

Gelfand-Cetlin 系の非トーラス Lagrange ファイバーについて*

野原 雄一
香川大学 教育学部

Yuichi Nohara
Faculty of Education, Kagawa University

1 序

Gelfand-Cetlin 系とは Guillemin-Sternberg [11] により導入された旗多様体 $F = GL(n, \mathbb{C})/P$ 上の完全可積分系

$$\Phi : F \longrightarrow \mathbb{R}^{(\dim_{\mathbb{R}} F)/2},$$

すなわち、関数的に独立で、互いに Poisson 可換な関数の組である。その像 $\Delta = \Phi(F)$ は Gelfand-Cetlin 多面体と呼ばれる凸多面体になり、 Δ の内点のファイバーが Lagrange トーラスになるなど、トーリック多様体上の運動量写像とよく似た性質を持っている。一方で、 Φ は Δ の余次元 3 のある面で滑らかではなく、その上にはトーラスではない Lagrange ファイバーが存在するなど、トーリック多様体の場合とは異なる面もある。本稿では、そのような非トーラス Lagrange ファイバーに対する Floer コホモロジーについて考える。

トーリック多様体の Lagrange トーラス軌道に対する Floer 理論とそのミラー対称性への応用は深谷-Oh-太田-小野 [8] により非常に深く研究されている。その結果の一部を簡単に思い出しておく。 (X, ω) を複素 N 次元のコンパクトなトーリック多様体、 $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ をトーラス作用の運動量写像とし、その運動量多面体を $\Delta = \Phi(X)$ とする。各内点 $u \in \text{Int } \Delta$

*本研究は科研費 (23740055) の助成を受けたものである。

に対し, そのファイバーを $L(\mathbf{u}) = \Phi^{-1}(\mathbf{u})$ と書くことにすると, $L(\mathbf{u})$ に境界を持つ正則円盤を“数える”ことにより, $L(\mathbf{u})$ のコホモロジー群 $H^*(L(\mathbf{u}); \Lambda_0)$ に A_∞ 構造が入る. ただし

$$\Lambda_0 = \Lambda_0^{\mathbb{C}} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \geq 0, \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty \right\}$$

は Novikov 環である. このとき, 次が成り立つ.

- A_∞ 構造により定義されるポテンシャル関数 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ は,

$$\bigcup_{\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta} H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}) \cong \text{Int } \Delta \times (\Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})^N \quad (1)$$

上の関数と見なすことができる. Λ_0 の代わりに $\sqrt{-1}\mathbb{R}$ を考えると, $H^1(L(\mathbf{u}); \sqrt{-1}\mathbb{R}/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})$ は $L(\mathbf{u})$ の双対トーラスであり, (1) は代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^N$ (の開集合) だと思えることができる. X が Fano 多様体の場合には, $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ は適当な変数変換のもとで Laurent 多項式となり, X の Landau-Ginzburg ミラーのスーパーポテンシャルに一致する.

- ポテンシャル関数 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ の臨界点は, Floer コホモロジーが非自明な Lagrange ファイバー $L(\mathbf{u})$ と $b \in H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})$ の組 $(L(\mathbf{u}), b)$ に対応する.
- X の量子コホモロジー $QH(X)$ はポテンシャル関数の Jacobi 環 $\text{Jac}(\mathfrak{P}\mathfrak{D})$ と同型である.
- ポテンシャル関数の臨界値は $c_1(X) \in QH(X)$ の量子カップ積の固有値と一致する.

詳細は [8] や [9] を参照されたい. 特にポテンシャル関数の臨界点がすべて非退化ならば, その個数は X のコホモロジー群の次元 $\dim H^*(X; \mathbb{Q})$ に一致し, したがって Floer コホモロジーが非自明な $(L(\mathbf{u}), b)$ が $\dim H^*(X)$ 個存在する.

旗多様体上の場合には, Gelfand-Cetlin 系の場合のトーリック退化を用いることによりトーラスファイバーのポテンシャル関数を計算することができ, それが Givental [10], Batyrev, Ciocan-Fontanine, Kim, van Straten [1] により与えられた旗多様体のミラーのスーパーポテンシャルに一致す

ることが分かる (西納-野原-植田 [13]). この場合もポテンシャル関数の臨界点は Floer コホモロジーが非自明な Lagrange トーラスファイバーに対応しているので, ポテンシャル関数からそのようなトーラスファイバーを求めることもできるようになる. しかし, トーリック多様体の場合とは異なり, その数は一般に $H^*(F)$ の次元より小さい. 江口-堀-Xiong [3] や Rietsch [14] は旗多様体のミラーを代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^N$ の部分コンパクト化として構成し, スーパーポテンシャルが正しい数の臨界点を持つことを示している. この“無限遠”の臨界点が何らかの意味で Gelfand-Cetlin 多面体の境界に現れる Lagrange ファイバーと対応していると期待することは自然なことだと思われる. 本稿では 3次元旗多様体 $Fl(3)$ と \mathbb{C}^4 内の 2次元部分空間のなす Grassmann 多様体 $Gr(2,4)$ の場合に, 非トーラスファイバーの Floer コホモロジーについて述べたい. なお, これは植田一石氏 (大阪大学) との共同研究による.

2 Gelfand-Cetlin 系

2.1 旗多様体

記号の準備を兼ねて, 旗多様体の基本的な事実を思い出しておく. 整数の列 $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_r < n_{r+1} = n$ に対し, $F = F(n_1, \dots, n_r, n)$ を部分空間の列

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r \subset V_{r+1} = \mathbb{C}^n, \quad \dim V_i = n_i$$

全体のなす旗多様体とする. 各 $i = 1, \dots, r+1$ に対し $k_i = n_i - n_{i-1}$ とおけば, 旗多様体は

$$F = U(n)/(U(k_1) \times \dots \times U(k_{r+1}))$$

で与えられる. 旗多様体の次元は

$$N = N(n_1, \dots, n_r, n) := \dim_{\mathbb{C}} F(n_1, \dots, n_r, n) = \sum_{i=1}^r (n_i - n_{i-1})(n - n_i)$$

で与えられる. 例えば完備旗多様体 $Fl(3) = F(1, 2, 3)$ は 3次元, \mathbb{C}^4 内の 2次元部分空間のなす Grassmann 多様体 $Gr(2,4) = F(2,4)$ は 4次元である.

ユニタリ群 $U(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ に $U(n)$ 不変な内積を固定し, その双対空間 $\mathfrak{u}(n)^*$ を Hermite 行列の空間 $\sqrt{-1}\mathfrak{u}(n)$ と同一視しておく. 対角行列 $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ で

$$\underbrace{\lambda_1 = \dots = \lambda_{n_1}}_{k_1} > \underbrace{\lambda_{n_1+1} = \dots = \lambda_{n_2}}_{k_2} > \dots > \underbrace{\lambda_{n_{r+1}} = \dots = \lambda_n}_{k_{r+1}}$$

を満たすものをとると, $F(n_1, \dots, n_r, n)$ は λ の随伴軌道 $\mathcal{O}_\lambda \subset \sqrt{-1}\mathfrak{u}(n)$ と同一視できる. \mathcal{O}_λ は固有値が $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ であるような Hermite 行列からなる空間であることに注意する. \mathcal{O}_λ 上の Kostant-Kirillov 形式を ω とする.

旗多様体の Plücker 埋め込みについても思い出しておく. 各 $i = 1, \dots, r$ に対し $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\wedge^{n_i} \mathbb{C}^n)$ とおくと, 旗多様体は

$$\iota: F \hookrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{P}_i, \quad (0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r \subset \mathbb{C}^n) \mapsto (\wedge^{n_1} V_1, \dots, \wedge^{n_r} V_r)$$

により射影空間の直積に埋め込まれる. 射影空間 \mathbb{P}_i の Fubini-Study 形式を $\omega_{\mathbb{P}_i}$ と書くと, Kostant-Kirillov 形式は

$$\omega = \sum_{i=1}^r (\lambda_{n_i} - \lambda_{n_{i+1}}) \omega_{\mathbb{P}_i}$$

と書ける. また, F の第 1 Chern 類は

$$c_1(F) = 2 \sum_{i=1}^r \omega_{\mathbb{P}_i}$$

で与えられる.

例 2.1. 3次元旗多様体 $\text{Fl}(3)$ は Plücker 埋め込みで

$$\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3) \times \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^3) \cong \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$$

に超曲面として埋め込まれる. $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ の斉次座標をそれぞれ $[Z_1 : Z_2 : Z_3]$, $[Z_{23} : Z_{31} : Z_{12}]$ とすると, 旗多様体の像は Plücker 関係式

$$Z_1 Z_{23} + Z_2 Z_{31} + Z_3 Z_{12} = 0$$

で与えられる.

例 2.2. Grassmann 多様体 $\text{Gr}(2, 4)$ は $\mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^4) \cong \mathbb{P}^5$ に超曲面として埋め込まれる. Plücker 座標を $[Z_{12} : Z_{13} : Z_{14} : Z_{23} : Z_{24} : Z_{34}]$ とすると, Plücker 関係式は

$$Z_{12}Z_{34} - Z_{13}Z_{24} + Z_{14}Z_{23} = 0$$

で与えられる.

2.2 Gelfand-Cetlin 系

各 $x \in \mathcal{O}_\lambda$ と $k = 1, \dots, n-1$ に対し, $x^{(k)}$ を x の左上の $k \times k$ 部分行列とする. $x^{(k)}$ も Hermite 行列だから, 実数の固有値

$$\lambda_1^{(k)}(x) \geq \lambda_2^{(k)}(x) \geq \dots \geq \lambda_k^{(k)}(x)$$

を持つ. これをすべての $k = 1, \dots, n-1$ に対して考えることにより, $n(n-1)/2$ 個の関数の組 $(\lambda_i^{(k)})_{1 \leq i \leq k \leq n-1}$ が得られる. これらの固有値たちは

$$\begin{array}{ccccccc}
 \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n-1} & & \lambda_n \\
 \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
 & \lambda_1^{(n-1)} & & \lambda_2^{(n-1)} & & & & & \lambda_{n-1}^{(n-1)} & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & & & & \searrow & & \nearrow \\
 & & \lambda_1^{(n-2)} & & & & & & \lambda_{n-2}^{(n-2)} & & \\
 & & \searrow & & & & & & \searrow & & \\
 & & & \cdots & & & & & \cdots & & \\
 & & & \searrow & & & & & \searrow & & \\
 & & & & \lambda_1^{(1)} & & & & & &
 \end{array} \tag{2}$$

という関係を満たす. λ_i たちの中に等しいものがあるとき, すなわち F が完備旗多様体 $F(1, 2, \dots, n)$ ではない場合, 一部の $\lambda_i^{(k)}$ が定数関数になる. 定数でない $\lambda_i^{(k)}$ の数はちょうど $N = \dim_{\mathbb{C}} F$ に等しいことが分かる. そのような i と k の組 (i, k) の集合を I とすると, Gelfand-Cetlin 系は

$$\Phi = (\lambda_i^{(k)})_{(i,k) \in I} : F(n_1, \dots, n_r, n) \longrightarrow \mathbb{R}^{N(n_1, \dots, n_r, n)}$$

で定義される.

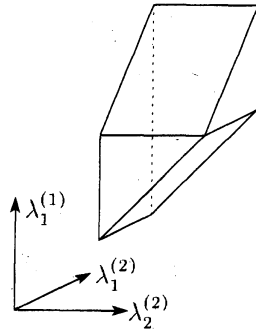


図 1: Fl(3) の Gelfand-Cetlin 多面体.

命題 2.3 (Guillemin-Sternberg [11]). 上のようにして構成された Φ は旗多様体 (F, ω) 上の完全可積分系である. さらに $\lambda_i^{(k)}$ たちは作用変数であり, 像 $\Delta = \Phi(F)$ は不等式 (2) で定義される凸多面体となる. したがって, 各内点 $\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta$ のファイバー $L(\mathbf{u}) = \Phi^{-1}(\mathbf{u})$ は Lagrange トーラスである.

像 Δ を Gelfand-Cetlin 多面体とよぶ.

2.3 Fl(3) の場合

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ をとり, Fl(3) を $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, 0, -\lambda_2)$ の随伴軌道と同一視する. このとき Gelfand-Cetlin 多面体は

$$\begin{array}{ccccc}
 \lambda_1 & & 0 & & -\lambda_2 \\
 \swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \\
 & u_1 & & u_2 & \\
 & \swarrow & \nearrow & & \\
 & & u_3 & &
 \end{array}$$

で定義される 3 次元凸多面体である. Gelfand-Cetlin 系は, 4 つの辺が集まっている頂点 $\mathbf{u}_0 = (0, 0, 0)$ (図 1 で手前にある頂点) 以外では滑らかであり, したがって, $\mathbf{u} \in \Delta \setminus \{\mathbf{u}_0\}$ のファイバー $\Phi^{-1}(\mathbf{u})$ はトーリック多様体の場合と同様に, \mathbf{u} を内点として含む面と同じ次元のトーラスになる. 一方, \mathbf{u}_0 にはトーラスでないファイバーがのっている.

命題 2.4. 頂点 u_0 のファイバー $L_0 = \Phi^{-1}(u_0)$ は

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_\lambda \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = \lambda_1 \lambda_2 \right\}$$

で与えられる 3次元球面 S^3 と同相な Lagrange 部分多様体である. また, このファイバーは

$$\left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SU(3) \mid P \in SU(2) \right\} \cong SU(2)$$

の作用の軌道になっている.

Plücker 埋め込み $\iota: Fl(3) \rightarrow \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ による L_0 の像は

$$\iota(L_0) = \left\{ \left([a_1 : a_2 : \sqrt{\lambda_1/\lambda_2}], [\bar{a}_1 : \bar{a}_2 : -\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}] \right) \mid |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \right\}$$

となる. $Fl(3)$ の反正則対合 τ を

$$\begin{aligned} \tau([Z_1 : Z_2 : Z_3], [Z_{23} : Z_{31} : Z_{12}]) \\ = \left([\bar{Z}_{23} : \bar{Z}_{31} : -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \bar{Z}_{12}], [\bar{Z}_1 : \bar{Z}_2 : -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \bar{Z}_3] \right) \end{aligned} \quad (3)$$

により定義すると, L_0 は τ の固定点集合である. また, $\omega = \lambda_1 \omega_{\mathbb{P}_1} + \lambda_2 \omega_{\mathbb{P}_2}$ だから, $\lambda_1 = \lambda_2$ のときは τ は反シンプレクティック対合でもある.

2.4 Gr(2, 4) の場合

$\lambda > 0$ を固定し, $Gr(2, 4)$ を $\text{diag}(\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda)$ の軌道と同一視する. このとき Gelfand-Cetlin 多面体 Δ は

$$\begin{array}{cccc} \lambda & & \lambda & & -\lambda & & -\lambda \\ & = & & = & & = & = \\ & & \lambda & & u_1 & & -\lambda \\ & & & \searrow & & \swarrow & \\ & & & u_2 & & u_3 & \\ & & & & \searrow & \swarrow & \\ & & & & & u_4 & \end{array}$$

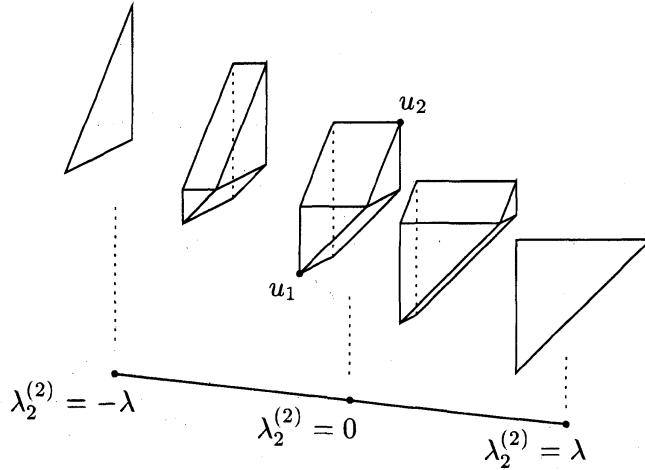


図 2: The Gelfand-Cetlin polytope for $\text{Gr}(2, 4)$

で定義される 4 次元凸多面体となる. 図 2 は射影

$$\Delta \longrightarrow [-\lambda, \lambda], \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \longmapsto u_1$$

を表している. この場合, トーラスでないファイバーは $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$ で定まる辺上に現れる. これは図 2 では, 各 3 次元多面体の 4 本の辺が集まっている頂点を並べてできるのがこの辺である.

命題 2.5. 各 $-\lambda < t < \lambda$ に対し, 辺上の点 (t, t, t, t) 上のファイバー $L_t = \Phi^{-1}(t, t, t, t)$ は

$$L_t = \left\{ \begin{pmatrix} tI_2 & \sqrt{\lambda^2 - t^2}P \\ \sqrt{\lambda^2 - t^2}P^* & (-t)I_2 \end{pmatrix} \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}(4) \mid P \in U(2) \right\} \quad (4)$$

で与えられる $U(2)$ と同相な Lagrange 部分多様体である. また, L_t は

$$\left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \in U(4) \mid P \in U(2) \right\} \cong U(2)$$

の作用の軌道になっている.

$L_t \cong U(2)$ を $S^1 \times S^3 \cong U(1) \times SU(2)$ と

$$U(1) \times SU(2) \longrightarrow U(2), \quad \left(a_0, \begin{pmatrix} a_1 & -\bar{a}_2 \\ a_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -\bar{a}_2 \\ a_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix}$$

により同一視すると, Plücker 埋め込み $\iota : \text{Gr}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^4) \cong \mathbb{P}^5$ による L_t の像は

$$\left\{ \left[\sqrt{\frac{\lambda+t}{\lambda-t}} a_0 : a_0 \bar{a}_2 : a_0 a_1 : -\bar{a}_1 : a_2 : \sqrt{\frac{\lambda-t}{\lambda+t}} \right] \mid |a_0|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \right\}$$

となる. そこで各 $t \in (-\lambda, \lambda)$ に対し, $\text{Gr}(2, 4)$ の反正則対合 τ_t を

$$\begin{aligned} \tau_t([Z_{12} : Z_{13} : Z_{14} : Z_{23} : Z_{24} : Z_{34}]) \\ = \left[\frac{\lambda+t}{\lambda-t} \bar{Z}_{34} : \bar{Z}_{24} : -\bar{Z}_{23} : -\bar{Z}_{14} : \bar{Z}_{13} : \frac{\lambda-t}{\lambda+t} \bar{Z}_{12} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

により定義すると, L_t は τ_t の固定点集合となる. $t = 0$ のとき, τ_0 は反シンプレクティック対合でもあり, $\tau_0(L_t) = L_{-t}$ となる. また, 次も成り立つ.

命題 2.6. $t \neq 0$ のとき L_t は displaceable, すなわち $\text{Gr}(2, 4)$ の Hamilton 同相写像 φ で, $L_t \cap \varphi(L_t) = \emptyset$ となるものが存在する. 実際,

$$g = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \in U(4)$$

とおくと, $g(L_t) = L_{-t}$ となる.

3 Gelfand-Cetlin 系のポテンシャル関数

シンプレクティック多様体 (X, ω) の Lagrange 部分多様体 L (とそれに付随するいくつかのデータ) に対し, L のコホモロジー群 $H^*(L; \Lambda_0)$ 上に A_∞ 構造

$$m_k = \sum_{\beta \in \pi_2(X, L)} T^{\omega(\beta)} m_{k, \beta} : H^*(L; \Lambda_0)^{\otimes k} \longrightarrow H^*(L; \Lambda_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

が定まる ([5, Theorem A]). 技術的なことはすべて省略すると, $m_{k, \beta}$ はだいたい次のようにして構成される. シンプレクティック形式と整合的な概複素構造 J をとり, $\beta \in \pi_2(X, L)$ を代表する J -正則円盤 $v : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (X, L)$ と $k+1$ 個の点 $z_0, \dots, z_k \in \partial D^2$ の組のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{k+1}(J, \beta)$ とする. また, 代入写像を

$$\begin{aligned} \text{ev} = (\text{ev}_0, \dots, \text{ev}_k) : \mathcal{M}_{k+1}(J, \beta) &\longrightarrow L^{k+1} \\ [v, (z_0, \dots, z_k)] &\longmapsto (v(z_0), \dots, v(z_k)) \end{aligned}$$

とすると, $m_{k,\beta} : H^*(L; \Lambda_0)^{\otimes k} \rightarrow H^*(L; \Lambda_0)$ は

$$m_{k,\beta}(x_1, \dots, x_k) = (ev_0)_*(ev_1^* x_1 \cup \dots \cup ev_k^* x_k)$$

により定義される.¹

Novikov 環 Λ_0 の極大イデアルと商体をそれぞれ Λ_+, Λ とする. $H^1(L; \Lambda_+)$ (または $H^1(L; \Lambda_0)$) の元 b が Maurer-Cartan 方程式

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k(b, \dots, b) \equiv 0 \pmod{PD([L])} \quad (6)$$

を満たすとき, b を **weak bounding cochain** とよぶ. ただし, $PD([L])$ は基本類 $[L]$ の Poincaré 双対である. ポテンシャル関数は weak bounding cochain の集合 $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L)$ 上の関数 $\mathfrak{PD} : \widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L) \rightarrow \Lambda_0$ であり,

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k(b, \dots, b) = \mathfrak{PD}(b) \cdot PD([L])$$

によって定義される. 各 $b \in \widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L)$ に対し, Floer 微分 m_1 を

$$m_1^b(x) = \sum_{k,l} m_{k+l+1}(b, \dots, b, \underbrace{x, b, \dots, b}_k, \underbrace{b, \dots, b}_l).$$

により変形すると, Maurer-Cartan 方程式 (6) から $m_1^b \circ m_1^b = 0$ が成り立つ. これにより定まるコホモロジー

$$HF((L, b), (L, b); \Lambda_0) = \text{Ker } m_1^b / \text{Im } m_1^b$$

を (L, b) の Floer コホモロジーという.

トーリック多様体の Lagrange トーラス軌道の場合には, Cho-Oh [2, Section 15], 深谷-Oh-太田-小野 [7, Proposition 3.2, Theorem 3.4] によりポテンシャル関数が計算されている. Gelfand-Cetlin 系 $\Phi : F = F(n_1, \dots, n_r, n) \rightarrow \Delta$ の Lagrange トーラスファイバーに対しては, トーリック退化を用いることでポテンシャル関数を計算することができる. その結果を述べるために, 少し記号の準備をする. 作用変数 $\lambda_i^{(k)}$ の双対である角変数を $\theta_i^{(k)}$ とし, 内点 $\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta$ 上のファイバー $L(\mathbf{u})$ に対し, $H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0)$ と Λ_0^N を

$$b = \sum_{(i,k) \in I} x_i^{(k)} d\theta_i^{(k)} \in H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0) \longleftrightarrow (x_i^{(k)})_{(i,k) \in I} \in \Lambda_0^N$$

¹一般に $\mathcal{M}_{k+1}(J, \beta)$ は正しい次元の多様体ではなく, また境界や角を持つため, 正しく定義をするためには倉西構造を導入したうえでチェインレベルで考える必要がある.

により同一視する. また, $(u_i^{(k)})_{i,k}$ を $\mathbb{R}^N \supset \Delta$ の座標とし,

$$y_i^{(k)} = e^{x_i^{(k)}} T^{u_i^{(k)}},$$

$$Q_j = T^{\lambda_{n_j}}, \quad j = 1, \dots, r+1,$$

とおく.

定理 3.1 ([13, Theorem 10.1]). 各内点 $\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta$, に対し $H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0) \subset \widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L(\mathbf{u}))$ である. ポテンシャル関数は

$$\bigcup_{\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta} H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0) \cong \text{Int } \Delta \times \Lambda_0^N$$

上の関数として

$$\mathfrak{PD}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \sum_{(i,k) \in I} \left(\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} + \frac{y_i^{(k)}}{y_{i+1}^{(k+1)}} \right)$$

で与えられる. ただし, $\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_{n_j}$ が定数の場合は $y_i^{(k+1)} = Q_j$ とする.

例 3.2. 3次元旗多様体 $\text{Fl}(3)$ の場合, ポテンシャル関数は

$$\begin{aligned} \mathfrak{PD} &= e^{-x_1} T^{-u_1 + \lambda_1} + e^{x_1} T^{u_1 - \lambda_2} + e^{-x_2} T^{-u_2 + \lambda_2} \\ &\quad + e^{x_2} T^{u_2 - \lambda_3} + e^{x_1 - x_3} T^{u_1 - u_3} + e^{-x_2 + x_3} T^{-u_2 + u_3} \\ &= \frac{Q_1}{y_1} + \frac{y_1}{Q_2} + \frac{Q_2}{y_2} + \frac{y_2}{Q_3} + \frac{y_1}{y_3} + \frac{y_3}{y_2} \end{aligned}$$

で与えられる. この臨界点は

$$\begin{aligned} y_1 &= y_3^2 / y_2, \\ y_2 &= \pm \sqrt{Q_3(y_3 + Q_2)}, \\ y_3 &= \sqrt[3]{Q_1 Q_2 Q_3}, e^{2\pi\sqrt{-1}/3} \sqrt[3]{Q_1 Q_2 Q_3}, e^{4\pi\sqrt{-1}/3} \sqrt[3]{Q_1 Q_2 Q_3} \end{aligned}$$

の6つである. これらはすべて非退化な臨界点であり, 付値は Gelfand-Cetlin 多面体の内部にある. つまり, $\text{Fl}(3)$ の場合は $\dim H^*(\text{Fl}(3)) = 6$ と同じ数の臨界点を得られる. したがって, Floer コホモロジーが非自明な組 $(L(\mathbf{u}), b)$ も6つ存在する.

例 3.3. Grassmann 多様体 $\text{Gr}(2, 4)$ の場合, すなわち $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4$ のとき, ポテンシャル関数は

$$\begin{aligned} \mathfrak{PD} &= e^{-x_2} T^{-u_2 + \lambda_1} + e^{-x_1 + x_2} T^{-u_1 + u_2} + e^{x_1 - x_3} T^{u_1 - u_3} \\ &\quad + e^{x_3} T^{u_3 - \lambda_3} + e^{x_2 - x_4} T^{u_2 - u_4} + e^{-x_3 + x_4} T^{-u_3 + u_4} \\ &= \frac{Q_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_3} + \frac{y_3}{Q_3} + \frac{y_2}{y_4} + \frac{y_4}{y_3}, \end{aligned}$$

となり, その臨界点は

$$y_1 = y_4 = \pm \sqrt{Q_1 Q_3}, \quad y_2 = Q_1 Q_3 / y_3, \quad y_3 = \pm \sqrt{2 Q_3 y_1}$$

の 4 つである. これらはすべて非退化であり, 付値は Gelfand-Cetlin 多面体の内部にある. 従って Floer コホモロジーが非自明な $(L(\mathbf{u}), b)$ も 4 つある. 一方, $\dim H^*(\text{Gr}(2, 4)) = 6$ だから, この場合は臨界点や $(L(\mathbf{u}), b)$ が 2 つ足りない.

4 Fl(3) の S^3 ファイバーの Floer コホモロジー

2.3 節と同様に $\text{Fl}(3)$ を $\text{diag}(\lambda_1, 0, -\lambda_2)$ の随伴軌道と同一視する. すなわち, $\omega = \lambda_1 \omega_{\mathbb{P}_1} + \lambda_2 \omega_{\mathbb{P}_2}$ である.

4.1 $(\text{Fl}(3), L_0)$ の正則円盤

$\pi_2(\text{Fl}(3)) \cong \mathbb{Z}^2$ は 1 次元の Schubert 多様体 X_1, X_2 で生成されることを思い出しておく. Plücker 埋め込みにより $\text{Fl}(3)$ を $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \cong \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の超曲面と思うと, X_1, X_2 はそれぞれ次数 $(1, 0), (0, 1)$ の有理曲線である. $L_0 \cong S^3$ だから, ホモトピー完全列から

$$\pi_2(\text{Fl}(3), L_0) \cong \pi_2(\text{Fl}(3)) \cong \mathbb{Z}^2$$

が分かる. β_1, β_2 をそれぞれ X_1, X_2 に対応する $\pi_2(\text{Fl}(3), L_0)$ の生成元とすると, これらのシンプレクティック面積 $\omega(\beta_i)$ と Maslov 指数 $\mu(\beta_i)$ は

$$\omega(\beta_i) = \lambda_i \omega_{\mathbb{P}_i}([X_i]) = \lambda_i, \quad \mu(\beta_i) = 4$$

で与えられる.

τ を (3) で定義される $\text{Fl}(3)$ の反正則対合とする. 正則円盤 $v : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\text{Fl}(3), L_0)$ に対し, $\tau_*v : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\text{Fl}(3), L_0)$ を

$$\tau_*v(z) = \tau(v(\bar{z}))$$

で定める. L_0 は τ の固定点集合だったから, v と τ_*v を境界に沿って張り合わせるにより, 正則曲線 $w = v \# \tau_*v : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Fl}(3)$ ができる. τ_* が誘導する $\pi_2(\text{Fl}(3), L_0)$ の対合も τ_* と書くことにすると, β_1, β_2 の取り方から $\tau_*\beta_1 = \beta_2$ となる. したがって, $[v] = \beta_1$ もしくは $[v] = \beta_2$ のとき, $[w] = \beta_1 + \beta_2$, すなわち w は次数 $(1, 1)$ の有理曲線になる. 以下, 単位円盤 $D^2 \subset \mathbb{C}$ を上半平面 $\mathbb{H} = \mathbb{H}_+$ と同一視する.

補題 4.1. $v : (\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) \rightarrow (\text{Fl}(3), L_0)$ を次数 $(1, 1)$ の有理曲線に拡張できる正則円盤とする. $SU(2)$ 作用により $v(\infty) = ([1 : 0 : \sqrt{\lambda_1/\lambda_2}], [1 : 0 : -\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}])$ とし,

$$v(0) = \left([a_1 : a_2 : \sqrt{\lambda_1/\lambda_2}], [\bar{a}_1 : \bar{a}_2 : -\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}] \right) \in L_0$$

$(a_1 \neq 1)$ とおく. このとき v は $c/\bar{c} = -(a_1 - 1)/(\bar{a}_1 - 1)$ を満たす $c \in \mathbb{C}$ を用いて

$$v(z) = \left([cz + a_1 : a_2 : \sqrt{\lambda_1/\lambda_2}(cz + 1)], [\bar{c}z + \bar{a}_1 : \bar{a}_2 : -\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}(\bar{c}z + 1)] \right)$$

で与えられる. 特に, $\arg c$ は a_1 から符号を除いて一意的に定まる.

上半平面への

$$\{g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid g(0) = 0, g(\infty) = \infty\} \cong \mathbb{R}_{>0}$$

の作用により $|c| = 1$ としてよい.

例 4.2. $(a_1, a_2) = (-1, 0)$ のとき $c^2 = -1$ となり, 対応する正則円盤は

$$v_{\pm}(z) = \left([z \pm \sqrt{-1} : 0 : \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}(z \mp \sqrt{-1})], [z \mp \sqrt{-1} : 0 : -\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}(z \pm \sqrt{-1})] \right)$$

で与えられる. これらの像 $v_+(\mathbb{H})$ (resp. $v_-(\mathbb{H})$) は $u_1 = u_3, u_2 = 0$ (resp. $u_1 = 0, u_2 = u_3$) で定義される Δ の辺の Φ による逆像になる. 図 1 では頂点 u_0 から上 (resp. 下) に出ているのがこの辺である. また, $\beta_1 = [v_+], \beta_2 = [v_-]$ となっていることもすぐに分かる.

4.2 L_0 の Floer コホモロジー

$H^1(L_0; \Lambda_0) = 0$ だから, この場合は Floer 微分 m_1 は非自明な変形を持たないことに注意する. 最小 Maslov 指数は $\mu(\beta_1) = \mu(\beta_2) = 4$ であり,

$$m_{1,\beta} : H^*(L_0; \Lambda_0) \longrightarrow H^{*+1-\mu(\beta)}(L_0; \Lambda_0)$$

だから, Floer 微分 $m_1 = \sum_{\beta} T^{\omega(\beta)} m_{1,\beta}$ のうちで非自明な部分は

$$m_{1,\beta_i} : H^3(L_0) \cong H_0(L_0) \longrightarrow H^0(L_0) \cong H_3(L_0), \quad i = 1, 2$$

のみである.

命題 2.4 より組 $(\text{Fl}(3), L_0)$ は Evans-Lekili [4, Definition 1.1.1] の意味で $SU(2)$ 等質なので, 次が従う.

命題 4.3 ([4, Proposition 3.2.1]). $(\text{Fl}(3), L_0)$ の任意の正則円盤は Fredholm 正則である. 従って, 標準的な複素構造 J に対して $\mathcal{M}_{k+1}(J, \beta)$ は滑らかな多様体で, その次元は

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_{k+1}(J, \beta) &= \dim L_0 + \mu(\beta) + k + 1 - 3 \\ &= \mu(\beta) + k + 1 \end{aligned}$$

で与えられる.

特に $\beta = \beta_1, \beta_2$ のとき, $\dim \mathcal{M}_2(J, \beta_i) = 6$ である. これと補題 4.1 から次が従う.

系 4.4. $U = SU(2) \setminus \{1\} \cong \{(a_1, a_2) \in S^3 \mid a_1 \neq 1\}$ とおくと, $\mathcal{M}_2(J, \beta_i)$ は $SU(2) \times U$ と同相な稠密な開集合を持ち, 代入写像 $ev = (ev_0, ev_1) : \mathcal{M}_2(J, \beta_i) \rightarrow L_0 \times L_0$ はその上で

$$SU(2) \times U \longrightarrow L_0 \times L_0 \cong SU(2) \times SU(2), \quad (g_1, g_2) \longmapsto (g_1, g_1 g_2)$$

で与えられる. 特に, ev は generic に 1 対 1 である.

$\mathcal{M}_2(J, \beta_1), \mathcal{M}_2(J, \beta_2)$ の向きについては深谷-Oh-太田-小野 [5] の結果を用いることができる. $\tau_* \beta_1 = \beta_2$ であることを思い出しておく. $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき τ は反シンプレクティック対合でもあったので, [5, Theorem 1.5] より

$$m_{1,\beta_1} = (-1)^{\mu(\beta_1)/2+2} m_{1,\tau_* \beta_1} = m_{1,\beta_2}$$

となる. 系 4.4 より $\mathcal{M}_2(J, \beta_i)$ は λ_1, λ_2 に連続的に依っているので, 向きに関する結果は一般の λ_1, λ_2 の場合にも成り立つ.

命題 4.5. 一般の λ_1, λ_2 に対して $m_{1,\beta_1} = m_{1,\beta_2}$ が成り立つ.

系 4.4 より, 点のホモロジー類 $[p] \in H_0(L_0)$ に対して

$$m_{1,\beta_i}([p]) = \text{ev}_{0*}[\mathcal{M}_2(J, \beta_i)_{\text{ev}_1} \times \{p\}] = \pm[L_0]$$

となる. 命題 4.5 と合わせて

$$m_1([p]) = \sum_{i=1}^2 m_{1,\beta_i}([p])T^{\omega(\beta_i)} = \pm(T^{\lambda_1} + T^{\lambda_2})[L_0]$$

を得る. つまり, 次が分かったことになる.

定理 4.6. L_0 の Novikov 環 Λ_0 上の Floer コホモロジーは

$$HF(L_0, L_0; \Lambda_0) \cong \Lambda_0 / T^{\min\{\lambda_1, \lambda_2\}} \Lambda_0$$

となる. したがって, Novikov 体 Λ 上の Floer コホモロジーは自明である:

$$HF(L_0, L_0; \Lambda) = 0.$$

5 Gr(2, 4) の $U(2)$ ファイバーの Floer コホモロジー

2.4 節と同じ設定で考える. とくに $\text{Gr}(2, 4)$ のシンプレクティック形式は $\omega = 2\lambda\omega_{\mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^4)}$ である.

5.1 $(\text{Gr}(2, 4), L_t)$ の正則円盤

$\pi_2(\text{Gr}(2, 4)) \cong \mathbb{Z}$ は 1 次元 Schubert 多様体 X_1 で生成される. X_1 は $\mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^4)$ 内の曲線としては次数 1 の有理曲線である. $\pi_1(\text{Gr}(2, 4)) = \pi_2(L_t) = 0$, $\pi_1(L_t) \cong \mathbb{Z}$ と完全列

$$0 \longrightarrow \pi_2(\text{Gr}(2, 4)) \longrightarrow \pi_2(\text{Gr}(2, 4), L_t) \longrightarrow \pi_1(L_t) \longrightarrow 0$$

から $\pi_2(\text{Gr}(2, 4), L_t) \cong \mathbb{Z}^2$ である. そこで, $\pi_2(\text{Gr}(2, 4), L_t)$ の生成元 β_1, β_2 を $\beta_1 + \beta_2 = [X_1] \in \pi_2(\text{Gr}(2, 4))$ となるようにとる.

正則円盤 $v : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\text{Gr}(2, 4), L_t)$ を一つとる. L_t は (5) で定義した反正則対合 τ_t の固定点集合だったので, v と $(\tau_t)_*v$ を境界に

沿って張り合わせるにより, 正則曲線 $w : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Gr}(2, 4)$ が得られる. $(\tau_t)_* \beta_1 = \beta_2$ より, v が β_1 または β_2 を代表するとき $[w] = \beta_1 + \beta_2 = [X_1]$, すなわち w は次数 1 の正則曲線となる. 再び D^2 を上半平面 \mathbb{H} と同一視すると, このような w は次で与えられる.

補題 5.1. $w : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Gr}(2, 4)$ を次数 1 の正則曲線で, $w(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \subset L_t$ となっているものとする. $\text{Gr}(2, 4)$ への $U(2)$ 作用により,

$$w(\infty) = \left[\sqrt{\frac{\lambda+t}{\lambda-t}} : 0 : 1 : -1 : 0 : \sqrt{\frac{\lambda-t}{\lambda+t}} \right],$$

$$w(0) = \left[\sqrt{\frac{\lambda+t}{\lambda-t}} a_0 : a_0 \bar{a}_2 : a_0 a_1 : -\bar{a}_1 : a_2 : \sqrt{\frac{\lambda-t}{\lambda+t}} \right],$$

$|a_0|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$, と仮定して良い. $\mathbb{R}_{>0}$ の作用により \mathbb{H} の座標を適当に選ぶと w は

$$w(z) = \left[\sqrt{\frac{\lambda+t}{\lambda-t}}(z+c) : c\bar{a}_2 : z+ca_1 : -z-\bar{c}\bar{a}_1 : \bar{c}a_2 : \sqrt{\frac{\lambda-t}{\lambda+t}}(z+\bar{c}) \right] \quad (7)$$

で与えられる. ただし $c, a_0 \in U(1)$, $(a_1, a_2) \in S^3$ は $a_0 \neq 1$, $c^2 = a_0$ を満たし, さらに $a_1 \neq 1$ のとき a_0 は

$$a_0 = -\frac{\bar{a}_1 - 1}{a_1 - 1}$$

となる.

例 5.2. $(a_1, a_2) = (1, 0)$, $c = -\sqrt{-1}$ とし, w の上半平面 \mathbb{H}_+ , 下半平面 \mathbb{H}_- への制限を

$$v_+ = w|_{\mathbb{H}_+} : (\mathbb{H}_+, \partial\mathbb{H}_+) \rightarrow (\text{Gr}(2, 4), L_t),$$

$$v_- = w|_{\mathbb{H}_-} : (\mathbb{H}_-, \partial\mathbb{H}_-) \rightarrow (\text{Gr}(2, 4), L_t)$$

と書くことにすると, v_+ は

$$v_+(z) = \left[\sqrt{\frac{\lambda+t}{\lambda-t}}(z-\sqrt{-1}) : 0 : z-\sqrt{-1} : -z-\sqrt{-1} : 0 : \sqrt{\frac{\lambda-t}{\lambda+t}}(z+\sqrt{-1}) \right]$$

となる. このシンプレクティック面積は

$$\omega(\beta_1) = \int_{\mathbb{H}} v_+^* \omega = \lambda + t$$

で与えられる. $t = 0$ のとき, 正則円盤 v_+ は $v_+(\sqrt{-1}) = [0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 1]$ を通る. この点は $\lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(1)} = \lambda$, $\lambda_2^{(2)} = 0$ で定まる点 $\mathbf{u}_1 \in \Delta$ 上のファイバー $\Phi^{-1}(\mathbf{u}_1)$ にのっている (図 2 参照). 一方, $v_- : (\mathbb{H}_-, \partial\mathbb{H}_-) \rightarrow (\text{Gr}(2, 4), L_t)$ はシンプレクティック面積が

$$\omega(\beta_2) = \omega([X_1]) - \omega(\beta_1) = \lambda - t$$

の正則円盤である. $t = 0$ の時には, $v_-(-\sqrt{-1}) = [1 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0]$ は $\lambda_2^{(2)} = \lambda_1^{(1)} = -\lambda$, $\lambda_1^{(2)} = 0$ で定まる点 $\mathbf{u}_2 \in \Delta$ 上のファイバーに含まれる. 以下, $\pi_2(\text{Gr}(2, 4), L_t)$ の生成元は $\beta_1 = [v_+]$, $\beta_2 = [v_-]$ となるように選ぶことにする.

5.2 L_t の Floer コホモロジー

L_t は $U(2) \cong S^1 \times S^3$ と同相だったので, そのコホモロジー群は

$$H^*(L_t) \cong H^*(S^1) \otimes H^*(S^3)$$

で与えられる. $e_1 = d\text{vol}_{S^1} = (1/2\pi)d\log a_0 \in H^1(S^1; \mathbb{Z})$, $e_3 = d\text{vol}_{S^3} \in H^3(S^3; \mathbb{Z})$ をそれぞれの生成元として, $b = xe_1 \in H^1(L_t; \Lambda_0) \cong H^1(S^1; \Lambda_0)$ ($x \in \Lambda_0$) と書くことにする. $\deg m_{1,\beta}^b = 1 - \mu(\beta)$ であることと最小 Maslov 数が 4 であることから, Floer 微分 m_1^b の非自明な成分は

$$\begin{aligned} m_{1,\beta_i}^b : H^4(L_t) \cong H^1(S^1) \otimes H^3(S^3) &\longrightarrow H^1(L_t) \cong H^1(S^1), \\ m_{1,\beta_i}^b : H^3(L_t) \cong H^3(S^3) &\longrightarrow H^0(L_t) \cong \Lambda_0 \end{aligned}$$

($i = 1, 2$) だけである.

組 $(\text{Gr}(2, 4), L_t)$ は $U(2)$ 等質だから, 再び [4, Proposition 3.2.1] より任意の正則円盤は Fredholm 正則であることが分かる. したがって $i = 1, 2$ に対し $\dim \mathcal{M}_2(J, \beta_i) = 7$ であり, 補題 5.1 より次が分かる.

系 5.3. $U(2)$ の部分多様体を

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -\bar{a}_2 \\ a_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \mid |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1, a_0 = -\frac{\bar{a}_1 - 1}{a_1 - 1}, a_1 \neq 1 \right\} \\ &\cong SU(2) \setminus \{1\} \end{aligned}$$

で定める. このとき, $\mathcal{M}_2(J, \beta_i)$ は $U(2) \times U$ と微分同相な稠密開集合を持ち, その上で代入写像は

$$U(2) \times U \longrightarrow L_t \times L_t \cong U(2) \times U(2), \quad (g_1, g_2) \longmapsto (g_1, g_1 g_2)$$

で与えられる.

次に $\mathcal{M}_{k+l+2}(J, \beta_i)$ を考える. 正則円盤 (7) は境界の点 $x \in \mathbb{R}$ を

$$w(x) = \left[\sqrt{\frac{\lambda + tx + c}{\lambda - tx + \bar{c}}} : \frac{\bar{c}a_2}{x + \bar{c}} : \frac{x + ca_1}{x + \bar{c}} : -\frac{x + \bar{c}a_1}{x + \bar{c}} : \frac{\bar{c}a_2}{x + \bar{c}} : \sqrt{\frac{\lambda - t}{\lambda + t}} \right] \in L_t$$

にうつすことに注意する. このとき, x は $w(x) \in L_t \cong S^1 \times S^3$ の S^1 成分 $(x + c)/(x + \bar{c})$ から決まる. 0 番目と $(k + 1)$ 番目の境界の marked point を固定すると, 次が分かる.

系 5.4. モジュライ空間 $\mathcal{M}_{k+l+2}(J, \beta_i)$ は

$$\left\{ (g_1, g_2, (t_i), (s_j)) \in U(2) \times U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \mid \begin{array}{l} 0 < t_1 < \cdots < t_k < (\arg \det g_2)/2\pi, \\ (\arg \det g_2)/2\pi < s_1 < \cdots < s_l < 1 \end{array} \right\}$$

と微分同相な稠密開集合を持つ.

また, $\mathfrak{m}_{k+l+1, \beta_i}$ の符号については, L_0 が反シンプレクティック対合 τ_0 の固定点集合であったことと $\mathcal{M}_{k+l+2}(J, \beta_i)$ が t に連続的に依っていることから, [5, Theorem 1.5] と合わせることで次が分かる.

命題 5.5. 各 $b \in H^1(L_t)$ に対して

$$\mathfrak{m}_{k+l+1, \beta_2}(\underbrace{b, \dots, b}_k, \bullet, \underbrace{b, \dots, b}_l) = (-1)^{k+l} \mathfrak{m}_{k+l+1, \beta_1}(\underbrace{b, \dots, b}_l, \bullet, \underbrace{b, \dots, b}_k)$$

が成り立つ.

これらを用いて L_t の Floer コホモロジーを計算することができる.

定理 5.6. $b = xe_1 \in H^1(L_0; \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}) \cong \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ に対し, Floer 微分 \mathfrak{m}_1^b は

$$\mathfrak{m}_1^b(e_3) = e^x T^{\lambda+t} + e^{-x} T^{\lambda-t}, \quad (8)$$

$$\mathfrak{m}_1^b(e_1 \otimes e_3) = (e^x T^{\lambda+t} + e^{-x} T^{\lambda-t})e_1 \quad (9)$$

で与えられる. したがって, (L_t, b) の Floer コホモロジーは

$$HF((L_t, b), (L_t, b); \Lambda_0) \cong \begin{cases} H^*(L_0; \Lambda_0) & t = 0 \text{ かつ } x = \pm\pi\sqrt{-1}/2, \\ (\Lambda_0/T^{\min\{\lambda-t, \lambda+t\}}\Lambda_0)^2 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる. また, Novikov 体 Λ を係数とする Floer コホモロジーは

$$HF((L_t, b), (L_t, b); \Lambda) \cong \begin{cases} H^*(L_0; \Lambda) & t = 0 \text{ かつ } x = \pm\pi\sqrt{-1}/2, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる.

つまり, Λ 係数の Floer コホモロジーが非自明な組 (L, b) が, Gelfand-Cetlin 多面体の内点のファイバーと合わせてちょうど $6 = \dim H^*(\text{Gr}(2, 4))$ 個存在している.

証明の概略. $g_2 \in U \subset U(2)$ に対して

$$D_1 = \left\{ (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 < t_1 < \dots < t_k < \frac{\arg \det g_2}{2\pi} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{R}^l \mid 0 < s_1 < \dots < s_l < 1 - \frac{\arg \det g_2}{2\pi} \right\}$$

とおく. 系 5.4 より $(M_{k+l+2}(J, \beta_1))$ の適当な向きのもとで

$$\begin{aligned} & \mathfrak{m}_{k+l+1, \beta_1}(\underbrace{b, \dots, b}_k, e_3, \underbrace{b, \dots, b}_l) \\ &= \int_{S^3} \left(\int_{D_1} x^k dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k \right) \left(\int_{D_2} x^l ds_1 \wedge \dots \wedge ds_l \right) e_3 \\ &= \int_{S^3} \frac{1}{k!} \left(\frac{\arg \det g_2}{2\pi} \cdot x \right)^k \frac{1}{l!} \left(\left(1 - \frac{\arg \det g_2}{2\pi} \right) x \right)^l e_3 \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{1, \beta_1}^b(e_1) &= \int_{S^3} \sum_{k, l \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{\arg \det g_2}{2\pi} \cdot x \right)^k \frac{1}{l!} \left(\left(1 - \frac{\arg \det g_2}{2\pi} \right) x \right)^l e_3 \\ &= \int_{S^3} e^{(\arg \det g_2 / 2\pi)x} e^{(1 - \arg \det g_2 / 2\pi)x} e_3 \\ &= \int_{S^3} e^x e_3 \\ &= e^x \end{aligned}$$

が得られる。また、命題 5.5 により、

$$m_{1,\beta_2}^b(e_3) = e^{-x}$$

となるから、

$$m_1^b(e_3) = \sum_{i=1}^2 m_{1,\beta_i}^b(e_3) T^{\omega(\beta_i)} = e^x T^{\lambda+t} + e^{-x} T^{\lambda-t}$$

が得られた。 $m_1^b(e_1 e_3) \in H^1(L_0)$ についても同様の計算により

$$m_1^b(e_1 e_3) = \sum_{i=1}^2 m_{1,\beta_i}^b(e_1 e_3) T^{\omega(\beta_i)} = (e^x T^{\lambda+t} + e^{-x} T^{\lambda-t}) e_1$$

となることがわかる。 □

注意 5.7. Iriyeh-Sakai-Tasaki [12] では

$$HF(L_0, L_0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^*(L_0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$$

が示されている。一方、整数上の Novikov 環 $\Lambda_0^{\mathbb{Z}}$ 係数を係数とすると (8) と (9) より

$$HF(L_0, L_0; \Lambda_0^{\mathbb{Z}}) \cong (\Lambda_0^{\mathbb{Z}}/2T^\lambda \Lambda_0^{\mathbb{Z}})^2$$

となる。

参考文献

- [1] V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, and D. van Straten, *Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds*, Acta Math. 184 (2000), no. 1, 1–39.
- [2] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, *Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 773–814.
- [3] T. Eguchi, K. Hori, and C.-S. Xiong, *Gravitational quantum cohomology*, Internat. J. Modern Phys. A 12 (1997), no. 9, 1743.1782.
- [4] J. D. Evans and Y. Lekili, *Floer cohomology of the Chiang Lagrangian*, arXiv:1401.4073.

- [5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Intersection Floer theory —Anomaly and obstructions—, Part I and Part II*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 46, 2009.
- [6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Anti-symplectic involution and Floer cohomology*, arXiv:0912.2646.
- [7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, Duke Math. J. 151 (2010), no. 1, 23.174.
- [8] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, arXiv:1009.1648.
- [9] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds: survey*, In Surveys in differential geometry. Vol. XVII, 229–298, Surv. Differ. Geom., 17, Int. Press, Boston, MA (2012).
- [10] A. Givental, *Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture*, Topics in singularity theory, 103–115, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 180, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [11] V. Guletskii and S. Sternberg, *The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal. 52 (1983), 106–128.
- [12] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, arXiv:1108.0260.
- [13] T. Nishinou, Y. Nohara, and K. Ueda, *Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions*, Adv. Math. 224, 648–706 (2010).
- [14] K. Rietsch, *A mirror symmetric construction of $qH_T^*(G/P)_{(q)}$* , Adv. Math. 217 (2008), no. 6, 2401–2442.