

# オービフォールド射影直線のミラー対称性

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻

高橋 篤史

Atsushi TAKAHASHI

Department of Mathematics, Graduate School of Science,  
Osaka University, Toyonaka Osaka, 560-0043, Japan

## 1 背景

三位一体の数学, すなわち

- 複素代数幾何学
- シンプレクティック幾何学
- 表現論

という一見異なる三つの数学が一つの数学の異なる実現であるように思える現象, を少しでも理解したいというのが研究の動機である. 最初の二つの数学の対応は Kontsevich のホモロジー的ミラー対称性によってはじめて明確に述べられたため, 近年突然現れた一時的な流行に乗った浅い動機と思われるかもしれない. しかしながら, Klein による正多面体群と超曲面特異点 (Klein 特異点) の対応を起源とする, 非常に素朴な数学的対象の背後にある真理を解明しようとする, 100 年以上もの長い時間をかけて多くの数学者によって研究されてきた, 大きな数学の流れに乗っていると思っている.

もう少し, この三位一体を具体的に説明する. これらの三種類の異なる数学から, 代数的三角圏を次の方法で構成することができる:

- 代数多様体の接続層の有界導来圏.
- ラグランジアン部分多様体の深谷圏の有界導来圏.
- 有限次元代数の有限次元表現の有界導来圏.

三種の数学に対してそれぞれの方法で構成した三角圏が圏同値になるという現象が知られている。とくに最初の二つの構成によるものが三角同値となることをホモロジー的ミラー対称性と呼ぶ。

一方で、これまでに構成されている Frobenius 構造（平坦構造）は、次の本質的に異なる三種類の構成法による：

- Gromov–Witten 理論.
- 変形理論と原始形式.
- Weyl 群の不変式論.

そして、それぞれの構成によるものが同型となる現象が知られている。とくに最初の二つの構成によるものが同型となることを古典的ミラー対称性と呼ぶ。歴史的には、Frobenius 構造（平坦構造）の構成は下のものから順になされており、最後の二つの同型は古典的ミラー対称性よりも 10 年程度早く知られている。

三種の数学、三種の三角圏、三種の Frobenius 構造。これは単なる偶然であろうか？少なくとも筆者はそう考えない。三角圏に対する Bridgeland 安定性条件によって、直接的にこれらが関連すると期待している。ただし、現状ではまだまだ解決すべき課題が多すぎて、導来圏からの Frobenius 構造の導出を数学的主張として述べられる域には達していない。そもそも、三種類の Frobenius 構造を比較することすら十分満足にできていない。

三種類の Frobenius 構造の比較ができないのは、それぞれの構成法の課題と大きく関わる：

- 「非可換代数多様体」に対する Gromov–Witten 理論（もしくはそれに相当する理論）が未構築である。
- 超曲面特異点の芽と Calabi–Yau 多様体を除き、変形理論を用いて系統的に原始形式を構成する理論が構築されていない。また、「巨大複素構造極限」を中心とする（普遍 Novikov 環上の）原始形式の理論も未構築である。
- 「一般のルート系」に対する Weyl 群の不変式論およびそれに対する Frobenius 構造の構成が未構築である。

最初の二つの課題に関して言えば、両者が取り扱える範囲の重なりが非常に小さいということである。また、三つ目の課題についてはさらに深刻で、楕円ルート系・Weyl 群を超えるとほぼ未知の領域だということである。したがって、他と比べることはもちろん、それ自身ほとんど何もわかっていないのである。

しかしながら、筆者らの最近の研究により、これら三種の三角圏および三種の Frobenius 構造をつなぐ一本の糸が発見された。三種類の数学的対象

- オービフォールド射影直線.
- カスプ多項式.
- 関係式付き籠の経路代数「蛸」.

に対しては、系統的に三角圏と Frobenius 構造の両方を調べる事が可能であり、さらに、圏同値や Frobenius 構造の同型を少なからず証明することができるのである。残念ながら、まだまだ未完成・未解明な部分が多く完全な理解には遠いが、それは今後の課題である。ここでは、Frobenius 構造の比較を中心にいくつかの結果を報告したい。

謝辞

研究集会「ミラー対称性の展望」の世話人である小西由紀子氏および三鍋聡司氏には、講演と本稿の執筆の機会を与えていただいたことに感謝したい。本研究は JSPS 科研費若手研究 (A) 課題番号 24684005 (研究代表者：高橋篤史) の助成を受けたものである。

## 2 Frobenius 構造 (平坦構造)

Frobenius 構造は、可積分系の研究のため 2 次元位相的場の理論をもとに、Dubrovin [4] により 90 年代初頭に導入された概念である。しかしながら、それは特異点の変形理論に対する原始形式の周期写像の理論において、すでに 80 年代初頭に齋藤恭司により発見され、平坦構造 (flat structure) として研究されていた (cf. [13]). 歴史的経緯やその後の展開についての概要については齋藤-高橋 [16] の Introduction およびそこに挙げられている文献を参照していただきたい (結局のところ、単に日本語訳を書くことになってしまうため)。

ここでは [16] で与えられている定義を用いて、Frobenius 構造について簡単にまとめておく。

**定義 2.1.**  $M$  を  $\mu$  次元の複素多様体もしくは  $\mathbb{C}$  上の形式的多様体とし、 $\mathcal{O}_M, \mathcal{T}_M, \Omega_M^1$  でそれぞれ  $M$  の構造層・接層・余接層をあらわす。また、 $d$  を複素数とする。

$M$  上の階数  $\mu$  次元  $d$  の Frobenius 構造 (Frobenius structure of rank  $\mu$  and dimension  $d$ ) とは、

- $\mathcal{T}_M$  上の非退化対称  $\mathcal{O}_M$ -双線型型式  $\eta: \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{O}_M$ ,

- $\mathcal{T}_M$  上の  $\mathcal{O}_M$ -双線型な結合的積  $\circ : \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{T}_M$ ,
- **単位ベクトル場 (unit vector field)** と呼ばれる, 積  $\circ$  に関する単位元となる  $M$  上の正則ベクトル場  $e \in \Gamma(M, \mathcal{T}_M)$ ,
- **Euler ベクトル場 (Euler vector field)** と呼ばれる,  $M$  上の正則ベクトル場  $E \in \Gamma(M, \mathcal{T}_M)$ ,

の組  $(\eta, \circ, e, E)$  で, 以下の性質をみたすものことである:

- (i) 積  $\circ$  は  $\eta$  に関して不変である. つまり

$$\eta(\delta \circ \delta', \delta'') = \eta(\delta, \delta' \circ \delta''), \quad \delta, \delta', \delta'' \in \mathcal{T}_M, \quad (2.1)$$

が成立する.

- (ii)  $\eta$  に関する Levi-Civita 接続  $\nabla : \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{T}_M$  は平坦接続である. つまり, 条件

$$\delta \eta(\delta', \delta'') = \eta(\nabla_\delta \delta', \delta'') + \eta(\delta', \nabla_\delta \delta''), \quad \delta, \delta', \delta'' \in \mathcal{T}_M, \quad (2.2a)$$

$$\nabla_\delta \delta' - \nabla_{\delta'} \delta = [\delta, \delta'], \quad \delta, \delta' \in \mathcal{T}_M, \quad (2.2b)$$

により一意的に定まる接続  $\nabla$  が, 平坦性の条件

$$[\nabla_\delta, \nabla_{\delta'}] = \nabla_{[\delta, \delta']}, \quad \delta, \delta' \in \mathcal{T}_M, \quad (2.2c)$$

をみたす.

- (iii)  $\mathcal{O}_M$ -線型写像  $C : \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{T}_M$  を  $C_\delta \delta' := \delta \circ \delta'$ ,  $\delta, \delta' \in \mathcal{T}_M$  により定める. このとき,  $C$  は  $\nabla$  に関して平坦である. つまり

$$\nabla C = 0 \quad (2.3)$$

が成立する.

- (iv) 単位ベクトル場  $e$  は  $\nabla$ -平坦である. つまり

$$\nabla e = 0 \quad (2.4)$$

が成立する.

- (v) Euler ベクトル場  $E$  に関して双線形形式  $\eta$  および積  $\circ$  は斉次であり, その次数はそれぞれ  $2-d$  ( $d \in \mathbb{C}$ ) および  $1$  となる. つまり,  $E$  に関する Lie 微分  $Lie_E$  に関して,

$$Lie_E(\eta) = (2-d)\eta, \quad Lie_E(\circ) = \circ, \quad (2.5)$$

が成立する.

**定義 2.2.** Frobenius 構造  $(\eta, \circ, e, E)$  が半単純 (semi-simple) であるとは、一般の点  $t \in M$  ( $M$  が形式的多様体のときは生成点) において  $(\mathcal{T}_M/\mathfrak{m}_t\mathcal{T}_M, \circ)$  が単純  $\mathbb{C}$ -代数  $\mathbb{C}$  の直積と同型となることである。

**定義 2.3.** Frobenius 構造  $(\eta, \circ, e, E)$  が与えられた複素多様体  $M$  のことを **Frobenius 多様体 (Frobenius manifold)** という。Frobenius 構造  $(\eta, \circ, e, E)$  とあわせて  $(M, \eta, \circ, e, E)$  とあらわす。

以下、 $(M, \eta, \circ, e, E)$  を Frobenius 多様体とする。定義から容易に導かれる重要な性質をいくつか述べる。

**命題 2.4.**  $M$  の各点において、局所座標系  $(t_1, \dots, t_\mu)$  で、性質

- $e = \partial/\partial t_1$ .
- 接続  $\nabla$  の水平切断の空間

$$\mathcal{T}_M^f := \{\delta \in \mathcal{T}_M \mid \nabla_{\delta'} \delta = 0 \text{ for all } \delta' \in \mathcal{T}_M\} \quad (2.6)$$

は、 $\partial_i := \partial/\partial t_i, i = 1, \dots, \mu$  で張られる  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間に同型である。とくに、 $\eta(\partial_i, \partial_j) \in \mathbb{C}, i, j = 1, \dots, \mu$  である。

をみたすものが存在する。

**定義 2.5.** 命題 2.4 で得られる  $M$  の局所座標  $t_1, \dots, t_\mu$  を、**平坦座標 (flat coordinates)** という。

また、 $C$  の平坦性条件  $\nabla C = 0$  から、積構造  $\circ$  がある正則函数の 3 階微分であらわされることわかる：

**命題 2.6.**  $M$  の各点において、局所的に定義される正則函数  $\mathcal{F}$  で、

$$\eta(\partial_i \circ \partial_j, \partial_k) = \eta(\partial_i, \partial_j \circ \partial_k) = \partial_i \partial_j \partial_k \mathcal{F}, \quad (2.7)$$

をみたすものが存在する。とくに、 $\eta_{ij} := \eta(\partial_i, \partial_j) = \partial_1 \partial_i \partial_j \mathcal{F}$  が成立する。

**定義 2.7.** 命題 2.6 の正則函数  $\mathcal{F}$  を、**Frobenius potential** という。

さらに、積  $\circ$  の結合性により、次のことがわかる：

**命題 2.8.**  $\mathcal{F}$  を Frobenius potential とする。このとき、 $i, j, k, l = 1, \dots, \mu$  に対して、

### WDVV 方程式 (WDVV equations)

$$\sum_{a,b=1}^{\mu} \partial_i \partial_j \partial_a \mathcal{F} \cdot \eta^{ab} \cdot \partial_b \partial_k \partial_l \mathcal{F} = \sum_{a,b=1}^{\mu} \partial_i \partial_k \partial_a \mathcal{F} \cdot \eta^{ab} \cdot \partial_b \partial_j \partial_l \mathcal{F} \quad (2.8)$$

が成立する. ここで,  $(\eta^{ab}) := (\eta_{ab})^{-1}$  とする.

Euler ベクトル場の勾配  $N := \nabla E : \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{T}_M$  は  $N(\mathcal{T}_M^f) \subset \mathcal{T}_M^f$  をみたし, その固有値は重要な不変量を与える:

**命題 2.9.**  $\mathbb{C}$ -線型写像  $N : \mathcal{T}_M^f \rightarrow \mathcal{T}_M^f$  が対角化可能であるとき, 平坦座標  $t_1, \dots, t_\mu$  および複素数  $q_i, r_i$  で, Euler ベクトル場  $E$  が

$$E = \sum_{i=1}^{\mu} \{(1 - q_i)t_i + r_i\} \partial_i, \quad (2.9)$$

となるものが存在する. ただし,  $q_1 = 0$  であり,  $q_i = 1$  のときのみ  $r_i \neq 0$  である. とくに,  $q_i + q_j \neq d$  ならば  $\eta_{ij} = 0$  である.

**定義 2.10.**  $\mathbb{C}$ -線型写像  $N : \mathcal{T}_M^f \rightarrow \mathcal{T}_M^f$  は対角化可能であるとする. このとき, 命題 2.9 で得られる複素数の集合  $\{q_1, \dots, q_\mu\}$  を, **スペクトラム (spectrum)** という.

このようにして, Frobenius 構造から平坦座標・Frobenius potential・スペクトラムという量を導いてきたが, 逆にこれらによって, Frobenius 構造は局所的に決定されることが知られている (cf. Dubrovin [4] の補題 1.2).

## 3 再構築定理 A

実は, Frobenius 多様体を比較するのは容易ではない. つまり, Frobenius 多様体の圏を考えたとき, この圏はアーベル圏でないうえに, 射は単射のみである. したがって, 通常の代数系のように, 何らかの方法で与えた射の核や余核を調べることで同型を証明する, といった手法を用いることができない. そこで, Frobenius 多様体の同型を証明するためには, 「ある初期条件のもとで WDVV 方程式の解が一意的に存在すること」を主張する, 一意性定理ないし再構築定理と呼ばれるものが必要となる.

ここでは, オービフォールド射影直線のミラー対称性に用いる再構築定理を与える.  $r$  を 3 以上の整数,  $A = (a_1, \dots, a_r)$  を 2 以上の整数の組とし,

$$\mu_A := 2 + \sum_{i=1}^r (a_i - 1), \quad \chi_A := 2 + \sum_{i=1}^r \left( \frac{1}{a_i} - 1 \right) \quad (3.1)$$

とおく. これらはそれぞれ, オービフォールド射影直線に対するオービフォールドコホモロジー群の階数およびオービフォールドオイラー標数となる.

**定理 3.1.**  $M$  を  $\mathcal{O}_M = \mathbb{C}((e^{t_{\mu_A}}))[[t_1, t_{1,1}, \dots, t_{i,j}, \dots, t_{r,a_r-1]]$  となるような形式的多様体とする. このとき,  $(t_1, t_{1,1}, \dots, t_{i,j}, \dots, t_{r,a_r-1}, t_{\mu_A})$  を平坦座標とする階数  $\mu_A$  次元 1 の Frobenius 構造で, 以下の条件をみたすものが一意的に存在する:

(i) 単位ベクトル場  $e$  および Euler ベクトル  $E$  は次のように与えられる:

$$e = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad E = t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{a_i-1} \frac{a_i - j}{a_i} t_{i,j} \frac{\partial}{\partial t_{i,j}} + \chi_A \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}.$$

(ii) 非退化対称  $\mathcal{O}_M$ -双線型形式  $\eta$  は次のように与えられる:

$$\eta \left( \frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}} \right) = \eta \left( \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}, \frac{\partial}{\partial t_1} \right) = 1,$$

$$\eta \left( \frac{\partial}{\partial t_{i_1, j_1}}, \frac{\partial}{\partial t_{i_2, j_2}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{a_{i_1}} & i_1 = i_2 \text{ かつ } j_2 = a_{i_1} - j_1, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

(iii) Frobenius potential  $\mathcal{F}$  の制限  $\mathcal{F}|_{t_1=0}$  は, 斉次性  $E\mathcal{F}|_{t_1=0} = 2\mathcal{F}|_{t_1=0}$  をみたし, 変数  $t_{1,1}, \dots, t_{r,a_r-1}, e^{t_{\mu_A}}$  についての形式的べき級数である:

$$\mathcal{F}|_{t_1=0} \in \mathbb{C}[[t_{1,1}, \dots, t_{1,a_1-1}, \dots, t_{i,j}, \dots, t_{r,1}, \dots, t_{r,a_r-1}, e^{t_{\mu_A}}]].$$

(iv) 条件 (iii) のもとで, Frobenius potential  $\mathcal{F}$  の制限  $\mathcal{F}|_{t_1=e^{t_{\mu_A}}=0}$  は次のように  $r$  項に分解する:

$$\mathcal{F}|_{t_1=e^{t_{\mu_A}}=0} = \sum_{i=1}^r \mathcal{G}^{(i)}, \quad \mathcal{G}^{(i)} \in \mathbb{C}[[t_{i,1}, \dots, t_{i,a_i-1}]], \quad i = 1, \dots, r.$$

(v) 条件 (iii) を仮定する.  $\mathcal{T}_M$  の枠  $\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_{1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_{r,a_r-1}}, \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}$  of  $\mathcal{T}_M$  に関して, 積  $\circ$  は極限  $t_1 = t_{1,1} = \dots = t_{r,a_r-1} = e^{t_{\mu_A}} = 0$  に拡張される. とくに, この極限において得られる  $\mathbb{C}$ -代数は,

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_r] / (x_i x_j, a_i x_i^{a_i} - a_j x_j^{a_j})_{1 \leq i \neq j \leq r},$$

と同型となる. ただし,  $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, a_i - 1$  のとき  $\partial/\partial t_{i,j}$  は  $x_i^j$  に,  $\partial/\partial t_{\mu_A}$  は  $a_1 x_1^{a_1}$  に写される.

(vi) Frobenius potential  $\mathcal{F}$  の中に, 次の項が係数 1 であられる:

$$\left( \prod_{i=1}^r t_{i,1} \right) e^{t_{\mu_A}}.$$

この定理の証明は,  $r = 3$  のとき石橋-白石-高橋 [8] で, 一般の  $r$  については白石 [19] で与えられている. いずれも, 長さという量を単項式に対して定め, WDVV 方程式を長さに関して帰納的に解くことによってなされる.

## 4 再構築定理 B

特異点に対する周期写像の理論に触発され, Dubrovin は Frobenius 構造の理論において交差形式の概念を導入した. ここでは, 平坦座標を用いた具体的表示によりその定義を与えておく.

**定義 4.1** (cf. [4] の定義 3.2).  $(M, \eta, \circ, e, E)$  を Frobenius 多様体とする.  $\Omega_M^1$  上の  $\mathcal{O}_M$ -双線型形式  $g: \Omega_M^1 \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega_M^1 \rightarrow \mathcal{O}_M$  を, 平坦座標  $t_1, \dots, t_\mu$  を用いて,

$$g(dt^i, dt^j) := \sum_{k,l=1}^{\mu} \eta^{ik} \eta^{jl} E(\partial_k \partial_l \mathcal{F})$$

として定義する. このとき,  $g$  を Frobenius 多様体に対する **交差形式 (intersection form)** という.

定義により, 単位ベクトル場  $e$  を  $g$  に作用させると, 対称双線型形式  $\eta$  が得られることに注意する. 実は, 次元が 1 以下である場合などの特殊な状況下では, 交差形式  $g$  は Frobenius 構造を決定できるほどの重要な情報を持つことがわかる. 今回必要とするのは次のものである.

**定理 4.2** ([20] の定理 7.1).  $M$  を  $\mathcal{O}_M = \mathbb{C}((e^{t_{\mu_A}}))[[t_1, t_{1,1}, \dots, t_{i,j}, \dots, t_{r,a_r-1}]]$  となるような形式的多様体とする. このとき,  $(t_1, t_{1,1}, \dots, t_{i,j}, \dots, t_{r,a_r-1}, t_{\mu_A})$  を平坦座標とする階数  $\mu_A$  次元 1 の Frobenius 構造で, 次の単位ベクトル場  $e$  と Euler ベクトル場  $E$  を持つものは, 交差形式  $g$  により一意的に決定される:

$$e = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad E = t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{a_i-1} \frac{a_i - j}{a_i} t_{i,j} \frac{\partial}{\partial t_{i,j}} + \chi_A \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}. \quad (4.1)$$



## 5 蛸

$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  を  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  上の互いに相異なる  $r$  点の組で  $\lambda_1 = \infty$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 1$  と正規化したものとする. 組合せ論的データ  $(A, \Lambda)$  に対して, 次のような表現論的対象を与えることができる.

**定義 5.1** (白石-高橋-和田 [22] の定義 2.21). 関係式付き箭の経路代数  $\mathbb{C}\tilde{\mathbb{T}}_{A,\Lambda} := \mathbb{C}\tilde{\mathbb{T}}_A/\mathcal{I}_\Lambda$  を以下の手順で定め, これを  $(A, \Lambda)$  型の **蛸 (octopus)** とよぶ.

(i) 箭  $\tilde{\mathbb{T}}_A = (\tilde{\mathbb{T}}_{A,0}, \tilde{\mathbb{T}}_{A,1}, s, t)$  を以下で定める:

- 頂点の集合  $\tilde{\mathbb{T}}_{A,0}$  を次のものとする:

$$\tilde{\mathbb{T}}_{A,0} := \mathbb{T}_{A,0} \amalg \{\mu_A\} = \{1\} \amalg \left( \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{a_i-1} \{(i, j)\} \right) \amalg \{\mu_A\}. \quad (5.1a)$$

- 矢の集合  $\tilde{\mathbb{T}}_{A,1}$  は

$$\tilde{\mathbb{T}}_{A,1} := \mathbb{T}_{A,1} \amalg \left( \prod_{i=1}^r \{f_{i,\mu_A}\} \right) = \left( \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{a_i-1} \{f_{i,j}\} \right) \amalg \left( \prod_{i=1}^r \{f_{i,\mu_A}\} \right) \quad (5.1b)$$

であるとし, 各矢  $f$  の始点  $s(f)$  と終点  $t(f)$  は次で与えられるものとする:

$$s(f_{i,1}) = 1, \quad t(f_{i,1}) = (i, 1), \quad i = 1, \dots, r, \quad (5.1c)$$

$$s(f_{i,j}) = (i, j-1), \quad t(f_{i,j}) = (i, j), \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 2, \dots, a_i-1, \quad (5.1d)$$

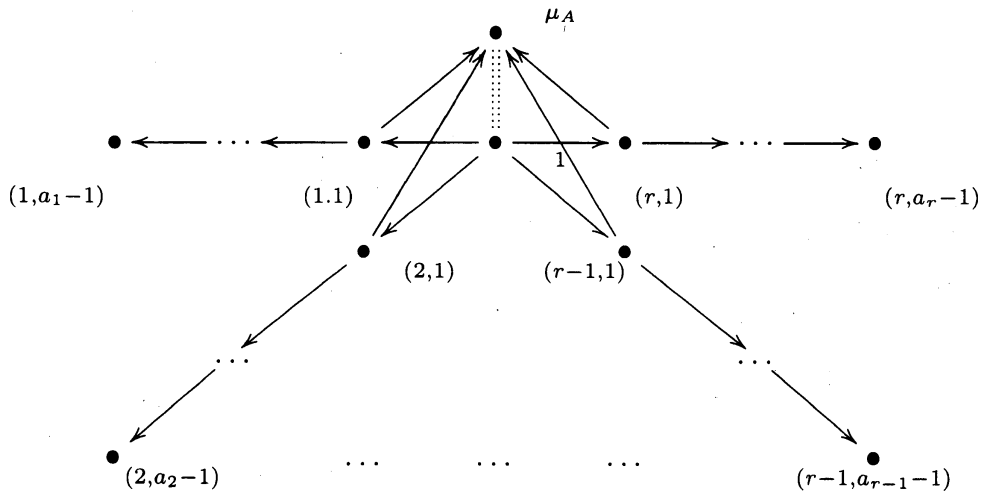
$$s(f_{i,\mu_A}) = (i, 1), \quad t(f_{i,\mu_A}) = \mu_A, \quad i = 1, \dots, r. \quad (5.1e)$$

(ii) 経路代数  $\mathbb{C}\mathbb{T}_A$  のイデアル  $\mathcal{I}_\Lambda$  を

$$\mathcal{I}_\Lambda := \left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(1)} f_{i,1} f_{i,\mu_A}, \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(2)} f_{i,1} f_{i,\mu_A} \right\rangle, \quad (5.1f)$$

で定める. ここで,  $(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) = (1, 0)$  および  $(\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}) = (\lambda_i, 1)$ ,  $i = 2, \dots, r$  とする.

蛸の絵を描いてみると、下のようになる：



注意 5.2. Clawley-Boevey は [3] において烏賊 (squid) と呼ばれる関係式付き籠の経路代数を与えている. 烏賊と蛸は異なるものであるが大変よく似ている. それらは同型ではないが導来同値であって, mutation で移りあう関係にある.

ここで,  $A = (a_1, \dots, a_r)$  の  $\chi_A$  に関する分類について少し述べておく. すぐにわかることだが,  $\chi_A > 0$  となるのは,  $A$  が  $(1, a_2, a_3), (2, 2, a_3), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$  のいずれかの場合であり, 常に  $r = 3$  となる. また, このとき  $A$  型の蛸は対応する型の拡大 Dynkin 籠 (つまり,  $\mu_A$  番目の頂点を取って得られる Dynkin 籠の拡大として得られるもの) と mutation で移りあうことが知られている. 次に,  $\chi_A = 0$  となるのは,  $A$  が  $(2, 2, 2, 2), (3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6)$  のいずれかであり, このとき  $A$  型の蛸は対応する楕円 Dynkin 籠に他ならない. 最後に,  $\chi_A < 0$  となる  $A$  は明らかに無限個あり, このときの蛸を一般にカスプ型の蛸という.

蛸  $\mathbb{C}\tilde{\mathbb{T}}_{A,\Lambda}$  に対して, 蛸の有限次元表現の有界導来圏  $D^b(\mathbb{C}\tilde{\mathbb{T}}_{A,\Lambda})$  を経由して, 自然な方法で Weyl 群  $W_A$  を定めることができる.  $W_A$  は  $\Lambda$  に依存しない, 導来圏  $D^b(k\tilde{\mathbb{T}}_{A,\Lambda})$  の不変量となる. とくに,  $\chi_A > 0$  のとき  $W_A$  は対応する型のアフィン Weyl 群に,  $\chi_A = 0$  のとき  $W_A$  は対応する型の楕円 Weyl 群となる. カスプ型の蛸に対する Weyl 群  $W_A$  を  $A$  型のカスプ Weyl 群 (cuspidal Weyl group of type  $A$ ) と呼ぶ. 蛸に付随する Weyl 群の構造については白石氏が解説を行うので, ここでは省略する.

実は,  $\chi_A \neq 0$  に対する不変式論を考えると,  $W_A$  ではなく完全列

$$\{1\} \longrightarrow W_A \longrightarrow \widehat{W}_A \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \{1\} \tag{5.2}$$

で与えられる群を考えるほうが都合がよい. そして,  $\chi_A > 0$  のとき  $\widehat{W}_A$  は  $A$  型の拡大  $A$

フィン Weyl 群 (extended affine Weyl group of type  $A$ ) (Dubrovin–Zhang [5]),  $\chi_A < 0$  のとき  $\widehat{W}_A$  は  $A$  型の拡大カスプ Weyl 群 (extended cuspidal Weyl group of type  $A$ ) (白石–高橋–和田 [22]) と呼ぶことにする.

## 6 オービフォールド射影直線

また, Geigle–Lenzing [7] に従って, 組合せ論的データ  $(A, \Lambda)$  に対して, 代数幾何的対象も与えることができる. まず, 環  $S_{A, \Lambda}$  を

$$S_{A, \Lambda} := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r] / (X_i^{a_i} - X_2^{a_2} + \lambda_i X_1^{a_1}; i = 3, \dots, r). \quad (6.1)$$

で定める. さらに,  $r$  個の文字  $\vec{X}_i, i = 1, \dots, r$  で生成される自由アーベル群の商として定まるアーベル群

$$L_A := \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\vec{X}_i / (a_i \vec{X}_i - a_j \vec{X}_j; 1 \leq i < j \leq r) \quad (6.2)$$

を考える. このとき,  $S_{A, \Lambda}$  は自然に  $L_A$  で次数づけられることが直ちにわかる.

**定義 6.1.** 商スタック  $\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1$  を

$$\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1 := [(\mathrm{Spec}(S_{A, \Lambda}) \setminus \{0\}) / \mathrm{Spec}(CL_A)], \quad (6.3)$$

で定め,  $(A, \Lambda)$  型のオービフォールド射影直線または Geigle–Lenzing 重み付き射影直線 (Geigle–Lenzing weighted projective line) という.

$\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1$  は射影直線を粗なモジュライ空間として持つ Deligne–Mumford スタックである. したがって,  $\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1$  に対する Gromov–Witten 不変量が定義できる (cf. Abramovich–Graber–Vistoli [1], Chen–Ruan [2]). このとき, Gromov–Witten 不変量がみたす性質により, 次の命題が得られる.

**命題 6.2.** 構造層が  $\mathbb{C}((e^{t\mu_A}))[[t_1, t_{1,1}, \dots, t_{i,j}, \dots, t_{r, a_r - 1}]]$  で,  $\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1$  に対する種数 0 の Gromov–Witten 不変量を Frobenius potential として持つような, 階数  $\mu_A$  次元 1 の形式的 Frobenius 多様体が定まる.

この命題で得られた階数  $\mu_A$  次元 1 の形式的 Frobenius 多様体を  $M_{\mathbb{P}_{A, \Lambda}^1}^{GW}$  であらわす.

ここで少し圏論的な話題に移る. 有限生成  $L_A$ -次数付き  $S_{A, \Lambda}$ -加群の圏を  $\mathrm{gr}^{L_A}\text{-}S_{A, \Lambda}$  で, 有限長さの  $L_A$ -次数付き  $S_{A, \Lambda}$ -加群のなす  $\mathrm{gr}^{L_A}\text{-}S_{A, \Lambda}$  の充満部分圏を  $\mathrm{tor}^{L_A}\text{-}S_{A, \Lambda}$  で

あらわすことにする. また, オービフォールド射影直線  $\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1$  上の接続層の圏を  $\text{coh}(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$  で, その有界導来圏を  $\mathcal{D}^b\text{coh}(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$  であらわす. このとき, 定義により,

$$\text{coh}(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) = \text{gr}^{L_A-S_{A,\Lambda}}/\text{tor}^{L_A-S_{A,\Lambda}} \quad (6.4)$$

が成立することに注意しておく. 圏  $\text{coh}(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$  および  $\mathcal{D}^b\text{coh}(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1)$  の表現論的側面が Geigle–Lenzing により [7] において研究されているが, なかでも次の結果をここでは扱う:

**命題 6.3** ([7] の命題 4.1 の系). 三角圏の同値

$$\mathcal{D}^b\text{coh}(\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1) \simeq \mathcal{D}^b(\text{CT}_{A,\Lambda}) \quad (6.5)$$

が成立する.

## 7 カスパ多項式

最後に, シンプレクティック幾何学的対象を与える. ただし, 残念ながら一般の  $(A, \Lambda)$  に対しては何を対応させるべきかまだわかっていないため, ここでは  $r = 3$ , つまり  $A = (a_1, a_2, a_3)$  とする. このとき,  $\Lambda = (\infty, 0, 1)$  であるため, 本質的に  $\Lambda$  依存性は無視してよい.

**定義 7.1.** 多項式  $f_A(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$  を

$$f_A(x_1, x_2, x_3) := x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + x_3^{a_3} - q^{-1}x_1x_2x_3, \quad q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (7.1)$$

で定め, これを  $A$  型のカスパ多項式 (cusp polynomial of type  $A$ ) という. とくに,  $\chi_A > 0$  のときは, アフィンカスパ多項式と呼ぶ.

**注意 7.2.**  $\chi_A < 0$  のときは, カスパ多項式は原点に通常の意味でのカスパ特異点を定める. 一方で,  $\chi_A > 0$  のときは,  $\mathbb{C}^3$  の中で  $f_A = 0$  があらわす代数多様体に注目し, 局所的に一つの特異点に集中するのではなく, 大域的に散らばっている特異点同志の振る舞いをも調べる.

カスパ多項式に対して, 消滅サイクルの格別な基底 (distinguished basis of vanishing cycles) を対象とし (高次の) 積がフレーアーホモロジーで定まるような  $A_\infty$ -圏, 有向深谷圏 (directed Fukaya category)  $\text{Fuk}^\rightarrow(f_A)$ , およびその有界導来圏  $\mathcal{D}^b\text{Fuk}^\rightarrow(f_A)$  が考えられる. このとき, 次のことがわかる:

**命題 7.3.**  $A = (a_1, a_2, 2)$  または  $A = (3, 3, 3)$  であるとする. このとき, 三角圏の同値

$$D^b \text{Fuk}^\rightarrow(f_A) \simeq \mathcal{D}^b(\mathbb{C}\tilde{\mathbb{T}}_{A,(\infty,0,1)}) \quad (7.2)$$

が成立する.

$A = (a_1, a_2, 2)$  のときの  $\text{Fuk}^\rightarrow(f_A)$  の記述および定理の証明は [23] に与えられている. また,  $\chi_A = 0$  のとき, つまり  $A$  が  $(3, 3, 3)$ ,  $(4, 4, 2)$ ,  $(6, 3, 2)$  のときは, 二木-植田 [6] による結果である.

また,  $f_A$  の変形

$$F_A(x_1, x_2, x_3; s_1, s_{1,1}, \dots, s_{3,a_3-1}, s_{\mu_A}) \\ := x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + x_3^{a_3} - s_{\mu_A}^{-1} x_1 x_2 x_3 + s_1 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{a_i-1} s_{i,j} x_i^j \quad (7.3)$$

に基づき, 齋藤構造 (フィルター付き de Rham コホモロジー・Gauß-Manin 接続・高次剰余形式) および原始形式を構成することができる [9, 20]. すると, [16] で解説されている一般論により, 原始形式を一つ固定するごとに, 変形の底空間の極限  $(s_1, s_{1,1}, \dots, s_{3,a_3-1}, s_{\mu_A}) \rightarrow (0, 0, \dots, 0, 0)$  の近傍で, 階数  $\mu_A$  次元 1 の Frobenius 多様体が定まる. とくに,  $s_1 = s_{1,1} = \dots = s_{3,a_3-1} = 0$  で定まる部分空間に制限したときに  $[s_{\mu_A}^{-1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3]$  となるような原始形式に対応する Frobenius 多様体を  $M_{f_A}^{def}$  であらわすことにする.

## 8 ミラー対称性

準備が整ったので, ここで結果を述べていく. まず, 古典的ミラー対称性から与える.

**定理 8.1.** 形式的 Frobenius 多様体の同型  $M_{\mathbb{P}_{A,\Lambda}^1}^{GW} \cong M_{f_A}^{def}$  が成立する.

この定理の証明は,  $\chi_A > 0$  のとき石橋-白石-高橋 [8] の系 4.5,  $\chi_A \leq 0$  のとき白石-高橋 [20] の定理 4.1 で与えられていて, いずれも両辺の Frobenius 構造が再構築定理 A (定理 3.1) の条件をみたすことを示すことによりなされる. 佐竹-高橋 [18] によって  $\chi_A = 0$  の場合の主張が得られていたが, その際の証明を  $\chi_A$  が一般の場合に拡張したものである.

なお, Frobenius 多様体の同型が構成できることについては, 正則 3 形式が原始形式であることを用いなくても証明が原理的には可能であり, Milanov-Tseng [11] により  $a_1 = 1$  のときに, Rossi [12] により  $\chi_A > 0$  のとき, すでに知られていた.

ここで、多項式の変形から得られる Frobenius 構造は半単純であるので  $M_{f_A}^{def}$  は半単純、ゆえに古典的ミラー対称性により  $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}}^{GW}$  も半単純であることに注意しておく。さらに、 $M_{f_A}^{def}$  は複素多様体上の Frobenius 構造を形式化したものであるので、 $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}}^{GW}$  も複素多様体の形式化であることがわかる。

また、命題 6.3 および命題 7.3 の系として（および  $a_1 = 1$  のときに知られている結果を合わせて）、ホモロジー的ミラー対称性が得られる。

**定理 8.2.**  $\chi_A > 0$  のとき、三角圏の同値

$$D^b\text{Fuk}^\rightarrow(f_A) \simeq \mathcal{D}^b(\text{CT}_{A,(\infty,0,1)}) \simeq D^b\text{coh}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}) \quad (8.1)$$

が成立する。

原始形式を特定したことのご利益の一つとして、古典的ミラー対称性とホモロジー的ミラー対称性の両方があることにより、Dubrovin 予想が導かれる。詳しい用語の解説は省略するが、今の場合次の主張が成立する。

**定理 8.3** ([10] の定理 6.1).  $\chi_A > 0$  を仮定する。標準座標 (canonical coordinates) の値が互いに相異なるような  $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}}^{GW}$  の半単純点を一つ取って固定しておく。このとき、この点における Frobenius 構造の第一構造接続 (first structure connection) の Stokes 行列は、三角圏  $D^b\text{coh}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda})$  のある full exceptional collection の Euler 行列と同一視できる。

一方、Weyl 群不変式論に関して、次のことが得られている。詳しい用語の詳細はウェブページ <http://frompde.sissa.it/workshop2013/talks/16Mon/Takahashi.pdf> #search='sissa+extended+cuspidal' にあるスライドを参照していただきたい。中でも重要なものが、「性質 (P)」と呼んでいるものである。

まず、Cartan 行列（を多少改変したもの）により、「交差形式の候補」が Cartan 部分代数（を多少改変したもの）の上に定まる。それは自然に平坦計量であり、対応する平坦座標を考えることができる（注意：これは Frobenius 構造の平坦座標ではなく、第二構造接続の解として得られる「周期」である）。このとき「性質 (P)」とは、「単位ベクトル場の候補」で「交差形式の候補」とその Levi-Civita 接続の（この平坦座標系に関する）反変成分を 2 階微分すると 0 になる、という性質のことである。ここで、定義 4.1 のすぐ後にある、Frobenius 多様体に対する交差形式  $g$  と非退化対称双線型形式  $\eta$  との関係を思い出してほしい。

**定理 8.4** (白石-高橋 [21]).  $\chi_A \neq 0$  を仮定する。性質 (P) がみたされるならば、構造層

が  $\mathbb{C}((e^{t_{\mu_A}}))[[t_1, t_{1,1}, \dots, t_{r, a_r-1}]]$  で,  $(t_1, t_{1,1}, \dots, t_{r, a_r-1}, t_{\mu_A})$  を平坦座標とし, 次の単位ベクトル場  $e$  と Euler ベクトル場  $E$  を持ち, 蛸から  $\mu_A$  番目の頂点除いた筋の Cartan 行列と  $\chi_A$  によって定まる交差形式を持つような, 階数  $\mu_A$  次元 1 の形式的 Frobenius 多様体が一意的に定まる.

$$e = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad E = t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{a_i-1} \frac{a_i - j}{a_i} t_{i,j} \frac{\partial}{\partial t_{i,j}} + \chi_A \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}. \quad (8.2)$$

性質 (P) がみたされるときに得られる階数  $\mu_A$  次元 1 の形式的 Frobenius 多様体を  $M_{\widehat{W}_A}^{Weyl}$  であらわす.  $\chi_A > 0$  ならば, 簡単な次数の計算で性質 (P) は成立することがわかり, 実際に  $M_{\widehat{W}_A}^{Weyl}$  は存在する (Dubrovin–Zhang [5] の定理 2.1). なお,  $\chi_A = 0$  のときにも楕円 Weyl 群の不変式論により Frobenius 多様体が構成される (齋藤 [14], 佐竹 [17]).  $\chi_A = 0$  の特殊性により, 構成法と主張は技術的に少々異なるが, 性質 (P) によって上の命題の形で一意的に Frobenius 多様体得られるというストーリーは全く同じである. なお, 性質 (P) の起源は齋藤 [15] である.

注意 8.5. ちなみに「P」という文字は, この性質が原始形式 (primitive form) の存在に非常に関連性があると思うゆえんである.

再構築定理 B (定理 4.2) を用いて, 次の主張を示すことができる.

**定理 8.6.**  $r = 3$  かつ  $\chi_A \neq 0$  を仮定する. 性質 (P) がみたされるとき, 形式的 Frobenius 多様体の同型  $M_{f_A}^{def} \cong M_{\widehat{W}_A}^{Weyl}$  が成立する.

これは, Frobenius 多様体  $M_{f_A}^{def}$  の交差形式が原始形式の周期積分によって具体的に計算できることによる (白石–高橋 [20] の定理 5.14).

この結果,  $r = 3$  のときには, 性質 (P) のもとで, 形式的 Frobenius 多様体の同型  $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}}^{GW} \cong M_{f_A}^{def} \cong M_{\widehat{W}_A}^{Weyl}$  が成立することになる. そこで疑問に思うのは,  $r$  に関する仮定無しに直接  $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}}^{GW} \cong M_{\widehat{W}_A}^{Weyl}$  を示すことはできるか, ということである. それに対する答えを述べて, この文章を終えることにする.

**定理 8.7** (白石–高橋 [21]).  $\chi_A \neq 0$  を仮定する. 性質 (P) がみたされるならば, 形式的 Frobenius 多様体の同型  $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}}^{GW} \cong M_{\widehat{W}_A}^{Weyl}$  が成立する.

証明は  $M_{\widehat{W}_A}^{Weyl}$  が再構築定理 A (定理 3.1) の条件をみたすことを示すことによってなされる. その際に, 蛸の  $r$  本の足の部分と  $A = (1, 1, a_i - 1)$ ,  $i = 1, \dots, r$  に対する Frobenius 構造  $M_{\widehat{W}_A}^{Weyl}$  の関係が鍵となる.

## 参考文献

- [1] D. Abramovich, T. Graber and A. Vistoli, *Gromov–Witten theory of Deligne–Mumford stacks*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 5, pp. 1337–1398.
- [2] W. Chen and Y. Ruan, *Orbifold Gromov–Witten Theory*, Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), pp. 25–85, Contemp. Math., **310**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [3] W. Crawley-Boevey, *Indecomposable parabolic bundles and the existence of matrices in prescribed conjugacy class closures with product equal to the identity*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 100 (2004), 171–207.
- [4] B. Dubrovin, *Geometry of 2d topological field theories*, Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), Lecture Notes in Math., vol. 1620, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [5] B. Dubrovin and Y. Zhang, *Extended Affine Weyl Groups and Frobenius Manifolds*, Compositio Math. 111 (1998), 167–219.
- [6] M. Futaki and K. Ueda *Homological mirror symmetry for Brieskorn–Pham singularities*, Sel. Math. New Ser., 17 (2011) 435–452.
- [7] W. Geigle and H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), 9–34, Lecture Notes in Math., **1273**, Springer, Berlin, (1987).
- [8] Y. Ishibashi, Y. Shiraishi, A. Takahashi, *A Uniqueness Theorem for Frobenius Manifolds and Gromov–Witten Theory for Orbifold Projective Lines*, to appear in J. Reine Angew. Math., DOI: 10.1515.
- [9] Y. Ishibashi, Y. Shiraishi and A. Takahashi *Primitive forms for affine cusp polynomials*, arXiv:1211.1128.
- [10] K. Iwaki, A. Takahashi, *Stokes matrices for the quantum cohomologies of a class of orbifold projective lines*, Journal of Mathematical Physics **54**, 101701 (2013); doi: 10.1063/1.4823483
- [11] T. Milanov, H.-H. Tseng, *The spaces of Laurent polynomials,  $\mathbb{P}^1$ -orbifolds, and integrable hierarchies*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle’s Journal), Volume 2008, Issue 622, Pages189–235.



- [12] P. Rossi, *Gromov-Witten theory of orbicurves, the space of tri-polynomials and Symplectic Field Theory of Seifert fibrations*, Math. Ann., 348 (2010), pp. 265–287.
- [13] K. Saito, *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 1231–1264.
- [14] K. Saito, *Extended Affine Root System II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **26** (1990) 15–78.
- [15] K. Saito, *On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **29.4** (1993): 535–579.
- [16] K. Saito and A. Takahashi, *From Primitive Forms to Frobenius manifolds*, Proc. Symp. Pure Math. **78** (2008), 31–48.
- [17] I. Satake, *Frobenius manifolds for elliptic root systems*, Osaka J. Math. **47** (2010) 301–330.
- [18] I. Satake, A. Takahashi, *Gromov–Witten invariants for mirror orbifolds of simple elliptic singularities*, Annales de l’institut Fourier **61** (2011), 2885–2907.
- [19] Y. Shiraishi, *On Frobenius Manifolds from Gromov–Witten Theory of Orbifold Projective Lines with  $r$ -orbifold points*, in preparation.
- [20] Y. Shiraishi and A. Takahashi, *On the Frobenius Manifolds for Cusp Singularities*, arXiv:1308.0105.
- [21] Y. Shiraishi and A. Takahashi, *Invariant theory of Extended Cuspidal Weyl Groups*, in preparation.
- [22] Y. Shiraishi, A. Takahashi, K. Wada, *On Weyl Groups and Artin Groups Associated to Orbifold Projective Lines*, arXiv:1401.4631.
- [23] A. Takahashi, *Mirror symmetry between orbifold projective lines and cusp singularities*, accepted for publication in Advanced Studies of Pure Mathematics.