は

$$
(\nabla N * u)(t,x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} u(t,y)\, dy, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^2
$$

とする.

方程式 (P) は細胞性粘菌の集中現象を記述する Keller-Segel 方程式に由来する方程式で, $u(t,x)$ は時刻 $t>0$, 場所 $x \in \mathbb{R}^2$ での粘菌の個体密度を表している.

非負な初期値 u_0 に対して適当な条件を仮定すると, 非負解 $u(t;u_0)$ は以下の等式を満たす:

$$
\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx, \quad t > 0. \tag{1.1}
$$

上記の性質 (1.1) は質量保存と呼ばれ, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx$ の値が (P) の非負解の大域的存在・非存在に大きく関わる:

Case 1 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx > 8\pi$ の場合 ([1, 7, 12])

(P) の非負解は有限時間で爆発する.

Case 2 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx < 8\pi$ の場合 ([2, 6, 7, 8, 10, 17, 18])

(P) の非負解は時間大域的に存在する. また時刻が十分経つと, その解は球対称な (P) の自己相似解に近づきながら 0 に減衰する.

Case 3 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$ の場合

---

*1 本研究は Julián López-Gómez 氏 (Univ. Complutense de Madrid) と永井敏隆氏 (広島大学) との間で行われた共同研究 [15] に基づく.

*2 所属: 福井工業高等専門学校一般科目教室自然科学系 Email: yamada@fukui-nct.ac.jp

(P) の非負解は時間大域的に存在する ([19]).

ここで, Case 3 における解の時刻無限大での挙動はどうなっているのだろうか? これを説明するために, ω 極限集合の概念を導入する.

定義 1.1. $u(t,x;u_0)$ を, u_0 を初期値とする (P) の時間大域解とする. このとき,

$$w(u_0) = \{\varphi \mid t_n \to \infty \text{ を満たすある数列 } t_n \text{に対して, } \lim_{n\to\infty} \|u(t_n) - \varphi\|_{L^\infty} = 0\}$$

を ω 極限集合と呼ぶ.

上記の ω 極限集合 $\omega(u_0)$ を用いて, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$ の場合の結果を整理すると, 以下のようになる:

(a) ([5]) $u_0 \log u_0, |x|^2 u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ の下で,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty, \quad \lim_{t\to\infty} u(t,\cdot) = 8\pi\delta_{x_0} \quad (\text{測度の意味で})$$

が成り立つ. ただし δ_{x_0} は点 x_0 におけるデルタ関数で, x_0 は u_0 の重心, すなわち $x_0 = \int_{\mathbb{R}^2} x u_0(x)\,dx/(8\pi)$ である. 従って,

$$\omega(u_0) = \emptyset$$

となる.

(b) ([2, 4, 14]) ある $b > 0$ に対して, 以下の汎関数の u_0 での値

$$\mathcal{H}_b[u_0] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sqrt{u_0(x)} - \sqrt{\theta_{b,0}(x)}\right)^2 (\theta_{b,0}(x))^{-1/2}\,dx \tag{1.2}$$

が有限である (よって, $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $|x|^2 u_0 \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ である) ならば, (P) の非負解は時間大域的に存在して有界である. さらに,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \theta_{b,x_0}\|_{L^p} = 0, \quad 1 \le p \le \infty.$$

従って,

$$\omega(u_0) = \{\theta_{b,x_0}\}$$

となる. ただし,

$$\theta_{b,X}(x) = \frac{8b}{(|x-X|^2 + b)^2}, \quad b > 0,\ X \in \mathbb{R}^2$$

は (P) の定常解で, $\|\theta_{b,X}\|_{L^1} = 8\pi$, $|x|\theta_{b,X} \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $|x|^2\theta_{b,X} \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ を満たす. また, x_0 は u_0 の重心, すなわち, $x_0 = \int_{\mathbb{R}^2} x u_0(x)\,dx/8\pi$ である.

(c) ([20]) $0 < a < b$ とする. このとき,

$$\{\theta_c \,|\, a \le c \le b\} \subset \omega(u_0)$$

が成り立つような非負かつ**球対称な**初期値 u_0 が存在する.

以後, 初期値 u_0 を $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$ を満たす非負な L^1 関数とする. 本論説では, ω 極限集合 $\omega(u_0)$ を調べることで, (P) の有界な時間大域解の挙動を考察する.

2 主結果

この節では, 本論説の主結果を紹介する.

定理 2.1. 初期値 u_0 に対して, 次を仮定する:

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2),\ u_0 \ge 0,\ \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi,\ \log(1+|x|)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2). \tag{2.1}$$

また, (P) の非負解 $u(t)$ は時間大域的で, 以下を満たすものとする: ある $\tau > 0$ に対して

$$\sup_{t \ge \tau} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty. \tag{2.2}$$

このとき, 以下の (i)–(iv) が成り立つ:

(i) 軌道 $\{u(t) \,|\, t \ge \tau\}$ は $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ において相対コンパクトである.
(ii) ω 極限集合 $w(u_0)$ はコンパクトかつ連結な空でない $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ の部分集合である.
(iii) $w(u_0) \subset \{\theta_{b,x_0} \mid b > 0, x_0 \in \mathbb{R}^2\}$.
(iv) (2.1) に加えて, さらに u_0 がある点 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に関して**球対称**であるならば, $\omega(u_0) = \{\theta_{c,x_0} \mid a \le c \le b\}$ となる $0 < a \le b$ が存在する.

よって, 既知結果 (b) と定理 2.1 の (iv) より**非負かつ球対称**である (P) の有界な時間大域解はどちらか一方を満たすことがわかる:

(A) $t \to \infty$ とすると, ある定常解に収束する.
(B) 2 つの定常解の間を振動する.

さて, 上記の (B) のような解は実際にあるのだろうか? この問いに関しては, [2] の中で予想されており, [20] で部分的な結果 (c) が得られていた.

本論説では, [2] で提出された予想を肯定的に解決することに成功した. 実際, 得られた結果は以下のとおりである.

定理 2.2. $0 < a < b$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ とする．このとき, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に関して**球対称**である非負な初期値 u_0 が存在して, 以下の条件を満たす:

(i) $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} xu_0(x)\,dx = 8\pi x_0$.
(ii) 十分大きい $|x|$ に対して, $C_1|x|^{-4} \le u_0(x) \le C_2|x|^{-4}$.
(iii) $\omega(u_0) = \{\theta_{c,x_0} \mid a \le c \le b\}$.

最後に, 以下の性質を満たす (P) の有界な時間大域解の存在がわかった.

定理 2.3. $0 < a < b$ とする．また, ε_n を $\varepsilon_n \downarrow 0\,(n \uparrow \infty)$ を満たす列とする．このとき, $t_n \uparrow \infty\,(n \uparrow \infty)$ を満たす時間列 t_n と以下の条件を満たす (必ずしも球対称ではない) 非負な初期値 u_0 が存在する:

(i) $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} xu_0(x)\,dx = 0$.
(ii) 十分大きい $|x|$ に対して, $C_1|x|^{-4} \le u_0(x) \le C_2|x|^{-4}$.
(iii) $1 \le p \le \infty$ に対して,

$$\|u(t_n;u_0) - \theta_{a,0}\|_{L^p} < \varepsilon_n \quad n \text{ が偶数},$$
$$\|u(t_n;u_0) - \theta_{b,0}\|_{L^p} < \varepsilon_n \quad n \text{ が奇数}.$$

従って, $(a,0)$ と $(b,0)$ を結ぶ $(0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ における連続曲線 $\{(c(s),x(s)) \mid 0 \le s \le 1\}$ が存在して,

$$\{\theta_{c(s),x(s)} \mid 0 \le s \le 1\} \subset \omega(u_0)$$

を満たすことがわかる.

この節を終える前に, 本論説における第 3 節以降の内容を紹介する．第 3 節では, (P) の *mild solution* を定義し, その時間局所解の存在と性質を述べた後, 本論説で用いる結果を紹介する．第 4 節では, 定理 2.1 の (i) から (iii) の証明の概要を述べる．定理 2.2 と定理 2.3 については, 同様の考え方で証明することができるので, 定理 2.2 の証明の概要のみを第 5 節で述べる．尚, 定理 2.1 の (iv) と定理 2.3 の詳しい証明は [15] を参照されたい.

3 (P) の時間局所解と本論説で用いる結果

最初に, (P) の時間局所解とその性質について述べる．まず (P) の *mild solution* と呼ばれる解を定義する.

定義 3.1. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $T \in (0,\infty)$ とする. $[0,T) \times \mathbb{R}^2$ 上の関数 u が以下を満たすとき, $u(t)$ を $[0,T)$ における (P) の *mild solution* という:

(i) $u \in C([0,T); L^1(\mathbb{R}^2)) \cap C((0,T); L^{4/3}(\mathbb{R}^2))$, $\sup_{0<t<T} t^{1/4} \|u(t)\|_{L^{4/3}} < \infty$,

(ii) $u(t)$ は $u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-s)\Delta}(u(s)(\nabla N * u)(s))\, ds$, $0 < t < T$ を満たす. ただし $e^{t\Delta}$ は熱半群, すなわち,

$$(e^{t\Delta} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t, x-y) f(y)\, dy, \quad G(t,x) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

(iii) u を $[0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ 上の関数とする. 任意の $T \in (0,\infty)$ に対して, $u(t)$ が $[0,T)$ における (P) の *mild solution* であるとき, $u(t)$ を大域的 *mild solution* という.

上記の (P) の *mild solution* は, 時間局所的に存在して, 以下の性質を満たす (証明は [11] 参照).

命題 3.1. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ とする. このとき, $T \in (0,\infty)$ が存在して, $[0,T)$ における (P) の *mild solution* $u(t)$ がただ 1 つ存在する. また, $u(t)$ は以下の性質を満たす.

(i) $\lim_{t\to 0} \|u(t) - u_0\|_{L^1} = 0$.

(ii) 任意の $1 \le q \le \infty$ に対して,

$$u \in C((0,T); L^q(\mathbb{R}^2)), \quad \sup_{0<t<T} t^{1-1/q} \|u(t)\|_{L^q} < \infty.$$

(iii) すべての $l \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$, $1 < q < \infty$ に対して, $\partial_t^l \partial_x^\alpha u \in C((0,T); L^q(\mathbb{R}^2))$. ただし $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_x^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}$ とする.

(iv) u は以下の方程式の古典解である:

$$\partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u(\nabla N * u)), \quad 0 < t < T,\, x \in \mathbb{R}^2.$$

(v) すべての $t \in (0,T)$ に対して, $\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx$.

(vi) $u_0 \ge 0$ かつ $u_0 \not\equiv 0$ ならば, すべての $(0,T) \times \mathbb{R}^2$ に対して $u(t,x) > 0$.

(vii) $u_0 \log(1+|x|) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ならば, $u(t)\log(1+|x|) \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

次に, 本論説で用いるいくつかの結果を紹介する. まず非負で有界な (P) の時間大域解は以下を満たす.

命題 3.2 ([14]). $u_0 \ge 0$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ で, $u(t)$ を $\sup_{t\ge 0} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty$ を満たす非負で時間大域的な (P) の *mild solution* であるとする. このとき, 以下の評価が成

り立つ:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\geq 2}\|u(t)\|_{W^{1,p}}<\infty,\quad 2\leq p<\infty,\\
&\sup_{t\geq 1}\int_t^{t+1}(\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2+\|\Delta u(t)\|_{L^2}^2)\,ds<\infty.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

ただし $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ は $W^{1,p}$ のノルムである.

定理 2.1 を証明する上で鍵となるのは, 以下の 2 つの結果である.

命題 3.3 ([9]). $v\in C(\mathbb{R}^2)$ は以下の方程式を満たすものとする:

$$
\begin{cases}
-\Delta v=e^v, & x\in\mathbb{R}^2,\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}e^v\,dx<\infty.
\end{cases} \tag{3.2}
$$

このとき, v は球対称である, すなわち, ある $\mu>0$ と $y_0\in\mathbb{R}^2$ が存在して,

$$
v(x)=\log\frac{32\mu^2}{(\mu^2|x-y_0|^2+4)^2},\quad x\in\mathbb{R}^2
$$

となる.

命題 3.4. [15, 補題 4.2, 命題 4.2] $u_0\geq 0$, $u_0\in L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2}u_0(x)\,dx=8\pi$, $u_0\log(1+|x|)\in L^1(\mathbb{R}^2)$ で, $u(t)$ を非負で時間大域的な (P) の *mild solution* であるとする. このとき, 以下の (i), (ii) が成り立つ:

(1) 任意の $t\geq 0$ に対して, (P) の自由エネルギー

$$
\mathcal{F}[u(t)]=\int_{\mathbb{R}^2}u(t)\log u(t)\,dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}u(t)(N*u)(t)\,dx
$$

は有限である.

(2) 以下の不等式が成り立つ:

$$
\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^2}|2\nabla\sqrt{u}-\sqrt{u}(\nabla N*u)|^2\,dxdt\leq\mathcal{F}[u_0]+C_{HLS}(8\pi). \tag{3.3}
$$

ただし $C_{HLS}(8\pi)=8\pi(1-3\log 2)$ である.

Proof. (2) の証明のみ述べる. まず (P) の自由エネルギー $\mathcal{F}[u(t)]$ の第 2 項は

$$
-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}u(t)(N*u)(t)\,dx=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}u(t,x)u(t,y)\log|x-y|\,dxdy
$$

となる. よって, (P) の自由エネルギー $\mathcal{F}[u(t)]$ は以下のように書くことができる:

$$\mathcal{F}[u(t)] = \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \log u(t)\, dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)u(t,y) \log |x-y|\, dxdy. \tag{3.4}$$

(3.4) の右辺を評価するために, 対数型 Hardy–Littlewood–Sobolev の不等式を適用する. これは以下のような不等式である:

f は非負で, $f, f\log f, f\log(1+|x|^2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ であるとする. このとき,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \log f\, dx + \frac{2}{M} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(x)f(y) \log |x-y|\, dxdy \geq -C_{HLS}(M) \tag{3.5}$$

が成り立つ. ただし $C_{HLS}(M) = M(1+\pi-\log M)$, $M = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx$ である.

ここで $f = u$ とし, $\int_{\mathbb{R}^2} u(t)\, dx = 8\pi\, (t>0)$ に注意して, (3.5) を用いると, (3.4) の右辺は

$$\mathcal{F}[u(t)] \geq -C_{HLS}(8\pi) = -8\pi(1-3\log 2) \tag{3.6}$$

と評価される.

最後に, [7] で得られた以下のような不等式

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |2\nabla\sqrt{u} - \sqrt{u}(\nabla N * u)|^2\, dxds \leq \mathcal{F}[u_0] - \mathcal{F}[u(t)], \quad t>0.$$

と (3.6) を組み合わせれば, (3.3) を得る. □

定理 2.2 を証明するために, 以下のような集合を準備する.

定義 3.2. 任意の $a>0$ と $R_0>0$ に対して, 以下の (i)–(iv) を満たす関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ の集合を, $X(a,R_0)$ と定義する.

(i) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx = 8\pi$,
(ii) $\|f\|_{L^\infty} \leq \|\theta_{a,0}\|_{L^\infty} = 8/a$,
(iii) $f(x) \geq f(y)$, $|x| < R_0$, $|y| = R_0$,
(iv) $f(x) \geq \theta_{a,0}(x)$, $|x| \geq R_0$.

このとき, 集合 $X(a,R_0)$ について, 以下の定理が成り立つ.

命題 3.5. [15, 定理 6.1] すべての $a>0$, $R_0>0$ に対して, v_0 が $X(a,R_0)$ の元であれば, v_0 を初期値とする (P) の *mild solution* $u(t;v_0)$ は時間大域的に存在する. また, $b \in (0,a)$ が存在して,

$$\sup_{v_0 \in X(a,R_0)} \sup_{t>0} \|u(t;v_0)\|_{L^p} \leq \|\theta_{b,0}\|_{L^p} < \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

最後に, 初期値に関する Lipschitz 連続性を紹介して, この節を終える.

命題 3.6. [15, 命題 3.1] $u_{0,i}\,(i=1,2)$ を $u_{0,i}\in L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ を満たす非負な関数とする. また, $u_i\,(i=1,2)$ は $u_{0,i}$ を初期値とする非負な (P) の時間大域的 *mild solution* で,

$$\sup_{t\geq 0}\|u_i(t)\|_{L^\infty}<\infty,\quad i=1,2.$$

を満たすものとする. このとき, すべての $t>0$ に対して

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L^\infty}\leq\|u_{0,1}-u_{0,2}\|_{L^\infty}+C\|u_{0,1}-u_{0,2}\|_{L^{4/3}}^{1/3}t^{1/6}e^{Bt} \tag{3.7}$$

が成り立つ.

4 定理 2.1 の証明の概略

まず初期値 u_0 と (2.2) に関して

$$\begin{aligned}&u_0\geq 0,\quad u_0\in L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^\infty(\mathbb{R}^2),\quad \int_{\mathbb{R}^2}u_0(x)\,dx=8\pi,\\&u_0\log(1+|x|)\in L^1(\mathbb{R}^2),\quad \sup_{t>0}\|u(t)\|_{L^\infty}<\infty\end{aligned} \tag{4.1}$$

と仮定しても一般性を失わないことに注意する.

これから定理 2.1 を 6 つの Step にわけて証明する.

Step 1. (4.1) から任意の $1\leq p\leq\infty$ に対して

$$\sup_{t>0}\|u(t)\|_{L^p}<\infty \tag{4.2}$$

が成り立つことに注意する. このとき, (3.1) より (P) の大域解 $u(t)$ は

$$\sup_{t\geq 2}\|u(t)\|_{W^{1,p}}<\infty,\quad 2\leq p<\infty, \tag{4.3}$$

$$\sup_{t\geq 1}\int_t^{t+1}(\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2+\|\Delta u(t)\|_{L^2}^2)\,ds<\infty. \tag{4.4}$$

を満たす.

時間列 $\{t_n\}$ を $t_n\geq 2$ かつ $\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ を満たす単調増加列する. また, 任意の $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^2$ に対して, $u_n(t,x):=u(t+t_n,x)$ とおく. (4.3) より任意の $2<p<\infty$ に対して, 以下を得る:

$$\sup_{n\geq 1}\|u_n(0)\|_{W^{1,p}}<\infty. \tag{4.5}$$

$B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < R\}$ とする. (4.5) と, $2 < p < \infty$ と $R > 0$ に対して, 埋め込み $W^{1,p}(B_R) \hookrightarrow C(\overline{B_R})$ はコンパクトであることから, 部分列 $\{u_{n(j)}(0)\}$ と $\varphi \in C(\mathbb{R}^2)$ が存在して, 以下を満たす:

- 各 $R > 0$ に対して, $u_{n(j)}(0)$ は φ に $\overline{B_R}$ 上一様収束する.

また, $u(t_n) \geq 0$ より $\varphi \geq 0$ であり, (4.2) と Fatou の補題を用いると, φ は $L^p(\mathbb{R}^2)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ の元であることもわかる. さらに, (4.5) より $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ と

$$\lim_{n\to\infty} u_{n(j)}(0) = \varphi \text{ weakly in } W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$$

と仮定してもよい.

Step 2. ある $b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\varphi = \theta_{b,x_0} \tag{4.6}$$

が成り立つことを仮定する. このとき, $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} \theta_{b,x_0}(x)\,dx = 8\pi$ を用いれば, $\lim_{j\to\infty} \|u_{n(j)}(0) - \varphi\|_{L^1} = 0$ となるので,

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{n(j)}(0) - \varphi\|_{L^p} = 0, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{4.7}$$

がいえる. ここで, $2 < q < \infty$ とする. (3.1) と $\varphi \in W^{1,q}$ に注意して, (4.7) と Sobolev の不等式 $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla f\|_{L^q}^{2/q}\|f\|_{L^q}^{1-2/q}$ $(f \in W^{1,q}(\mathbb{R}^2))$ を適用すると,

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{n(j)}(0) - \varphi\|_{L^\infty} = 0$$

となる. 故に, 軌道 $\{u(t) \,|\, t \geq 0\}$ は $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ において相対コンパクトである. また, [13] から ω 極限集合 $\omega(u_0)$ はコンパクトかつ連結な空でない $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ の部分集合である. さらに, (4.6) より $\omega(u_0) \subset \{\theta_{b,x_0} \,|\, b > 0, x_0 \in \mathbb{R}^2\}$ も成り立つ.

これから定理 2.1 の証明を完成させるために, ある $b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して (4.6), すなわち, $\varphi = \theta_{b,x_0}$ が成り立つことを証明しよう.

Step 3. **Step 1** で得られた極限関数 φ は, 以下の等式を満たす:

$$2\nabla\sqrt{\varphi} - \sqrt{\varphi}(\nabla N * \varphi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{4.8}$$

ひとまず (4.8) の証明を後回しにして, (4.6) の証明を先に進めよう.

以下で定義された

$$\eta(x) := -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} (\log|x-y| - \log|y|)\varphi(y)\,dy$$

は $\nabla\eta = \nabla N * \varphi\,(x \in \mathbb{R}^2)$ を満たす. ここで, $\varphi \in W^{1,q}(\mathbb{R}^2)\,(2 < q < \infty)$ に注意すると, Morrey の不等式より φ は Hölder 連続である. よって, 楕円型方程式の正則性から, η は $C^2(\mathbb{R}^2)$ の元で, 方程式 $-\Delta\eta = \varphi$, $x \in \mathbb{R}^2$ の古典解となる. 従って, $2\nabla\sqrt{\varphi} - \sqrt{\varphi}\nabla\eta = 0\,(x \in \mathbb{R}^2)$ となり, $\nabla(\sqrt{\varphi}e^{-\eta/2}) = 0$ を得る. その結果, ある正の定数 λ に対して, $\varphi = \lambda e^{\eta}$ であることがわかるので, η は以下のような方程式を満たす:

$$\begin{cases} -\Delta\eta = \lambda e^{\eta}, & x \in \mathbb{R}^2, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{\eta}\,dx < \infty. \end{cases}$$

そこで, $v(x) = \eta(\lambda^{-1/2}x)\,(x \in \mathbb{R}^2)$ とおく. すると, v は $C(\mathbb{R}^2)$ の元で, (3.2) を満たす. 故に, 命題 3.3 を利用すると, v は球対称で, ある $\mu > 0$ と $y_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$v(x) = \log\frac{32\mu^2}{(\mu^2|x-y_0|^2+4)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

となる.

$b = 4\lambda^{-1}\mu^{-2} > 0$, $x_0 = \lambda^{-1/2}y_0 \in \mathbb{R}^2$ とする. このとき, η は

$$\eta(x) = v(\lambda^{1/2}x) = \log\frac{8b\lambda^{-1}}{(|x-x_0|^2+b)^2}$$

である. 以上から

$$\varphi(x) = \lambda e^{\eta(x)} = \frac{8b}{(|x-x_0|^2+b)^2} = \theta_{b,x_0}(x)$$

となり, ある $b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して (4.7) が成り立つことがわかる.

Step 4. (4.8), すなわち,

$$2\nabla\sqrt{\varphi} - \sqrt{\varphi}(\nabla N * \varphi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

を示す. (3.1) より $u_n(t,x) = u(t+t_n,x)$ は

(4.9) $$\sup_{n\geq 1}\sup_{0\leq t\leq 1}\|u_n(t)\|_{W^{1,p}} < \infty, \quad 2 \leq p < \infty,$$

(4.10) $$\sup_{n\geq 1}\int_0^1 (\|\partial_t u_n(t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta u_n(t)\|_{L^2}^2)\,ds < \infty$$

を満たす.

$R > 0$ を固定する. 埋め込み $H^1(B_R) \hookrightarrow L^2(B_R)$ はコンパクトであるから, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $\{u_n(t)\}$ は $L^2(B_R)$ において相対コンパクトである. また, (4.10)

より $\{u_n(t)\}$ は $C([0,1];L^2(B_R))$ において同程度連続である．よって，Ascoli-Arzela の定理と対角線論法を用いると，任意の $R>0$ に対して $C([0,1];L^2(B_R))$ の位相で $w\in C([0,1];L^2_{loc}(\mathbb{R}^2))$ に収束する部分列 $\{u_{n(j)}(t)\}$ が存在する．さらに，$2<p<\infty$ に対して，Gagliardo-Nirenberg-Sobolev の不等式

$$\|f\|_{C(\overline{B_R})}\le C\|f\|_{W^{1,p}(B_R)}^{p/(2(p-1))}\|f\|_{L^2(B_R)}^{p-2/(2(p-1))},\quad f\in W^{1,p}(B_R)$$

を適用すると，次が成り立つ:

(i) 任意の $R>0$ に対して，$u_{n(j)}$ は $C([0,1];C(\overline{B_R}))$ の位相で $C([0,1];\mathbb{R}^2)$ の元 w に収束する．

ここで，上記の極限関数 w の性質についてまとめる．$u_n\ge 0$ なので，任意の $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}^2$ に対して $w(t,x)\ge 0$ である．また，$w(0)=\lim_{n\to\infty}u_n(0)=\lim_{n\to\infty}u(t_n)=\varphi$ も成り立つ．さらに，(i) と (4.2) から，任意の $1\le p\le\infty$ に対して，

$$\sup_{0\le t\le 1}\|w(t)\|_{L^p}<\infty$$

であることがわかる．

Step 5. $Q=(0,1)\times\mathbb{R}^2$ とする．これから以下のことを示そう:

$$\int_Q\{2\nabla\sqrt{w}-\sqrt{w}(\nabla N*w)\}g\,dxdt=0,\quad g\in C_0(Q). \tag{4.11}$$

特に，

$$2\nabla\sqrt{w}-\sqrt{w}(\nabla N*w)=0,\quad (t,x)\in Q. \tag{4.12}$$

まず **Step 4** の (i) より任意の $g\in C_0(Q)$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\int_Q\nabla N*(u_n-w)g\,dxdt=0$ が成り立つ．また，命題 3.4(ii) の (3.3) より

$$\lim_{n\to\infty}\|2\nabla\sqrt{u_n}-\sqrt{u_n}(\nabla N*u_n)\|_{L^2(Q)}=0 \tag{4.13}$$

がいえる．さらに，**Step 4** の (i) と $\|\nabla\sqrt{u_n}\|_{L^2(Q)}$ の有界性から，$\nabla\sqrt{u_n}$ は $L^2(Q)$ で $\nabla\sqrt{w}\in L^2(Q)$ に弱収束する．よって，この事実と (4.13) から $\sqrt{u_n}(\nabla N*u_n)$ は $L^2(Q)$ で $2\nabla\sqrt{w}$ に弱収束することがわかる．ここで，**Step 5** のこれまでの議論から，以下を示すことができる．

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q\{\sqrt{u_n}(\nabla N*u_n)-\sqrt{w}(\nabla N*w)\}g\,dxdt=0,\quad g\in C_0(Q).$$

以上から, (4.11) が得られる. また, (4.11) より (4.12) も成り立つ.

Step 6. 任意の $g \in C_0^1(Q)$ に対して,

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t w g \, dxdt = 0 \tag{4.14}$$

が成り立つことを示そう. もし (4.14) が成り立てば, w は t に依存しないことがわかる. よって, $w(0) = \varphi$ から $w(t) = \varphi \, (t \in [0,1])$ を得る. 以上より $w(t) = \varphi$ を (4.11) に代入すると, (4.8) を得ることができる.

あとは (4.14) の証明をすれば, 定理 2.1 の証明の概略が完成する. 任意の $n \geq 1$ に対して, $\partial_t u_n = \nabla \cdot \sqrt{u_n}(2\nabla\sqrt{u_n} - \sqrt{u_n}(\nabla N * u_n))$ となるので,

$$\int_Q \partial_t u_n g \, dxdt = -\int_Q \sqrt{u_n}(2\nabla\sqrt{u_n} - \sqrt{u_n}(\nabla N * u_n)) \cdot \nabla g \, dxdt$$

が成り立つ. 従って, $\partial_t u_{n(j)}$ は $L^2(Q)$ で $\partial_t w$ に弱収束することに注意して, 上記の等式において $n \to \infty$ とし, (4.12) を用いれば, (4.14) がいえる.

5 定理 2.2 の証明の概略

まず (P) の *mild solution* の一意性から, u_0 が $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に関して球対称ならば, $u(t,x;u_0)$ も $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に関して球対称である. よって, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ を原点にしても一般性を失わない. そこで, $u(t,x;u_0)$ を $u(t,x;u_0) = \varphi(t,s)$, $s = \pi|x|^2$ と定義する.

さて, 定理 2.2 を証明するために, 以下を満たす初期値 $u_0(x) = \varphi(0, \pi|x|^2) =: \varphi_0(\pi|x|^2)$ を構成する.

(i) $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_0(x)\,dx = 0$.

(ii) 十分大きな $|x|$ に対して, $c|x|^{-4} \leq u_0(x) \leq C|x|^{-4}$.

(iii) $\theta_{a,0}, \theta_{b,0} \in \omega(u_0)$.

(iv) $\int_0^s \theta_{b,0}^* \, d\sigma \leq \int_0^s \varphi_0 \, d\sigma \leq \int_0^s \theta_{a,0}^* \, d\sigma$, $s > 0$.

ただし, f^* は f の decreasing rearrangement を表す.

ひとまず (i)–(iv) を満たす初期値 u_0 の構成は後回しにして, 証明を先に進めよう. まず, 定理 2.1 の (iii) より $\omega(u_0) \subset \{\theta_c \,|\, c > 0\}$ となることに注意する. もし, $\omega(u_0) \subset \{\theta_{c,0} \,|\, a \leq c \leq b\}$ が成り立てば, 定理 2.1 の (ii) より ω 極限集合 $\omega(u_0)$ は閉かつ連結である空でない $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ の部分集合であり, また, 性質 (iii) を満たすから, $\omega(u_0) = \{\theta_{c,0} \,|\, a \leq$

$c \le b\}$ である. 故に,

$$\omega(u_0) \subset \{\theta_{c,0} \mid a \le c \le b\} \tag{5.1}$$

を証明すればよい.

そこで $\theta_{c,0} \in \omega(u_0)$ とする. このとき, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \|u(t_n) - \theta_{c,0}\|_{L^\infty} = 0$ を満たす時間列 $\{t_n\}$ が存在する. 性質 (iv) が成り立つことから, [14] の命題 3.3 を適用すると,

$$\int_0^s \theta^*_{b,0}(\sigma)\,d\sigma \le \int_0^s \varphi(t,\sigma)\,d\sigma \le \int_0^s \theta^*_{a,0}(\sigma)\,d\sigma, \quad t \ge 0,\ s \ge 0 \tag{5.2}$$

を得る. 故に, (5.2) の変数 t に上記の時間列 $\{t_n\}$ を代入して, $n \to \infty$ とすれば,

$$\int_0^s \theta^*_{b,0}(\sigma)\,d\sigma \le \int_0^s \theta^*_{c,0}(\sigma)\,d\sigma \le \int_0^s \theta^*_{a,0}(\sigma)\,d\sigma$$

となる. ここで, $c > 0$ に対して $\int_0^s \theta^*_{c,0}(\sigma)\,d\sigma = 8\pi s/(s+\pi c)$ となるので, $a \le c \le b$ がいえる. よって, (5.1) が成り立つ.

以降, 藤田型方程式の研究で適用された議論 [16] を基に, (i)–(iv) を満たす初期値 u_0 を構成する. 本論説では, (i), (ii) と (iii) の証明の概略のみ述べ, 残りの (iv) に関しては [15] を参照されたい.

5.1 (i), (ii) と (iii) の証明について

まず $\{\varepsilon_n\}$ を $\varepsilon_n \downarrow 0\,(n \uparrow \infty)$ を満たす列とする. また $r_0 > \max\{1, (ab)^{1/4}\}$ を満たすように r_0 をとる. これから 5 つの Step にわけて (i), (ii) と (iii) を証明する.

Step 1. $u_{0,0}(x)$ と $u_{0,1}(x)$ を以下のように定義する:

$$u_{0,0}(x) = \theta_{a,0}(x), \quad u_{0,1}(x) = \begin{cases} \theta_{a,0}(x), & |x| \le r_0, \\ \theta_{b,0}(r_1 e_1), & r_0 < |x| \le r_1, \\ \theta_{b,0}(x), & |x| > r_1. \end{cases}$$

ただし $e_1 = {}^t(1,0)$ で, $r_1 (> r_0)$ は $\int_{\mathbb{R}^2} u_{0,1}(x)\,dx = 8\pi$ を満たすようにとる.

$u_{0,1}(x)$ は $u_{0,1} \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{H}_b[u_{0,1}] < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_{0,1}(x)\,dx = 0$ を満たしているので, [14] の定理 1.1 と定理 1.2 を適用すると, $u_{0,1}$ を初期値とする非負な (P) の *mild solution* $u(t; u_{0,1})$ は時間大域的に存在して,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t; u_{0,1}) - \theta_{b,0}\|_{L^\infty} = 0$$

となる．よって，以下を満たす $t_0 \geq 1$ が存在する:

$$\sup_{t \geq t_0} \|u(t; u_{0,1}) - \theta_{b,0}\|_{L^\infty} < \varepsilon_1/2. \tag{5.3}$$

Step 2. $v_{0,1}(x)$ を以下のように定義する．

$$v_{0,1}(x) = \begin{cases} u_{0,1}(x), & |x| \leq r_2, \\ \varphi(x), & |x| > r_2. \end{cases}$$

ただし，r_2 は $r_2 > 2r_1$ を満たす定数で，後で決める．また，φ は以下を満たす:

(a) $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \geq 0$
(b) $\|v_{0,1}\|_{L^\infty} = \|u_{0,0}\|_{L^\infty} = 8/a$,
(c) $\int_{\mathbb{R}^2} v_{0,1}\, dx = 8\pi$,
(d) $\theta_{c_0,0}(x) \leq \varphi(x) \leq 4\theta_{b,0}(x)$, $|x| \geq r_2$, $c_0 = (a^{-1/2} + 3a^{-1}b^{1/2})^{-2}$.

ここで，$u_{0,1} \in X(c, r_0)\,(0 < c \leq c_0)$ より $v_{0,1} \in X(c, r_0)$ となることに注意すると，命題 3.5 から $u(t; v_{0,1})$ は時間大域的に存在して，有界になることがわかる．よって，命題 3.6 を適用すると，$t_1 \geq t_0$ に対して，$r_2 > 2r_1$ を満たす r_2 が存在して，

$$\|u(t_1; v_{0,1}) - u(t_1; u_{0,1})\|_{L^\infty} < \varepsilon_1/2. \tag{5.4}$$

以上より，(5.3) と (5.4) から以下の不等式を得る:

$$\|u(t_1; v_{0,1}) - \theta_{b,0}\|_{L^\infty} < \varepsilon_1.$$

Step 3. $u_{0,2}(x)$ を以下のように定義する:

$$u_{0,2}(x) = \begin{cases} u_{0,1}(x), & |x| \leq r_2, \\ \theta_{b,0}(r_2 e_1), & r_2 < |x| \leq r_3, \\ \theta_{a,0}(x), & |x| > r_3. \end{cases}$$

ただし $e_1 = {}^t(1, 0)$ で，$r_3 (> r_2)$ は $\int_{\mathbb{R}^2} u_{0,2}(x)\, dx = 8\pi$ を満たすようにとる．

$u_{0,2}(x)$ は $u_{0,2} \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{H}_a[u_{0,2}] < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_{0,2}(x)\, dx = 0$ を満たしているので，[14] の定理 1.1 と定理 1.2 を適用すると，$u_{0,2}$ を初期値とする非負な (P) の *mild solution* $u(t; u_{0,2})$ は時間大域的に存在して，

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t; u_{0,2}) - \theta_{a,0}\|_{L^\infty} = 0$$

となる. よって, 以下を満たす $t_0 \geq 1$ が存在する:

$$\sup_{t \geq t_0} \|u(t; u_{0,2}) - \theta_{a,0}\|_{L^\infty} < \varepsilon_2/2. \tag{5.5}$$

Step 4. $v_{0,2}(x)$ を以下のように定義する.

$$v_{0,2}(x) = \begin{cases} u_{0,2}(x), & |x| \leq r_4, \\ \phi(x), & |x| > r_4. \end{cases}$$

ただし, r_4 は $r_4 > 2r_3$ を満たす定数で, 後で決める. また, ϕ は以下を満たす:

(A) $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\phi \geq 0$
(B) $\|v_{0,2}\|_{L^\infty} = \|u_{0,0}\|_{L^\infty} = 8/a$,
(C) $\int_{\mathbb{R}^2} v_{0,2}\, dx = 8\pi$,
(D) $\theta_{c_0,0}(x) \leq \phi(x) \leq 4\theta_{b,0}(x)$, $|x| \geq r_4$, $c_0 = (a^{-1/2} + 3a^{-1}b^{1/2})^{-2}$.

ここで, **Step 2** と同様に命題 3.5 を適用すれば, $u(t; v_{0,2})$ は時間大域的に存在して, 有界であることがわかる. よって, 命題 3.6 から, $t_2 \geq t_1 (\geq t_0)$ に対して, $r_4 > 2r_3$ を満たす r_4 が存在して,

$$\|u(t_2; v_{0,2}) - u(t_2; u_{0,2})\|_{L^\infty} < \varepsilon_2/2 \tag{5.6}$$

以上より, (5.5) と (5.6) から以下の不等式を得る:

$$\|u(t_2; v_{0,2}) - \theta_{a,0}\|_{L^\infty} < \varepsilon_2.$$

Step 5. **Step 1** から **Step 4** を帰納的に繰り返すと, $\{u_{0,n}\}_{n\geq 0} \subset L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ と, $\min\{t_n, r_n\} \uparrow \infty \, (n \uparrow \infty)$ かつ $r_0 > \max\{(ab)^{1/4}, 1\}$ を満たす増加列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$, $\{r_n\}_{n\geq 0}$ が存在して, 以下を満たす:

(1) $\|u_{0,n}\|_{L^\infty} = \|u_{0,0}\|_{L^\infty} = 8/a$, $n \geq 0$.
(2) $\int_{\mathbb{R}^2} u_{0,n}(x)\, dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_{0,n}(x)\, dx = 0$, $n \geq 0$.
(3) $n \in \mathbb{N}$, $|x| \leq r_{2(n-1)}$ に対して, $u_{0,n}(x) = u_{0,n-1}(x)$.
(4) $n \in \mathbb{N}$, $|x| \geq r_{2n-1}$ に対して,

$$u_{0,n}(x) = \begin{cases} \theta_{a,0}(x), & n \text{ が偶数}, \\ \theta_{b,0}(x), & n \text{ が奇数}. \end{cases}$$

(5) $|x| \geq r_1$ に対して,

$$\theta_{c_0}(x) \leq u_{n,0}(x) \leq 4\theta_{b,0}(x).$$

ただし $c_0 = (a^{-1/2} + 3a^{-1}b^{1/2})^{-2}$ とする.

(6) $0 < c \leq \min\{c_0, a\}$ に対して, $u_{n,0} \in X(c, r_1)$.

(7) すべての $1 \leq p \leq \infty$, $n \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} \|u(t_n; v_{0,n}) - \theta_{a,0}\|_p &< \varepsilon_n, \quad n \text{ が偶数}, \\ \|u(t_n; v_{0,n}) - \theta_{b,0}\|_p &< \varepsilon_n, \quad n \text{ が奇数}. \end{aligned}$$

ただし,

- $\|v_{0,n}\|_{L^\infty} = \|u_{0,0}\|_{L^\infty} = 8/a$.
- $\int_{\mathbb{R}^2} v_{0,n}(x)\,dx = 8\pi$.
- $|x| \geq r_{2n}$ に対して, $\theta_{c_0}(x) \leq \varphi(x) \leq 4\theta_{b,0}(x)$.

を満たす任意の非負関数 $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して, $v_{n,0}$ を

$$v_{n,0}(x) = \begin{cases} u_{n,0}(x), & |x| \leq r_{2n}, \\ \varphi(x), & |x| > r_{2n} \end{cases}$$

と定義する.

そこで, $u_0(x) = u_{0,n}(x)$ ($|x| < r_{2n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$) と定義する. すると, u_0 は well-defined である. また, (2) と (5) から性質 (i) と (ii) は従い, $v_{0,n} = u_{0,n}$, $n \geq 1$ として (7) を用いれば, 性質 (iii) が得られる.

参考文献

[1] P. Biler, D. Hilhorst, and T. Nadzieja, Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, II, Colloq. Math., **67** (1994), 297–308.

[2] P. Biler, G. Karch, P. Laurençot, and T. Nadzieja, The 8π−problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane, Math. Meth. Appl. Sci., **29** (2006), 1563–1583.

[3] P. Biler and T. Nadzieja, Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interactions of particles, I, Colloq. Math., **66** (1994), 319–334.

[4] A. Blanchet, E. Carlen, and J. A. Carrillo, Functional inequalities, thick tails and asymptotics for the critical mass Patlak-Keller-Segel model, J. Funct. Anal., **262** (2012), 2142–2230. .

[5] A. Blanchet, J. A. Carrillo, and N. Masmoudi, Infinite time aggregation for the critical Paltak-Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$, Comm. Pure Appl. Math., **61** (2008), 1449–1481.

[6] A. Blanchet, J. Dolbeault, M. Escobedo, and J. Fernández, Asymptotic behavior for small mass in the two-dimensional parabolic-elliptic Keller-Segel model, J. Math. Anal. Appl., **361** (2010), 533–542.

[7] A. Blanchet, J. Dolbeault, and B. Perthame, Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions, Electron. J. Differential Equations, (2006), No.44, 1–33.

[8] J. Campos and J. Dolbeault, Asymptotic estimates for the parabolic-elliptic Keller-Segel model in the plane, preprint.

[9] W. Chen and C. Li, Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations, Duke Math. J., **63** (1991) 615–622.

[10] J. Dolbeault and B. Perthame, Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), 611–616.

[11] T. Kato, The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in R^2 with a measure as the initial vorticity, Differential Integral Equations, **7** (1994), No 4, 949–966.

[12] M. Kurokiba and T. Ogawa, Finite time blow-up of the solution for a nonlinear parabolic equation of drift-diffusion type, Differential Integral Equations, **16** (2003), 427-452.

[13] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1981)

[14] J. Lopez-Gomez, T. Nagai and T. Yamada, The basin of attraction of the steady-states for a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass. Arch. Ration. Mech. Anal. **207** (2013), 159–184.

[15] J. Lopez-Gomez, T. Nagai and T. Yamada, Non-trivial ω-limit sets and oscillating solutions in a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass, submitted.

[16] P. Poláčik, and E. Yanagida, On bounded and unbounded global solutions of a supercritical semilinear heat equation, Math. Ann. **327** (2003), 745–771.

[17] T. Nagai, Global existence and decay estimates of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, Differential Integral Equations, **24** (2011), 29–68.

[18] T. Nagai, Convergence to self-similar solutions for a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, Adv. Differential Equations, **16** (2011), 839–866.

[19] T. Nagai and T. Ogawa, Global existence of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, preprint.

[20] Y. Naito and T. Senba, Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic-elliptic system in two dimensional solutions, Commun. Pure Appl. Anal., **12** (2013), 1861–1880.