数理解析研究所講究録
第 1921 巻 2014 年 12-27

Fermion and boson point processes and related topics

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所　白井朋之
Tomoyuki Shirai
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

1　はじめに

位相空間 S 上の点過程 (point process) とは S 内のランダムな点配置 (集積点をもたない高々可算な部分集合) のことをいう．もっとも基本的な点過程は無相関な点配置のモデルであるポアソン点過程である．ポアソン点過程においては，無相関性から重要な観測量がしばしば計算可能になるため，点過程論において中心的なモデルを提供する．しかし，もちろん多くのランダム点配置は相関をもつので，ポアソン点過程だけでは不十分であり，他にも種々の点過程が研究されてきた．タイトルにあるフェルミオン点過程とボソン点過程は比較的最近系統的に研究されるようになった相関をもつ点過程の中で重要なクラスである．これらは初め自由フェルミ粒子や自由ボーズ粒子を有限点過程として表現することにより Macchi によって考察された [7, 8]．その後，1990 年以降のランダム行列 (Gaussian Unitary Ensemble) の固有値の研究の流れの中で，フェルミオン点過程は量子力学における自由フェルミ粒子のみならず，そのフェルミオン的構造 (相関関数が行列式で与えられる) に着目して一般の空間上のランダムな無限粒子 (無限点配置) として定式化された [13, 14]．現在は，相関関数が行列式である構造を強調して，行列式点過程 (determinantal point process) と呼ばれることが多い．[13] では，フェルミオン点過程のみならずボソン点過程 (相関関数がパーマネントで表現されるので，permanental point process とも呼ばれる) についても平行して考察し，さらにはフェルミオン点過程とボソン点過程を 1-パラメータで補間する試みがなされ

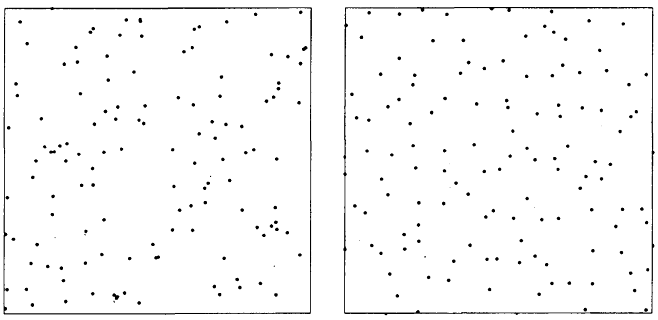

図 1　左：ポアソン点過程，右：行列式点過程 (Ginibre 行列の固有値)

RIMS 研究集会「量子場の数理とその周辺」, Oct. 2-4, 2013

た．その研究において，相関関数として α-行列式とよばれる行列式とパーマネントを補間する行列変数の関数があらわれて，その α-行列式の正値性の問題は，点過程の存在性の観点から重要な意味をもつ．対応する点過程は (存在すれば)α-行列式点過程とよばれる．

本稿では，α-行列式の正値性を中心にこれまでの結果について概観する．また，離散空間上のマルコフ過程のグリーン関数から定義される α-行列式点過程のループ空間上のポアソン点過程による表現について述べる．

2 α-行列式と α-行列式点過程

2.1 ランダム場と点過程 (ランダム点場)

ランダム場や点過程は，ともに以下のようにしてランダム測度として定義される．

S を可算基をもつ局所コンパクトハウスドルフ空間とし[*1], $\mathcal{M} = \mathcal{M}(S)$ を S 上の非負ラドン測度全体とする[*2]．また，$\mathcal{M}(S)$ の部分集合 $Q = Q(S)$ を非負整数値ラドン測度全体とする．$\xi \in Q(S)$ は $\xi = \sum_i \delta_{x_i}$ の形にあらわせる．

S 上のコンパクト台の連続関数 (resp. 非負連続関数) f の全体を $C_c(S)$ (resp. $C_c^+(S)$) とする．$f \in C_c(S)$ と $\xi \in \mathcal{M}$ に対して，

$$\langle \xi, f \rangle = \int_S f(x)\xi(dx)$$

と定義する．特に，$\xi = \sum_i \delta_{x_i} \in Q$ のときは，$\langle \xi, f \rangle = \sum_i f(x_i)$ である．$\xi_n \in \mathcal{M}, n = 1, 2, \ldots$ が漠位相 (vague topology) の意味で $\xi \in \mathcal{M}$ に収束するとは，任意の $f \in C_c(S)$ に対して，$\langle \xi_n, f \rangle \to \langle \xi, f \rangle$ であることと定義する．この位相に関して，Q は $\mathcal{M}$ の閉部分集合となる．また，$\mathcal{M}$, Q は漠位相のもとポーランド空間となる．

写像族 $\{\xi \mapsto \xi(K),\ K$ はコンパクト $\}$ で生成される $\mathcal{M}$ (resp. Q) の σ-加法族を $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ (resp. $\mathcal{B}(Q)$) とする．S 上のランダム場 (random field) またはランダム測度 (random measure) とは，ある確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上定義された $\mathcal{M}$-値確率変数 $\xi = \xi(\omega)$ のことをいい，S 上の点過程 (point process) またはランダム点場 (random point field) とは，Q-値確率変数 $\xi = \xi(\omega)$ のことをいう．本稿では，点過程 $\xi(\omega)$ の Q 上の分布 $\mu = \mathbb{P} \circ \xi^{-1}$ も同様に点過程と呼ぶことにする．

以降では，S 上のラドン測度 λ を一つ reference 測度として固定する．

2.2 ラプラス変換と相関関数.

点過程 μ はラプラス変換

$$\mathscr{L}_\mu(f) := \int_Q \mu(d\xi) \exp(-\langle \xi, f \rangle) \qquad f \in C_c^+(S)$$

[*1] ポーランド空間 (Polish space)，つまり完備可分距離化可能な空間となることが知られている．

[*2] ξ がラドン (Radon) 測度であるとは，任意のコンパクト集合 $K \subset S$ に対して $\xi(K) < \infty$ となるときをいう．

によって特徴つけられる．また，点過程の列 $\mu_n, n=1,2,\ldots$ が μ に弱収束するための必要十分条件は，任意の $f \in C_c^+(S)$ に対して $\mathscr{L}_{\mu_n}(f) \to \mathscr{L}_\mu(f)$ となることである．

$\xi \in Q$ から $\xi_n = \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \xi:\text{distinct}} \delta_{(x_1,\ldots,x_n)}$ を定義し，

$$\int_{S^n} f_n(x_1,\ldots,x_n)\lambda_n(dx_1\cdots dx_n) = \int_Q \langle \xi_n, f_n\rangle \mu(d\xi) \qquad f_n \in C_{c,sym}^+(S^n)$$

となる S^n 上の Radon 測度 λ_n が存在すれば，n 点相関測度といい，基礎の測度 λ の n-直積測度 $\lambda^{\otimes n}$ に関して絶対連続のとき，その Radon-Nikodym 密度

$$\rho_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{d\lambda_n}{d\lambda^{\otimes n}}$$

を λ に関する n 点相関関数という．特に，$n=1$ のときは平均測度ともいい，点密度をあらわす．

2.3 ポアソン点過程と Cox 点過程

ポアソン点過程は点過程論でもっとも重要な点過程である．ν を S 上のラドン測度とする．intensity measure ν のポアソン点過程 Π_ν のラプラス変換は

$$\mathscr{L}_{\Pi_\nu}(f) = \exp\left(-\int_S (1-e^{-f(x)})\nu(dx)\right) \quad (f \in C_c^+(S)) \tag{1}$$

で与えられる．また，ν が λ に関して絶対連続のとき，n 点相関関数は

$$\rho_n(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{d\nu}{d\lambda}(x_i)$$

で与えられる．

Cox 点過程は doubly stochastic Poisson process または mixed Poisson process などと呼ばれ，ランダムな intensity をもつポアソン点過程である．Z を S 上のランダム場とする．Z をランダム intensity measure とするポアソン点過程 Π_Z を Cox 点過程という．

$$\mathscr{L}_{\Pi_Z}(f) = E\left[\exp\left(-\int_S (1-e^{-f(x)})Z(dx)\right)\right] \quad (f \in C_c^+(S))$$

ただし，E は Z に関する期待値をあらわす．

例 1. $\{X_x(\omega), x \in S\}$ は共分散関数が $K(x,y) = E[X_x X_y]$ の S 上の実ガウス場とする．$Z(dx) = |X_x|^2\lambda(dx)$ は非負ランダム場となり，Z を intensity measure とする S 上のポアソン点過程 Π_Z は Cox 点過程の一例を与える．例えば，$S=\mathbb{R}^d$, $\lambda(dx) = dx$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\Pi_Z}(f) &= E\left[\exp\left(-\int_S (1-e^{-f(x)})X_x^2 dx\right)\right] \\ &= \det(I + K(1-e^{-f}))^{-1/2}\end{aligned}$$

となる．

2.4 フェルミオン点過程とボソン点過程

サイズ N の GUE(Gaussian Unitary Ensemble) と呼ばれるランダムエルミート行列の固有値は $\mathbb{R}$ 上の有限点過程を定める．この点過程の n 点相関関数は

$$\rho_n^{(N)}(x_1,\dots,x_n)=\det(K_N(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$$

となることが知られている．ただし，$K_N(x,y)$ は i 次のエルミート関数を適当にスケールした関数 $\varphi_i^{(N)}(x)$ を用いて

$$K_N(x,y)=\sum_{i=0}^{N-1}\varphi_i^{(N)}(x)\varphi_i^{(N)}(y)$$

とあらわされる (e.g. [14])．対応する $L^2(\mathbb{R},dx)$ 上の積分作用素 $\mathcal{K}_N$ はランク N の正射影作用素である．

この事実を一般化して以下のことが示された [13, 14] : S 上の Radon 測度 ν と $L^2(S,\nu)$ 上の積分作用素 $\mathcal{K}$ が以下の条件をみたすとする．

- $\mathcal{K}$ は $L^2(S,\nu)$ 上の自己共役な積分作用素で局所トレース族*3となる．
- $\mathcal{K}$ は連続な積分核 $K(x,y)$ をもち，$O\le\mathcal{K}\le I$ をみたす．

このとき，組 (ν,K) に対して，ラプラス変換が

$$\mathscr{L}_{\mu_K^{(-1)}}(f)=E_{\mu_K^{(-1)}}\left[\exp(-\langle\xi,f\rangle)\right]=\det\left(I-\mathcal{K}(1-e^{-f})\cdot\right)$$

によって与えられる点過程 $\mu_K^{(-1)}$ が一意的に存在する*4．これを，S 上のフェルミオン点過程とよぶ．また，ν に関する n 点相関関数は

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n)=\det(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n \tag{2}$$

によって与えられる．

注意． 核 $K(x,y)$ が自己共役な $\mathcal{K}$ を定義しないときでも，相関関数が上のような行列式で与えられることがしばしばある．最近では (2) をみたす点過程は行列式点過程 (determinantal point process) もしくは行列式過程 (determinantal process) と呼ばれることが多い．

フェルミオン点過程と同様にボソン点過程も定義される．S 上の Radon 測度 ν と $L^2(S,\nu)$ 上の積分作用素 $\mathcal{K}$ が以下の条件をみたすとする．

- $\mathcal{K}$ は $L^2(S,\nu)$ 上の自己共役な積分作用素で局所トレース族となる．
- $\mathcal{K}$ は連続な積分核 $K(x,y)$ をもち，$\mathcal{K}\ge O$ をみたす．

---

*3 $\mathcal{K}$ の任意のコンパクト集合 Λ への制限がトレース族となるとき，$\mathcal{K}$ は局所トレース族であるという．

*4 本来は $\mu_{\nu,K}^{(\alpha)}$ と書くべきであるが，以後も ν を省略して，$\mu_K^{(\alpha)}$ のようにあらわす．

このとき，(ν, K) に対して，ラプラス変換が

$$\mathscr{L}_{\mu_K^{(1)}}(f) = E_{\mu_K^{(1)}}\left[\exp(-\langle \xi, f \rangle)\right] = \det\left(I + \mathcal{K}(1-e^{-f})\cdot\right)^{-1}$$

によって与えられる点過程が一意的に存在する． $\mu_K^{(1)}$ を S 上のボソン点過程とよぶ．また，相関関数は

$$\rho_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{per}(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$$

によって与えられる．このことから，パーマネント点過程 (permanental point process) ともよばれる．

2.5 α-行列式と α-行列式点過程

フェルミオンとボソンの場合と同様の条件のもと，連続積分核 $K(x, y)$ をもつ $L^2(S, \nu)$ 上の積分作用素 $\mathcal{K}$ に対してラプラス変換

$$\mathscr{L}_{\mu_K^{(\alpha)}}(f) = \det\left(I + \alpha\mathcal{K}(1-e^{-f})\cdot\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad f \in C_c^+(S)$$

を考える．この関係式により

$$E_{\mu_K^{(\alpha)}}\left[\exp(-\langle \xi, f \rangle)\right] = \det\left(I + \alpha\mathcal{K}(1-e^{-f})\cdot\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

となるような $Q(S)$ 上の符号付き測度 $\mu_K^{(\alpha)}$ が逆に定まるが，特に $\mu_K^{(\alpha)}$ が確率測度となるとき，α-行列式点過程とよぶ．$\alpha = -1$ のときは行列式点過程，$\alpha = 1$ のときはパーマネント点過程，$\alpha \to 0$ ではポアソン点過程に対応する．

α-行列式点過程が存在すれば，n 点相関関数は

$$\rho_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{det}_\alpha(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$$

で与えられる．ただし，$\mathrm{det}_\alpha A$ は次節で定義されるものである．

例 1. $S = \{x\}$ のとき，$Q(S) \cong \{0, 1, 2, \ldots\}$ となる．この場合ラプラス変換は本質的に母関数で，$K > 0, f \geq 0$ に対して，以下の一般化二項展開をもつ：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mu_K^{(\alpha)}}(f) &= (1 + \alpha K(1-e^{-f}))^{-1/\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1+\alpha K)^{-1/\alpha}\frac{(1+\alpha)\cdots(1+(n-1)\alpha)J_\alpha^n}{n!}e^{-nf}.\end{aligned}$$

ただし，$J_\alpha = \alpha K(1+\alpha K)^{-1}$ である．よって，

$$\mu_K^{(\alpha)}(\xi(\{x\}) = n) = (1+\alpha K)^{-1/\alpha}\frac{(1+\alpha)\cdots(1+(n-1)\alpha)J_\alpha^n}{n!}$$

なる符号付き測度を定める．$\alpha < 0$ の場合は，$\alpha = -1/n$ でなければ十分大きい n で $\mu_K^{(\alpha)}(\xi(\{x\}) = n) < 0$ となるものが存在するので，$\alpha < 0$ に対して $\mu_K^{(\alpha)}$ が確率測度になる

ためには $\alpha=-1/n (n\in\mathbb{N})$ が必要．(そうでないときは確率が負になる項があらわれる．) またこのとき $\mu_K^{(\alpha)}$ は確率測度となり，$\operatorname{supp}\mu_K^{(\alpha)}=\{0,1,2,\ldots,n\}$ となる．$\alpha>0$ のときは，ラプラス変換は負の二項分布に対応するので，$\alpha>0$ ならば常に確率測度となる．

3 α-行列式の正値性

3.1 α-行列式の定義

定義 1. n 次正方行列 A に対して α-行列式は

$$\det_\alpha A=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\alpha^{d(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

ただし，単位元 $e\in\mathcal{S}_n$ に対して $d(e)=0$ で，

$$d(\sigma)=\min\{j;\sigma=\tau_1\ldots\tau_j,\ \tau_i\text{ は互換 }\}.$$

注意. (1) $d(\sigma)$ は類関数 (共役類上定数) で，置換 σ を互換の積であらわすために必要な最小の互換の個数である．また，互換全体を生成系とする $\mathcal{S}_n$ のケーリーグラフの単位元 e からの距離とも言える．
(2) $\det_\alpha A$ は A が n 次行列のとき α の高々 $(n-1)$ 次多項式となる．

例 2. $\mathcal{S}_3$ に対する $d(\sigma)$ は

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
$d(\sigma)$	0	1	1	1	2	2

によって与えられるので，3×3 行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^3$ に対する α-行列式は

$$\det_\alpha A=a_{11}a_{22}a_{33}+(a_{11}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33})\alpha+(a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})\alpha^2$$

となる．明らかに，$\alpha=-1$ のときは通常の行列式に等しい．

3.2 α-行列式の正値性の問題

Hadamard-Fischer(行列式), Marcus-Lieb(パーマネント) らの結果により，行列のサイズによらず $A\succeq O$ ならば

$$\operatorname{per}A\geq\prod_{i=1}^n a_{ii}\geq\det A\geq 0\Longleftrightarrow\det_1 A\geq\det_0 A\geq\det_{-1}A\geq 0 \tag{3}$$

となることがわかる．先に述べたように，α-行列式点過程の (符号付き測度の) 相関関数は $\det_\alpha K$ で与えられるので，$A\succeq O$ に対して $\det_\alpha A\geq 0$ かどうかという正値性の問題が，$\mu_K^{(\alpha)}$ が確率測度になるための条件と密接に関連することがわかる．

正値性の問題を述べるために以下の定義をしよう.

$$\Lambda_p(\mathbb{R}) = \{\alpha \in \mathbb{R}\ ;\ \det_\alpha A \geq 0 \text{ for any } \underline{\text{real-symmetric}}\ p \times p \text{ matrix } A\}$$
$$\Lambda_p(\mathbb{C}) = \{\alpha \in \mathbb{R}\ ;\ \det_\alpha A \geq 0 \text{ for any } \underline{\text{hermitian}}\ p \times p \text{ matrix } A\}$$
$$\Lambda_\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Lambda_p(\mathbb{R}), \quad \Lambda_\infty(\mathbb{C}) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Lambda_p(\mathbb{C}).$$

問題 1. $\Lambda_*(\mathbb{R})$ と $\Lambda_*(\mathbb{C})$ $(* = p \in \mathbb{N}$ or $* = \infty)$ を決定せよ.

注意. $\alpha \in \Lambda_\infty(\mathbb{R})$ は (先に述べた条件をみたす) 任意の積分作用素 $\mathcal{K}$ に対して α-行列式点過程が存在することと同値である.

注意. 不等式 (3) より, $\Lambda_\infty(\mathbb{R}) \supset \Lambda_\infty(\mathbb{C}) \supset \{1, 0, -1\}$ は明らか.

命題 1. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. $\alpha\beta > 0$ かつ $\alpha, \beta \in \Lambda_\infty(\mathbb{F})$ ならば, $(\alpha^{-1} + \beta^{-1})^{-1} \in \Lambda_\infty(\mathbb{F})$. 特に, $\Lambda_\infty(\mathbb{F}) \supset \{\pm 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

証明. $\alpha, \beta > 0$ かつ $\alpha, \beta \in \Lambda_\infty(\mathbb{F})$ とする. このとき, $\mu_K^{(\alpha)}, \mu_K^{(\beta)}$ は点過程, つまり $Q(S)$ 上の確率測度となる. 確率測度の畳み込みのラプラス変換はラプラス変換の積になることを用いると,

$$\mathcal{L}_{\mu^{(\alpha)}_{K/\alpha} * \mu^{(\beta)}_{K/\beta}}(f) = \det(I + \mathcal{K}(1 - e^{-f})\cdot)^{-1/\alpha - 1/\beta} = \mathcal{L}_{\mu^{(\gamma)}_{K/(\alpha+\beta)}}(f)$$

ただし, $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$. つまり, $\gamma = (\alpha^{-1} + \beta^{-1})^{-1}$. よって, $\mu^{(\gamma)}_{K/(\alpha+\beta)}$ はまた確率測度 (点過程) となる. $\mu^{(\gamma)}_{K/(\alpha+\beta)}$ の相関関数は $\det_\gamma((\alpha+\beta)^{-1} K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ となり非負であるから, 任意の $K \succeq O$ に対して $\det_\gamma(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ は非負となる. よって, $(\alpha^{-1} + \beta^{-1})^{-1} \in \Lambda_\infty(\mathbb{F})$ を得る. $\alpha, \beta < 0$ の場合も同様. □

命題 2. $2 \in \Lambda_\infty(\mathbb{R})$.

証明. 例 1 ではガウス場を用いて Cox process μ を構成した. そのラプラス変換はガウス場が実数値ガウス場の場合は, $\det(I + \mathcal{K}(1 - e^{-f})\cdot)^{-1/2}$ となる. よって, $2 \in \Lambda_\infty(\mathbb{R})$. (詳しくは [13] を参照のこと.) □

命題 1 より以下のこともわかる.

系 1. $\{2/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Lambda_\infty(\mathbb{R})$.

具体的に $\det_\alpha A$ が負になるような行列 A を構成することにより以下を得る.

命題 3. *(i)* $\Lambda_\infty(\mathbb{R}) \cap [0, \infty) \subset [0, 2]$. *(ii)* $\Lambda_\infty(\mathbb{C}) \cap [0, \infty) \subset [0, 1]$.

証明. (i) については [12], (ii) については [9] を参照のこと. □

注意. (i) n 次行列 $A \succeq O$ がランク 1 の行列のときは, $A = \mathbf{u}\mathbf{u}^*$ となるベクトル $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ (A が実対称のときは実ベクトル, A がエルミートのときは複素ベクトル) が存在する. このとき,

簡単な計算から

$$\det_\alpha A = \prod_{j=0}^{n-1}(1+j\alpha)\prod_{i=1}^{n}|u_i|^2.$$

となることがわかる．よって，$\alpha \geq 0$ ならば $\det_\alpha A \geq 0$ となる．また，$\alpha < 0$ の場合は，$\alpha \notin \{-1/m : m \in \mathbb{N}\}$ ならばある n 次行列 A が存在して $\det_\alpha A < 0$ となる．

(ii) 命題 3 で得られる必要条件では，$\det_\alpha A < 0$ となる非負定値行列 A (の列) を具体的に構成するが，[9, 12] のいずれの場合もランク 2 の行列で構成している．

ここまでをまとめると，

命題 4. 以下が成立.

$$\{-1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{2/n; n \in \mathbb{N}\} \subset \Lambda_\infty(\mathbb{R}) \subset \{-1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup [0,2],$$
$$\{-1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\} \subset \Lambda_\infty(\mathbb{C}) \subset \{-1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup [0,1].$$

これらと他の状況証拠により以下のことを予想した.

予想 1 (T.S.-Y.Takahashi [12, 13]).

$$\Lambda_\infty(\mathbb{R}) = \{-1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup [0,2],$$
$$\Lambda_\infty(\mathbb{C}) = \{-1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup [0,1].$$

2012 年になって，Brändén により実際は命題 4 の下側の不等式が等号であること，つまり

$$\Lambda_\infty(\mathbb{R}) = \{-1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{2/n; n \in \mathbb{N}\}$$
$$\Lambda_\infty(\mathbb{C}) = \{-1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$$

となることが示された [1]．証明には [11] の行列式型多項式の一般論を用いている．

注意. [1] ではどのような行列が上の予想の反例になるのかは具体的には求められていない．少なくとも $n = 3, 4, 5$ という小さい行列では反例はなさそうである [10]．$\alpha \in (0,2] \setminus \{2/n; n \in \mathbb{N}\}$ に対して，$\det_\alpha A < 0$ となる A を構成するのは一つの問題である．

3.3 Wishart 行列と α 行列式

$\beta \in \mathbb{N}$ に対して，p 次 Wishart 行列は

$$X = (u_1, \ldots, u_\beta)(u_1, \ldots, u_\beta)^T$$

と定義される．ただし，$u_1, \ldots, u_\beta$ は i.i.d. p 次元ガウスベクトルで，共分散行列は $K \succ O$ であるとする．非負定値行列のなす閉凸錐を $\mathcal{S}_p^+$ とする．p 次行列 $K \succ O$ に対して $\mathcal{S}_p^+$ 上の Wishart 分布 $W_p(\beta, K)$ は

$$P(dX) = C_p(\beta/2, K)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(K^{-1}X)\right)(\det X)^{(\beta-p-1)/2} dX$$

と定義される．この分布は $\beta \in \mathbb{N}$ でなくとも，$\beta > p-1$ ならば確率分布として意味をもつ (可積分性からの要請)．つまり，p 次 Wishart 行列または Wishart 分布は以下のパラメータ β と $K \succeq O$ に対して定義される．

$$\beta \in \underbrace{\{1,2,\ldots,p-1\}}_{\text{degenerated}} \quad \cup \quad \underbrace{(p-1,\infty)}_{\text{abs.conti. w.r.t. } dX} \quad . \tag{4}$$

こうやって定義される $\mathcal{S}_p^+$ 上の確率分布を $W_p(\beta, K)$ とあらわす．

Wishart 分布は $\beta > p-1$ のときはランク p の行列全体の閉包を台とする．また，$\beta = 1,2,\ldots,p-1$ のときは，ランク β の部分集合上に台をもつ．

この小節では，$S=\{1,2,\ldots,p\}$ が有限集合の場合に，Cox process の考え方を応用して，$\det_\alpha A$ の Wishart 分布によるポアソン混合による表現を考える．この考え方は 4 節でさらにループ測度によるポアソン混合へと一般化される．

命題 5 ([12])**.** α は以下の条件をみたすとする．

$$\alpha \in (0, \frac{2}{p-1}) \cup \{\frac{2}{p-1}, \frac{2}{p-2}, \ldots, \frac{2}{2} = 1, 2\}.$$

$K \succ O$ に対して，$X \sim W_p(2/\alpha, \alpha K/2)$ とし，その X の対角成分で定義されるランダムベクトルを $\mathrm{diag}X = (X_{11}, \ldots, X_{pp})$ とする．このとき，

$$\mu_K^{(\alpha)} = \mathbb{E}[\Pi_{\mathrm{diag}X}] \tag{5}$$

ここで，$\Pi_{\mathbf{u}}$ は正ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p)$ を *intensity* とする S 上のポアソン分布．

証明．α の仮定は Wishart 分布 $W_p(2/\alpha, \alpha K)$ が存在するための条件 (4)

$$\frac{2}{\alpha} \in \{1,2,\ldots,p-1\} \cup (p-1,\infty) \Longleftrightarrow \alpha \in (0, \frac{2}{p-1}) \cup \{\frac{2}{p-1}, \frac{2}{p-2}, \ldots, \frac{2}{2} = 1, 2\}$$

から来ている．(5) の証明は，右辺のラプラス変換 (母関数) を計算して一致することを見る．詳しくは [12] を参照のこと． □

注意． (1) 命題 5 は条件のパラメータ α で Wishart 分布を用いた構成が可能であることを言っているのであって，

$$\Lambda_p(\mathbb{R}) \cap (0,\infty) = (0, \frac{2}{p-1}) \cup \{\frac{2}{p-1}, \frac{2}{p-2}, \ldots, 1, 2\} \tag{6}$$

を直接は意味しない．実際，$p=2$ のとき

$$\Lambda_2(\mathbb{R}) \cap (0,\infty) = (0,4]$$

となり，$p=2$ のときの (6) の右辺 $(0,1) \cup \{1,2\}$ を真に含むことがわかる．

(2) 命題 5 で述べたのは実 Wishart 行列の場合であるが，複素 Wishart 行列でも同様の議論が可能である [12].

4 グリーン核に付随する α-行列式点過程

以降，$\alpha > 0$ とする．α-行列式の定義 1 から，$\alpha > 0$ のとき，$K(x,y) \geq 0$ $(x,y \in S)$ ならば，自明に $\det_\alpha(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n \geq 0$ である．よって，相関関数が非負となるので，α-行列式点過程 $\mu_K^{(\alpha)}$ が存在する．本節では，S が有限集合の場合に，S 上の非再帰的ランダムウォークのグリーン核 G を K として得られる α-行列式点過程を議論する．特に，S 上のループ空間上の σ-有限測度 μ^{loop} の定数倍を intensity measure とするポアソン点過程によるポアソン混合によって，この α-行列式点過程を表現することを考える．

4.1 スペクトルゼータ関数とループ測度

この節ではループ測度の定義を行うが，まず発見的な議論によりスペクトルゼータ関数とループ測度の定義の類似性についてコメントする．

Δ をコンパクトリーマン多様体上の Laplace-Beltrami 作用素とする (例えば，ディリクレ境界条件がついて，Δ に対応するブラウン運動が非再帰的になっている状況を想定する)．このとき，スペクトルゼータ関数は以下のように定義される：

$$\zeta_\Delta(s) := \sum_{n,\lambda_n(\neq 0)} \frac{1}{\lambda_n^s} = \mathrm{Tr}(\Delta^{-s}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}) t^{s-1} dt. \tag{7}$$

$\zeta_\Delta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \frac{\dim M}{2}$ で絶対収束して，全平面 $\mathbb{C}$ に有理型に解析接続される．

このスペクトルゼータ関数による正則化

$$\text{“}\det \Delta\text{”} = e^{-\zeta'_\Delta(0)}$$

により Δ の行列式 “$\det \Delta$” が定義される．(ゼータ正則化については例えば [3] やその参考文献を参照のこと．) ここで，(7) の右辺の積分表示を形式的に微分することにより $\zeta'_\Delta(0)$ の表示を書いてみると

$$\zeta'_\Delta(0) = \mathrm{Tr}(\Delta^{-s}(-\log \Delta))\Big|_{s=0} = -\,\mathrm{Tr}(\log \Delta) = -\log\det \Delta. \tag{8}$$

一方，

$$\zeta'_\Delta(0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}) t^{s-1} dt \right) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}) \frac{dt}{t}. \tag{9}$$

ここで $s \to 0$ で $\Gamma(s) \sim s^{-1}$ となることを用いた．(この表現自身はこのままでは両辺発散している．)

(9) において，$e^{-t\Delta}$ は M 上のブラウン運動から生成される熱半群で，その熱核 $p_t(x,y)$ を用いて $\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta})$ を積分表現すれば

$$\zeta'_\Delta(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_M p_t(x,x) dm(x)$$

となる．ただし，dm はリーマン計量から定まる M 上の体積をあらわす．ここで，ループ空間 Γ を

$$\Gamma = \bigsqcup_{t>0} \Gamma_t, \quad \Gamma_t = \{\gamma : [0,t] \to M \ ; \ \gamma(t) = \gamma(0), \ \text{continuous}\}$$

と定義する．Γ 上の可測構造 $\mathcal{F}_\Gamma$ の詳細については割愛するが (4.3 節で離散空間の場合を述べている)，Γ の可測集合 B に対して，

$$\mu^{loop}(B) := \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_M \mathbb{P}_x(B \cap \Gamma_t; X_t \in dm(x)) \tag{10}$$

により，$(\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma)$ 上に μ^{loop} を定義する．ただし，$\{X_t, \mathbb{P}_x\}$ は $x(\in M)$ から出発する M 上のブラウン運動である．

(8) と (9) より，(両辺とも発散しているが) 形式的には

$$\mu^{loop}(\Gamma) = -\log\det\Delta.$$

4.2 S 上の非再帰的マルコフ連鎖とグリーン関数

この節の設定は Le Jan [6] により定式化され，Sznitman [15] によって整理されているものを参考にしている．

S は空でない有限集合とする．非負のウェイト関数 $c_{x,y} = c_{y,x} \geq 0$ $(x, y \in S)$ を考える．ただし，$c_{x,x} = 0$. $c_{x,y} > 0$ のとき，x と y は隣接しているとし $xy \in E$ として辺集合 E を定義することにより S には自然にグラフの構造 (S, E) が入る．$\kappa_x \geq 0$ $(x \in S)$ を消滅測度 (killing measure) とする．以降，(S, E) はグラフとして連結で，少なくとも 1 点 $x \in S$ では $\kappa_x > 0$ であることを仮定する．以下のディリクレ形式を考える：$f : S \to \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{E}(f,f) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in S} c_{x,y}(f(y) - f(x))^2 + \sum_{x\in S} \kappa_x |f(x)|^2 \tag{11}$$

このとき，$\langle \nu, f\rangle = \sum_{x\in S} \nu(x) f(x)$ と定義すると

$$\mathcal{E}(f,g) = \langle f, -Lg\rangle = \langle -Lf, g\rangle$$

でかつ

$$Lf(x) = \sum_{y\in S} c_{x,y} f(y) - \lambda_x f(x) = \sum_{y\in S} c_{x,y}(f(y) - f(x)) - \kappa_x f(x),$$

ただし，$\lambda_x = \sum_{y\in S} c_{x,y} + \kappa_x$. 上で述べた $c_{x,y}$ と κ_x の仮定の下，推移確率 $P = (P_{xy})_{x,y\in S\cup\{\Delta\}}$ を

$$P_{xy} = \begin{cases} \frac{c_{x,y}}{\lambda_x}, & y \neq \Delta \\ \frac{\kappa_x}{\lambda_x}, & y = \Delta. \end{cases}$$

と定義する．Δ は吸収状態をあらわす．$P - I$ を生成作用素とする S 上の連続時間マルコフ連鎖を $(X_t, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in S})$ とすると，S が有限で $\kappa_x > 0$ であるから非再帰的となる．よって，グリーン

関数

$$g(x,y) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty I(X_t = y)dt\right]\frac{1}{\lambda_y} \in (0,\infty) \quad (x,y \in S) \tag{12}$$

が定義される．定義よりグリーン関数は対称 $g(x,y) = g(y,x)$ である．

4.3 ループ空間上の σ-有限測度 μ^{loop}

S 上の (右連続) ループ空間を

$$\Gamma = \bigsqcup_{t>0} \Gamma_t, \quad \Gamma_t = \{\gamma : [0,t] \to S; \gamma(0) = \gamma(t), \text{右連続}\}$$

と定義する．$\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma \in \Gamma_t$ で一意的に定まる t を duration といい，$\tau(\gamma)$ とあらわす．$X_s(\gamma) = \gamma(s), s \in [0,\tau(\gamma)]$ を座標写像とする．$X_s : \Gamma_1 \to S$ によって生成される Γ_1 上の σ-加法族を考えて，Γ 上には写像

$$(w,t) \in \Gamma_1 \times (0,\infty) \mapsto \gamma(\cdot) := w\left(\frac{\cdot}{t}\right) \in \Gamma$$

によって $\Gamma_1 \times (0,\infty)$ 上の自然な積 σ-加法族から誘導される σ-加法族 $\mathcal{F}_\Gamma$ を考える．

連続経路空間上に (10) で定義されたループ測度とまったく同様に，$(\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma)$ 上の σ-有限測度を

$$\mu^{loop}(B) = \sum_{x\in S} \lambda_x \int_0^\infty P^t_{x,x}(B)\frac{dt}{t} \tag{13}$$

と定義する．ただし，可測集合 $B \in \mathcal{F}_\Gamma$ に対して

$$P^t_{x,y}(B) = \mathbb{P}_x(B \cap \{X_t = y\})\frac{1}{\lambda_y} \tag{14}$$

である．σ-有限性は (12) と (13) により

$$\mu^{loop}(\tau(\gamma) \geq \ell) \leq \frac{1}{\ell}\sum_{x\in S} g(x,x)\lambda_x < \infty \quad (\forall \ell > 0) \tag{15}$$

が成り立つことからわかる．さらに，$t \to 0$ で $\mathbb{P}_x(X_t = x) \to 1$ であることより

$$\mu^{loop}(\Gamma) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\sum_{x\in S}\mathbb{P}_x(X_t = x) = \infty \tag{16}$$

より，μ^{loop} は無限測度である．(15) と (16) により，測度 μ^{loop} の下では，duration の短い小さなループが無限にたくさん存在することがわかる．

また，$x \in S$ における $\gamma \in \Gamma$ の局所時間を

$$L_x(\gamma) := \int_0^{\tau(\gamma)} I(X_s(\gamma) = x)ds \cdot \frac{1}{\lambda_x}.$$

とする．$V:S\to[0,\infty)$ に対して $\Phi_V:\Gamma\to[0,\infty)$ を

$$\Phi_V(\gamma) := \sum_{x\in S} V(x)L_x(\gamma) = \int_0^{\tau(\gamma)} V(X_s(\gamma))ds\cdot\frac{1}{\lambda_{X_s(\gamma)}}.$$

と定義すると，Feynman-Kac 型の公式

$$\int_\Gamma (1-e^{-\Phi_V(\gamma)})\mu^{loop}(d\gamma) = \log\det(I+GV)$$

が成り立つ．ただし，$G=(-L)^{-1}=(\lambda(I-P))^{-1}$.

4.4 α-行列式点過程のポアソン表現

α-行列式点過程をポアソン表現 (Cox 点過程で表現) することを考える．

以下，$\beta>0$ とする．Γ 上 σ-有限測度 $\beta\mu^{loop}$ を intensity 測度とする Γ 上のポアソン点過程 $\Pi_{\beta\mu^{loop}}$ を考える．$\Pi_{\beta\mu^{loop}}$ は配置空間 $Q(\Gamma)$ 上の確率測度である．ラプラス変換は (1) にあるように

$$E_{\Pi_{\beta\mu^{loop}}}\left[\exp(-\langle\omega,\Phi\rangle)\right] = \exp\left(-\beta\int_\Gamma(1-e^{-\Phi(\gamma)})\mu^{loop}(d\gamma)\right)$$

となる．ここで，$\omega=\sum_i\delta_{\gamma_i}\in Q(\Gamma)$, $\Phi:\Gamma\to[0,\infty]$ である．前節の Feynman-Kac 型公式より $\Phi_V=\sum_{x\in S}V(x)L_x$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned}E_{\Pi_{\beta\mu^{loop}}}\left[\exp(-\langle\omega,\Phi_V\rangle)\right] &= \exp\left(-\beta\int_\Gamma(1-e^{-\Phi_V(\gamma)})\mu^{loop}(d\gamma)\right)\\ &= \exp\left(-\beta\log\det(I+GV)\right) \qquad (17)\\ &= \det(I+GV)^{-\beta}\end{aligned}$$

となる．一方，積分核 $K(x,y)=g(x,y)$ $(x,y\in S)$ を考える．$g(x,y)\geq 0$ であるから $\det_\alpha(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$ は常に非負である．よって，S 上の α-行列式点過程は存在して，そのラプラス変換は

$$E_{\mu_G^{(\alpha)}}\left[\exp(-\langle\xi,f\rangle)\right] = \det\left(I+\alpha G(1-e^{-f})\cdot\right)^{-\frac{1}{\alpha}},\quad f\in C_c^+(S) \qquad (18)$$

で与えられる．(17) と (18) の比較により α-行列式点過程のポアソン表現が可能になる．

定理 1. $\alpha>0$ とする．$\mu_G^{(\alpha)}$ をグリーン作用素 G に付随する α-行列式点過程とする．ループ配置 $\omega=\sum_i\delta_{\gamma_i}\in Q(\Gamma)$ に対して $\mathcal{L}_x:Q(\Gamma)\to[0,\infty]$ を

$$\mathcal{L}_x(\omega)=\langle\omega,L_x\rangle=\sum_i L_x(\gamma_i) \qquad (19)$$

とし，$\mathcal{L}(\omega)=(\mathcal{L}_x(\omega),x\in S)$ とおくと，

$$E_{\mu_G^{(\alpha)}}(\cdot)=E_{\Pi_{\alpha^{-1}\mu^{loop}}}[\Pi_\alpha\mathcal{L}(\cdot)].$$

つまり，$\mu_G^{(\alpha)}$ はランダム *intensity* 測度 $\alpha\mathcal{L}$ をもつ S 上のポアソン点過程である．$\mathcal{L}$ は *intensity* 測度 $\alpha^{-1}\mu^{loop}$ をもつ Γ 上のポアソン点過程から定まるランダム測度である．

証明．$\beta = \alpha^{-1}$, $V = \alpha(1 - e^{-f})$ とおく．

$$\langle \omega, \Phi_V \rangle = \sum_{x \in S} \alpha(1 - e^{-f(x)})\mathcal{L}_x(\omega)$$

より，

$$E_{\Pi_{\alpha\mathcal{L}}}[\exp(-\langle \xi, f \rangle)] = \exp(-\langle \omega, \Phi_V \rangle)$$

であるから，(17) より

$$E_{\Pi_{\alpha^{-1}\mu^{loop}}}\big(\Pi_{\alpha\mathcal{L}}[\exp(-\langle \xi, f \rangle)]\big) = \det(I + G(\alpha(1 - e^{-f})\cdot))^{-\alpha^{-1}}$$

ラプラス変換の一意性より結論を得る． □

4.5 系と注意

Le Jan [6] によるガウス自由場と $\mathcal{L}_x$ の関係を述べて，S が有限集合の場合にはその関係が一般化 (命題 6) できることを述べる．

$\{\varphi_x, x \in S\}$ はガウス自由場，その確率法則を $\mathbb{P}_{GFF}$ とあらわす．つまり，共分散が (形式的には) Δ^{-1} となるもので，$\mathbb{E}_{GFF}[\varphi_x \varphi_y] = g(x, y)$ となるガウス場である．ただし，$g(x, y)$ は非再帰的なマルコフ過程のグリーン関数である．このとき，

$$(\mathcal{L}_x)_{x \in S} \text{ under } \Pi_{\frac{1}{2}\mu^{loop}} \overset{d}{=} \left(\frac{1}{2}\varphi_x^2\right)_{x \in S} \text{ under } \mathbb{P}_{GFF}$$

が成り立つ．S が有限集合の場合は，この関係式の一般化が以下のように与えられる．

命題 6. $S = \{1, 2, \ldots, p\}$ とする．$\beta \in \{\frac{1}{2}, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\} \cup (\frac{p-1}{2}, \infty)$ ならば，

$$(\mathcal{L}_x)_{x \in S} \textit{ under } \Pi_{\beta\mu^{loop}} \overset{d}{=} \left(\frac{1}{2}X_{xx}\right)_{x \in S} \textit{ under } W_p(\beta, G)$$

となる．ただし，$X \sim W_p(\beta, G)$．

注意. $X \sim W_p(1/2, G)$ のとき $X_{xx} \overset{d}{=} \varphi_x^2$ under $\mathbb{P}_{GFF}$．

注意. ループ測度の occupation 場 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_x, x \in S)$ は Symanzik のモーメント公式の中に以下のようにあらわれる：ラプラス変換で定義される関数 $h(u) = \int_0^\infty e^{-ux}\nu(dx)$ に対して場 $\varphi = (\varphi_x)_{x \in S}$ の確率法則を

$$P_h(d\varphi) := Z_h^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{E}(\varphi, \varphi)\right) \prod_{x \in S} h\Big(\frac{\varphi_x^2}{2}\Big) d\varphi_x$$

と与える．ただし，$\mathcal{E}(f,f)$ は (11) で定義されるものである．このとき，以下の公式が成り立つ (e.g. 定理 4.8 [15])．

$$\langle \varphi_{z_1}\varphi_{z_2}\cdots\varphi_{z_{2k}}\rangle_h=\sum_{\substack{\text{matching of}\\ \{z_1,z_2,\dots,z_{2k}\}}}\frac{\mathbf{E}\otimes\tilde{\mathbb{E}}\otimes\Pi_{\frac{1}{2}\mu^{loop}}\left[e^{-\sum_{x\in S}V_{\tilde{\omega}}(x)\{\mathcal{L}_x(\omega)+\sum_{j=1}^{k}L_x(\gamma_j)\}}\right]}{\tilde{\mathbb{E}}\otimes\Pi_{\frac{1}{2}\mu^{loop}}\left[e^{-\sum_{x\in S}V_{\tilde{\omega}}(x)\mathcal{L}_x(\omega)}\right]}$$

ただし，和は $z_1,\dots,z_{2k}$ のマッチング $(\{x_1,y_1\},\dots,\{x_k,y_k\})$ の全体をわたり，$\mathbf{P}=P_{x_1,y_1}\otimes\cdots\otimes P_{x_k,y_k}$ ($P_{x,y}$ は (14) で定義したもの) を $(\gamma_1,\dots,\gamma_k)$ の分布とする．また，$\{V_{\tilde{\omega}}(x),x\in S\}$ は i.i.d. 実確率変数で分布 ν に従い，$\tilde{\mathbb{E}}$ は ν に関する期待値である．

注意． 定理 1 の表現定理では，空間 S は有限集合であった．可算集合や $\mathbb{R}$ の部分集合の場合は同様の方法が有効であるが，2 次元以上の連続空間への一般化はこのままではうまくいかない．実際，グリーン作用素 G が局所トレース族になるのは，離散・1 次元の場合のみであるので，G に付随する α-行列式 "点" 過程が存在するのは 1 次元までである．一方，G は 2, 3 次元では局所 Hilbert-Schmidt 族に属し，occupation 場の繰り込みを考えることにより，ラプラス変換が regularized determinant $\det_2$ ($\det_\alpha$ の $\alpha=2$ ではない) で表現されるような連続場について議論されている [6]．

参考文献

[1] P. Brändén, Solutions to two problems on permanents, Lin. Alg. Appl. **436** (2012), 53–58.

[2] B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, Determinantal processes and independence, arXiv:math.PR/0503110v1 6 Mar 2005.

[3] N. Kurokawa and M. Wakayama, Zeta regularizations, Acta Appl. Math. **81** (2004), 147–166.

[4] G. Lawler and W. Werner, The Browinian loop soup, Probab. Theory Relat. Fields 128 (2004), 565–588.

[5] E. H. Lieb, Proofs of some conjectures on permanents, J. Math. and Mech. **16** (1966), 127–134.

[6] Y. Le Jan, Markov paths, loops and fields, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, Lec. Notes in Math. **2026**, Springer, Heidelberg, 2011.

[7] O. Macchi. *The coincidence approach to stochastic point processes*, Adv. Appl. Prob. **7** (1975), 83-122.

[8] O. Macchi, *The fermion process – a model of stochastic point process with repulsive points*, Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and of the Eighth European Meeting of Statisticians (Tech. Univ. Prague, Prague, 1974), Vol. A, 391–398.

[9] H. Ochiai, Positivity for certain α-determinants (in Japanese), RIMS Kôkyurôku **1722** (2010), 154–166.

[10] T. Osogami, T. Shirai and H. Waki, Remarks on positivity of α-determinants via SDP relaxation, J. Math-for-Industry **5** (2013A-1), 1–10.

[11] A. D. Scott and A. D. Sokal, Complete monotonicity for inverse powers of some combinatorially defined polynomials, preprint.

[12] T. Shirai, Remarks on the positivity of α-determinants, Kyushu J. Math. **61** (2007), 169–189.

[13] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point processes, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

[14] A. Soshnikov, Determinantal random point fields, Russian Math. Surveys **55** (2000), 923–975.

[15] A.S. Sznitman, Topics in occupation times and Gaussian free fields, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012.

[16] D. Vere-Jones, A generalization of permanents and determinants, Linear Algebra Appl. **111** (1988), 119–124.

[17] H.Tamura and K.R. Ito, Random point fields for paraparticles of any order. J. Math. Phys. **48** (2007), no. 2, 023301.