数理解析研究所講究録
第 1915 巻 2014 年 38-43

On Frobenius polynomials in skew polynomial rings

岡山大学・大学院自然科学研究科 山中 聡 (Satoshi YAMANAKA)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

岡山大学・大学院自然科学研究科 池畑 秀一 (Shûichi IKEHATA)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

Abstract

一般的な環拡大において, 分離拡大は必ずしも Frobenius 拡大になるとは限らない. しかし [5] において, 宮下庸一は「歪多項式環における分離多項式は Frobenius 多項式ではないか」という予想を提起した. 本論文では, 宮下の予想に対するこれまでの研究の歴史を中心に最近得られた結果を紹介する.

1 序と準備

多元環において, 遠藤静男と渡辺豊による次の結果は良く知られている.

定理 1.1. [1, Theorem 4.2] R-加群として忠実かつ有限生成射影的な分離 R-多元環 Λ は symmetric R-多元環 (したがって Frobenius R-多元環) である.

しかし, 一般的な環拡大においては, 上記と同様の結果は成り立たない. 実際, 菅野孝三は [10, p.248 Example] において, 分離拡大 A/B で A が B-加群として有限生成射影的であるが, Frobenius 拡大ではない例を与えている. その後, [5] において宮下庸一により「歪多項式環における分離多項式は Frobenius 多項式ではないか」という予想が提起された. つまり, 一般的な環拡大においては分離拡大は必ずしも Frobenius 拡大とは限らないが, 歪多項式環の剰余環として現れる環拡大においては分離拡大は Fronbenius 拡大ではないか, という予想である. この宮下の予想は, 永原賢や池畑秀一らにより研究されてきた (参考文献参照). 本論文では, 宮下の予想に対するこれまでの研究の歴史を中心に最近得られた結果を紹介する.

本論文を通して, B は単位元 1 を持つ環, ρ を B の自己同型写像, D を B の ρ-微分とする. すなわち D は加法的写像で $D(\alpha\beta) = D(\alpha)\rho(\beta) + \alpha D(\beta)$ (α, $\beta \in B$) を満たすものとする. また $B[X;\rho, D]$ をその乗法が $\alpha X = X\rho(\alpha) + D(\alpha)$ ($\alpha \in B$) によっ

本研究は科研費 (基盤研究 (C) 234540049) の助成を受けたものである.

て定まる歪多項式環とする．ここで $B[X;\rho] = B[X\rho;0]$, $B[X;D] = B[X;1_B,D]$ とする．

環拡大 A/B が分離拡大であるとは $A\otimes_B A$ から A への A-A-準同型写像 $a\otimes b \to ab$ が分解することである．また A/B が Frobenius 拡大であるとは, A が B-加群として有限生成射影的であり, A と $\mathrm{Hom}(A_B, A_B)$ が B-A-同型であるときにいう．さらに A/B が右 (resp. 左) quasi-Frobenius 拡大であるとは, A が右 (resp. 左) B-加群として有限生成射影的であり, A が $\mathrm{Hom}(A_B, A_B)$ (resp. $\mathrm{Hom}({}_BA, {}_BA)$) の有限個の直和の直和因子に B-A-同型 (resp. A-B-同型) であるときにいう．A/B が右かつ左 quasi-Frobenius 拡大のとき, quasi-Frobenius 拡大という．明らかに Frobenius 拡大は quasi-Frobenius 拡大である．

f が $B[X;\rho,D]$ における monic な多項式で $fB[X;\rho,D] = B[X;\rho,D]f$ を満たすとき, 剰余環 $B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$ は B 上 free な拡大環となる．$B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$ が B 上分離拡大 (resp.Frobenius 拡大, quasi-Frobenius 拡大) のとき, f を $B[X;\rho,D]$ における分離多項式 (resp. Frobenius 多項式, quasi-Frobenius 多項式) という．

以下, $B[X;\rho,D]_{(0)} = \{g \in B[X;\rho,D] \mid g$ は monic で $gB[X;\rho,D] = B[X\rho,D]g$ を満たす$\}$, $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]_{(0)}$, $B[x;\rho,D] = B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$, $x = X + fB[X;\rho,D] \in B[x;\rho,D]$ とし, $Y_j \in B[X;\rho,D]$ $(0 \leq j \leq m-1)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= X^{m-1} + X^{m-2}a_{m-1} + \cdots + Xa_2 + a_1 \\
Y_1 &= X^{m-2} + X^{m-3}a_{m-1} + \cdots + Xa_3 + a_2 \\
&\vdots \\
Y_{j-1} &= X^{m-j} + X^{m-j-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_{j+1} + a_j \\
&\vdots \\
Y_{m-2} &= X + a_{m-1} \\
Y_{m-1} &= 1
\end{aligned}$$

また $y_{j-1} = Y_{j-1} + fB[X;\rho,D] = x^{m-j} + x^{m-j-1}a_{m-1} + \cdots + xa_{j+1} + a_j \in B[x;\rho,D]$ とする．

2 宮下の予想に関する研究

ここからは冒頭で述べた宮下の予想に関する結果をいくつか紹介する．まず $B[X;\rho,D]$ における分離多項式および Frobenius 多項式については, 宮下庸一が与えた次の結果が基本的である．

定理 2.1. [5, Theorem 1.8] $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ とする. このとき, f が $B[X;\rho,D]$ における分離多項式であるための必要十分条件は, $B[x;\rho,D]$ の元 h で $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x^j = 1$ かつ $\rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha$ $(\forall\, \alpha \in B)$ をみたすものが存在することである.

定理 2.2. [5, Proposition 1.13] $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ とする. このとき, f が $B[X;\rho,D]$ における Frobenius 多項式であるための必要十分条件は, $B[x;\rho,D]$ における可逆元 r で $\rho^{m-1}(\alpha)r = r\alpha$ (または $r\rho^{m-1}(\alpha) = \alpha r$) $(\forall\, \alpha \in B)$ をみたすものが存在することである.

また $B[X;\rho,D]$ における quasi-Frobenius 多項式について, 次の結果が知られている.

定理 2.3. [3, Theorem 5.1] $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ とする. このとき, f が $B[X;\rho,D]$ における右 (resp. 左) quasi-Frobenius 多項式であるための必要十分条件は, $B[x;\rho,D]$ の元 r_i, s_i で $\sum_i s_i r_i = 1$ (resp. $\sum_i r_i s_i = 1$) かつ $\alpha r_i = r_i \rho^{m-1}(\alpha)$, $s_i\alpha = \rho^{m-1}(\alpha)s_i$ $(\forall\, \alpha \in B)$ をみたすものが存在することである.

定理 2.2 より, $B[X;D]_{(0)}$ における任意の多項式はすべて Frobenius 多項式であることが容易にわかる (r として 1 を選べばよい). これ以降は $B[X;\rho]$ における多項式について考察していく.

$B[X;\rho]$ の分離多項式について, 次の結果は基本的である.

補題 2.4. [2, Lemma 1] $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho]_{(0)}$ とする. このとき, f が $B[X;\rho]$ における分離多項式ならば, B の元 c, d で $a_0 d - a_1 c = 1$ をみたすものが存在する.

上の補題 2.4 は $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$ が $B[X;\rho,D]$ における分離多項式ならば, f の係数 a_1, a_0 が B 上で互いに素であることを意味している. この補題により係数 a_1, a_0 に注目した研究がされるようになった. 以下は関連した結果である.

命題 2.5. [2, Theorem 1] $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho]_{(0)}$ とする.

(1) a_0, a_1 のどちらかが B における右 (または左) 可逆元ならば, f は $B[X;\rho]$ における Frobenius 多項式である.

(2) f が $B[X;\rho]$ における分離多項式であり, さらに a_0, a_1 のどちらかが B の Jacobson 根基 $J(B)$ の元ならば, f は $B[X;\rho]$ における Frobenius 多項式である.

B の元 b が π-regular であるとは, B の元 b と自然数 t で $b^t c b^t = b^t$ をみたすものが存在するときにいう. これに関して永原賢は次の結果を与えた.

定理 2.6. [7, Theorem 3] $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho]_{(0)}$ とする. このとき, f が $B[X;\rho]$ における分離多項式であり, さらに a_0, a_1 のどちらかが B において π-regular ならば, f は $B[X;\rho]$ における Frobenius 多項式である.

B の元 b が右 (resp. 左) weakly π-regular であるとは自然数 t で $b^t \in (b^tB)^2$ (resp. $b^t \in (Bb^t)^2$) をみたすものが存在するときにいう. これに関して, 今回, 次の結果を得た.

定理 2.7. $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho]_{(0)}$ とする. このとき, f が $B[X;\rho]$ における分離多項式であり, さらに a_0, a_1 のどちらかが B において右 (または左) weakly π-regular ならば, f は $B[X;\rho]$ における Frobenius 多項式である.

π-regular な元は右かつ左 weakly π-regular なので, 上の結果は定理 2.6 の拡張となっている.

定理 2.6 の他にも永原は $B[X\rho]$ における Frobeniu 多項式に関する結果を与えており, それらの一部を紹介する.

定理 2.8. [7, Theorem 3] B が両側イデアルに関する降鎖条件をみたせば, $B[X;\rho]$ における任意の分離多項式は Frobenius 多項式である.

定理 2.9. [8, Theorem 3] $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$ を $B[X;\rho]$ における分離多項式とし, $\deg f = m \geqq 2$ とする. このとき, f は $B^{\rho^{m-1}}[X;\rho|B^{\rho^{m-1}}]$ における Frobenius 多項式である. ただし, $B^{\rho^{m-1}} = \{b \in B \mid \rho^{m-1}(b) = b\}$ とする.

定理 2.10. [9, Theorem 2] N を B のべき零イデアルとする. このとき B/N のすべての元が π-regular ならば, $B[X;\rho]$ における任意の分離多項式は Frobenius 多項式である.

永原の結果が示すように, $B[X;\rho]$ における分離多項式が Frobenius 多項式であるためには, 係数環 B がある程度弱い条件の環ならば良いというところまでわかっている. 係数環 B の条件としてどの程度まで弱めていけるかが今後の課題のひとつである.

ここまで $B[X;\rho]$ における Frobenius 多項式についてみてきたが, $B[X;\rho]$ における quasi-Fronbenius 多項式については以下の結果が知られている.

定理 2.11. [3, Therem 5.2] $B[X;\rho]$ における任意の分離多項式は quasi-Frobenius 多項式である.

最後に一般的な歪多項式環 $B[X;\rho,D]$ における結果を紹介する.

定理 2.12. [3, Proposition 6.4] B を単純環, $C(B)$ を B の中心とする. このとき, f が $B[X;\rho,D]$ における分離多項式ならば, 次が成り立つ.

(1) $\rho|C(B) \neq 1_{C(B)}$ ならば, f は $B[X;\rho,D]$ における Frobenius 多項式である.

(2) $\rho|C(B) = 1_{C(B)}$ かつ $[B:C(B)] < \infty$ ならば, f は $B[X;\rho,D]$ における Frobenius 多項式である.

定理 2.13. [3, Theorem 6.5] B を単純環, f を $B[X;\rho,D]$ における次数 m の分離多項式, $h = g + fB[X;\rho,D] \in B[x;\rho,D]$ を定理 2.1 における h とし, $\deg g = n$ とする. このとき, $n = 0$ または $(m,n) = 1$ (m と n は互いに素) ならば, f は $B[X;\rho,D]$ における Frobenius 多項式である.

上の結果の通り, 一般的な歪多項式環 $B[X;\rho,D]$ において, 強い条件の下でしか宮下の予想が示されていないのが現状である. より一般的な条件の下でも宮下の予想が成り立つのか, また, $B[X;\rho]$ の場合と同様の結果が $B[X;\rho,D]$ においても成り立つのか, といった問題の解決が今後の課題である.

References

[1] S. Endo and Y. Watanabe, On separable algebras over a commutative ring, *Osaka J. Math.,* **4** 1967, 233–242.

[2] S. Ikehata, On a theorem of Y. Miyashita, *Math. J. Okayama Univ.,* **21** 1979, 49–52.

[3] S. Ikehata, On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 115–129.

[4] S. Ikehata, On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings. II, *Math. J. Okayama Univ.,* **25** 1983, 23–28.

[5] Y. Miyashita, On a skew polynomial ring, *J. Math. Soc. Japan,* **31** 1979, no. 2, 317–330.

[6] T. Nagahara, On separable polynomial of degree 2 in skew polynomial rings III, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 61–64.

[7] T. Nagahara, A note on separable polynomials in skew polynomial rings of automorphism type, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 73–76.

[8] T. Nagahara, Note on skew polynomials, *Math. J. Okayama Univ.,* **25** 1983, 43–48.

[9] T. Nagahara, Note on skew polynomials II, *Math. J. Okayama Univ.,* **27** 1985, 121–125.

[10] K. Sugano, On some commutor theorems of rings, *Hokkaido Math. J.,* 1972, 242–249.

E-mail address : s_yamanaka@math.okayama-u.ac.jp
E-mail address : ikehata@ems.okayama-u.ac.jp