

# グラフから定まる単体複体の位相について

大阪大学大学院理学研究科 原 靖浩 (Yasuhiro Hara)

Graduate school of Science, Osaka University

洲本実業高校 富田優次 (Yuji Tomita)

Hyogo Prefectural Sumoto Industrial Senior High School

## 1 序

Borsuk-Ulam 型の定理のグラフ理論への応用として, Lovász による近傍複体を用いた Kneser グラフの彩色数に関する定理の証明が知られている ([8]). 近年, グラフの近傍複体に関連して, 位数 2 の巡回群が作用する箱複体やその一般化である Hom 複体などグラフから定まる複体の研究が進んでいて, 今後, グラフ理論への応用が期待できる. 本稿では, 空間に作用する群を位数 2 の巡回群に制限して Borsuk-Ulam の定理に関する不変量を紹介し, 箱複体に関するそれらの不変量が彩色数と関係していることについて紹介する. これらの結果は基本的に [9] に述べられていることであるが, 本稿では, Csorba の論文 [2], [3] に書かれた結果を用いた証明を与えている. 4 節では  $D^2$  の三角形分割を与えるようなグラフについて近傍複体や箱複体の位相と彩色数などグラフの性質との関係を考察した.  $D^2$  の三角形分割を与えるようなグラフは平面グラフであり, 頂点が 3 個の完全グラフ  $K_3$  を部分グラフとして含むので彩色数は 3 または 4 であるが, 彩色数が 4 であることと, そのグラフの近傍複体が単連結になることが同値であることを証明した. 近傍複体や箱複体を考えることがどのようなグラフで有効か (彩色数のよい評価を与えるか) を調べることは応用のために重要と思われるが, ここで考察したグラフは, 近傍複体に関する不変量が彩色数のよい評価を与えるようなものであるといえる.

## 2 Borsuk-Ulam の定理とそれに関する不変量

位数 2 の巡回群  $Z_2$  の分類空間  $BZ_2$  のコホモロジー環は

$$H^*(BZ_2; Z_2) \cong Z_2[x], \deg(x) = 1$$

である ([11]).

$X$  を  $Z_2$  が自由に作用するような位相空間で,  $X/Z_2$  が弧状連結であるようなものとする.  $X$  に対して, 被覆  $X \rightarrow X/Z_2$  の高さ  $h(X)$  を

$$h(X) := \max\{n \mid \bar{f}^* x^n \neq 0 (\bar{f}: X/Z_2 \rightarrow BZ_2 \text{ は classifying map})\}$$

により定義する. ただし,  $X$  が弧状連結でないときには,  $X/Z_2$  が弧状連結であることから,  $\bar{f}^* x = 0$  であり, このときには,  $h(X) = 0$  と定義することにする. 被覆  $X \rightarrow X/Z_2$  に関する Stiefel-Whitney 類  $w(X)$  を考えると,  $w(X)^n \neq 0$  を満たすような最大の  $n$  が  $h(X)$  である. 球面  $S^n$  に対心作用を考えると,  $h(S^n) = n$  である ([11]). 次の命題が成り立つことは容易にわかる.

**命題 2.1.**  $X$  と  $Y$  を自由な  $\mathbf{Z}_2$  作用がある位相空間とする.  $X$  から  $Y$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像が存在するならば,  $h(X) \leq h(Y)$  が成り立つ.

**証明.**  $X$  から  $Y$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像  $f$  が存在するとき,  $f$  から写像  $\bar{f}: X/\mathbf{Z}_2 \rightarrow Y/\mathbf{Z}_2$  が定まり,  $Y$  に対する分類写像  $\bar{g}: Y/\mathbf{Z}_2 \rightarrow B\mathbf{Z}_2$  を考えると,  $\bar{g} \circ \bar{f}: X/\mathbf{Z}_2 \rightarrow B\mathbf{Z}_2$  は分類写像である.  $(\bar{f}^* \circ \bar{g}^*)x^n \neq 0$  ならば  $\bar{g}^*x^n \neq 0$  であることより,  $h(X) \leq h(Y)$  が成り立つ. ■

命題 2.1 と  $h(S^n) = n$  であることより,  $X$  から  $S^n$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像が存在するとき,  $h(X) \leq n$  であり,  $S^n$  から  $X$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像が存在するとき,  $h(X) \geq n$  である. このことから,  $X$  の  $\mathbf{Z}_2$ -index と  $\mathbf{Z}_2$ -coindex を

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X &:= \min\{n \mid \exists \mathbf{Z}_2\text{-map } f: X \rightarrow S^n\} \\ \text{coind}_{\mathbf{Z}_2} X &:= \max\{n \mid \exists \mathbf{Z}_2\text{-map } f: S^n \rightarrow X\} \end{aligned}$$

により定義するとき,

$$\text{coind}_{\mathbf{Z}_2} X \leq h(X) \leq \text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X$$

が成り立つことがわかる. また,  $\mathbf{Z}_2$ -index と  $\mathbf{Z}_2$ -coindex については, 命題 2.1 と同様に次の命題が成り立つ.

**命題 2.2.**  $X$  と  $Y$  を自由な  $\mathbf{Z}_2$  作用がある位相空間とする.  $X$  から  $Y$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像が存在するならば,  $\text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X \leq \text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} Y$  および  $\text{coind}_{\mathbf{Z}_2} X \leq \text{coind}_{\mathbf{Z}_2} Y$  が成り立つ.

**証明.**  $X$  から  $Y$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像  $f$  が存在するとき,  $k = \text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} Y$  とおくと,  $Y$  から  $S^k$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像  $g$  が存在する.  $g \circ f$  は  $X$  から  $S^k$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像であり,  $\text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X \leq k = \text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} Y$  がわかる.

また,  $l = \text{coind}_{\mathbf{Z}_2} X$  とすると,  $S^l$  から  $X$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像  $h$  が存在する.  $f \circ h$  は  $S^l$  から  $Y$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像であり,  $\text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} Y \geq l = \text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X$  がわかる. ■

次の定理は [10] の定理 1.1 においてホモロジーで書いているものであるが, コホモロジーでも Gysin-Smith 完全系列を使って同様に証明できる.

**命題 2.3.**  $X$  が自由な  $\mathbf{Z}_2$  作用がある弧状連結な位相空間で,  $1 \leq p \leq m$  に対して  $H^p(X; \mathbf{Z}_2) = 0$  をみたすものとする. また,  $Y$  を自由な  $\mathbf{Z}_2$  作用がある Hausdorff 空間で,  $H^{m+1}(Y/\mathbf{Z}_2; \mathbf{Z}_2) = 0$  を満たすものとする. このとき,  $X$  から  $Y$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像は存在しない.

$k \leq m$  のとき  $H^{m+1}(S^k/\mathbf{Z}_2; \mathbf{Z}_2) = 0$  なので,  $\mathbf{Z}_2$ -index について次が成り立つ.

**系 2.4.**  $X$  が自由な  $\mathbf{Z}_2$  作用がある弧状連結な位相空間で,  $1 \leq p \leq m$  に対し  $H^p(X; \mathbf{Z}_2) = 0$  をみたすものとする. このとき,  $\text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X \geq m + 1$ .

実は、系 2.4 の仮定を満たすような  $X$  に対しては、Gysin-Smith 完全系列を使うと  $h(X) \geq m+1$  であることが示される。このことから、 $\text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X \geq m+1$  を証明することができる。

このように、 $\text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X$  を知るには  $h(X)$  を計算するのが有効であるが、 $h(X) \neq \text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X$  となるような  $X$  も存在する。その例を以下に挙げておこう。ここに挙げる例は [2] に書いてある例と同じ考え方でできるものである。

$S^2$  に対心作用を考え、 $h: S^3 \rightarrow S^2$  を Hopf map とする。2つの  $D^4 = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid \|x\| \leq 1\}$  を考え、 $S^2$  に2つの  $D^4$  を境界  $S^3$  で以下のようにつける。

$$X = S^2 \cup_h D^4 \cup_{-h} D^4$$

$-h$  は  $h$  に対心点を入れ替える写像を合成したものである。2つの  $D^4$  に入れ替えるような  $\mathbf{Z}_2$  作用を考えれば、 $X$  に  $\mathbf{Z}_2$  作用を考えることができ、この作用は自由である。このとき、 $h(X) = 2$  であることは Gysin-Smith 完全系列を考えることによりわかる。次に、 $\text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X$  であるが、これは2にはならない。なぜなら、 $X$  の  $\mathbf{Z}_2$  不変な部分空間  $S^2$  から  $S^2$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像  $f$  の写像度は0ではないので、 $D^4$  の境界  $S^3$  から  $S^2$  への写像  $f \circ h$  を考えると  $\pi_3(S^2)$  の元として0にはならず、これを  $D^4$  に拡張することができないからである。この例の  $X$  については、 $\text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} X = 3$  となる。

また、 $h(X)$  と  $\text{coind}_{\mathbf{Z}_2} X$  で  $h(X) > \text{coind}_{\mathbf{Z}_2} X$  となるような  $X$  の例としては、 $\mathbf{R}^3$  に原点对称に埋め込んだ種数が正の偶数であるような有向閉曲面がある。ただし、 $\mathbf{Z}_2$  作用は原点对称な点を入れ替えるようなものを考える。これについては、 $h(X) = 2$  で  $\text{coind}_{\mathbf{Z}_2} X = 1$  である。

### 3 グラフの近傍複体、箱複体

$G = (V, E)$  を単純グラフ（多重辺とループがない）とする。また、 $n$  を自然数とするとき、 $[n]$  により  $n$  以下の自然数全体の集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  を表すことにする。 $c: V \rightarrow [n]$  が  $\{u, v\} \in E$  ならば  $c(u) \neq c(v)$  を満たすとき、 $c$  を**彩色**という。また、彩色  $c: V \rightarrow [n]$  が存在するような最小の  $n$  を**彩色数**といい、 $\chi(G)$  により表すことにする。

どの2つの頂点も隣接している（辺で結ばれている）グラフを**完全グラフ**とよび、頂点の個数が  $n$  個の完全グラフを  $K_n$  で表すことにする。容易にわかるように  $\chi(K_n) = n$  である。

この章で紹介する近傍複体は、Kneser graph の彩色数の研究において Lovász により定義された ([8])。また、Matoušek の著書 [9] にも近傍複体と箱複体についての詳しい解説がある。まずは Kneser graph の定義を述べよう。

Kneser graph  $KG_{n,k} (n \geq 2k)$  の頂点集合  $V(KG_{n,k})$  は、 $V(KG_{n,k}) = \binom{[n]}{k}$  で定義される。つまり、 $[n]$  の部分集合で、元の個数が  $k$  になるものが頂点である。また、 $A_1, A_2 \subset V(KG_{n,k})$  に対して、 $\{A_1, A_2\} \in E(KG_{n,k})$  であるのは  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  であるときと定める。Lovász が [8] で証明したのは、次の定理である。

**定理 (Lovász[8]).**  $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$

この定理で,  $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2$  を示すのはそれほど難しくない.  $c: V(KG_{n,k}) \rightarrow [n - 2k + 2]$  を  $A \in V(KG_{n,k}) (\subset [n])$  に対して,  $c(A) = \min\{\min(A), n - 2k + 2\}$  と定義すると, これが彩色になっているからである.  $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$  を示すのに Lovász は近傍複体と Borsuk-Ulam の定理を用いた.

以下では  $G$  は 2 つ以上の頂点がある連結なグラフと仮定し, 近傍複体の定義について述べよう.  $V$  の部分集合  $A$  に対して,  $V$  の部分集合  $CN(A)$  を

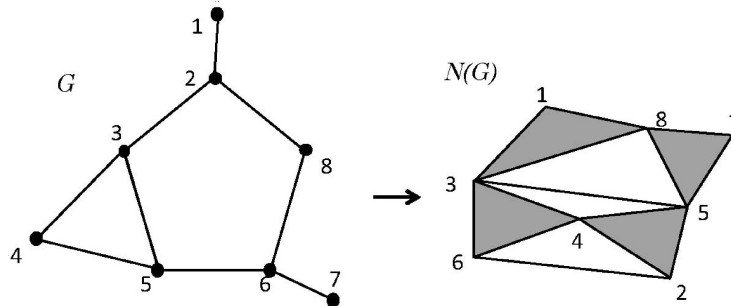
$$CN(A) := \{v \mid \{v, a\} \in E \text{ for } \forall a \in A\} (\subset V)$$

により定義する. また,  $V$  の部分集合族  $N(G)$  を

$$N(G) := \{A \subset V \mid CN(A) \neq \emptyset, A \neq \emptyset\}$$

により定義する.  $CN$  の定義より,  $B \subset A$  ならば  $CN(B) \supset CN(A)$  が成り立つので,  $A \in N(G)$  かつ  $B \subset A (B \neq \emptyset)$  ならば,  $B \in N(G)$  であり,  $N(G)$  は単体複体 (抽象複体) であり, 頂点集合は  $V$  と同一視できる.

例.



近傍複体上には, 一般には自由な  $\mathbb{Z}_2$  作用がない. Lovász は近傍複体の細分を考え, その部分複体として自由な  $\mathbb{Z}_2$  作用のある複体を考えた ([8]). ここでは, もう少し簡単に (図形は複雑になるが, 定義やその後の定理を導くのが簡単ということ), 以下に定義する箱複体を使って考えることにする.

$A_1, A_2 \subset V$  に対して,  $V \times \{1, 2\}$  の部分集合  $A_1 \boxplus A_2$  を

$$A_1 \boxplus A_2 = A_1 \times \{1\} \cup A_2 \times \{2\}$$

により定義する.  $V \times \{1, 2\}$  の部分集合族からなる単体複体  $B(G)$  を

$$B(G) := \{A_1 \boxplus A_2 \mid A_1, A_2 \subset V, A_1 \cap A_2 = \emptyset, \\ \{u, v\} \in E \text{ for } \forall u \in A_1, \forall v \in A_2, \\ CN(A_1) \neq \emptyset \text{ or } CN(A_2) \neq \emptyset \}$$

により定義する.  $T: B(G) \rightarrow B(G)$  を  $A_1 \uplus A_2 \mapsto A_2 \uplus A_1$  により定義すると,  $T^2 = \text{id}$  であり,  $T$  が不動点を持たないことは容易にわかる.

**例** ( $K_n$  の箱複体).  $B(K_n)$  の頂点集合は  $\{1\} \uplus \emptyset, \{2\} \uplus \emptyset, \dots, \{n\} \uplus \emptyset, \emptyset \uplus \{1\}, \dots, \emptyset \uplus \{n\}$  であり, 極大な単体は,  $A \cup B = [n], A \cap B = \emptyset, A \neq [n], B \neq [n]$  であるような  $[n]$  の部分集合  $A, B$  を用いて  $A \uplus B$  と書かれるものである.

頂点  $\{i\} \uplus \emptyset$  に対して  $\mathbf{R}^n$  の  $(0, \dots, 0, \overset{i \text{ 番目}}{1}, 0, \dots, 0)$  を対応させ,  $\emptyset \uplus \{i\}$  に対して  $\mathbf{R}^n$  の  $(0, \dots, 0, \overset{i \text{ 番目}}{-1}, 0, \dots, 0)$  を対応させることにより,  $|B(K_n)|$  は  $n$  次元 cross polytope の境界部分から 2 つの面  $[n] \uplus \emptyset, \emptyset \uplus [n]$  を取り除いたものになる. したがって,  $|B(K_n)|$  は  $S^{n-2}$  に  $\mathbf{Z}_2$  ホモトピー同値なものである.

以下,  $G, H$  を単純グラフとする.  $f: V(G) \rightarrow V(H)$  が  $\{u, v\} \in E(G)$  であれば常に  $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$  を満たすとき,  $f$  を  $G$  から  $H$  への**グラフ準同型**という. グラフ準同型を  $f: G \rightarrow H$  とも書く. グラフ準同型  $f: G \rightarrow H$  は, 単体写像

$$B(f): B(G) \rightarrow B(H), A_1 \uplus A_2 \mapsto f(A_1) \uplus f(A_2)$$

を導く. また, この単体写像は  $\mathbf{Z}_2$  写像になっていることに注意しておこう.

さて,  $\chi(G) = n$  であることは,  $[n]$  への彩色が存在し,  $[n-1]$  への彩色が存在しないということであるが, これは,  $G$  から  $K_n$  へのグラフ準同型が存在し,  $G$  から  $K_{n-1}$  へのグラフ準同型が存在しないということに他ならない. したがって,  $\chi(G) = n$  であるとき, 彩色より  $|B(G)|$  から  $|B(K_n)|$  への  $\mathbf{Z}_2$  写像が誘導され,  $|B(K_n)|$  は  $S^{n-2}$  に  $\mathbf{Z}_2$  ホモトピー同値なので,  $n-2 \geq \text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} B(G)$  であることがわかる. したがって, 次のことが成り立つ.

**定理 3.1.**  $\chi(G) \geq \text{Ind}_{\mathbf{Z}_2} B(G) + 2 \geq h(B(G)) + 2 \geq \text{coind}_{\mathbf{Z}_2} B(G) + 2.$

この定理から,  $\chi(G)$  を調べるのに  $B(G)$  の位相を調べるのが有効であることがわかる. しかしながら,  $B(G)$  は単体の数が多くて, 例えばホモロジーの計算などは大変である. 近傍複体  $N(G)$  の方が単体の数が少なく見やすいが,  $N(G)$  と  $B(G)$  について次の命題が成り立つ.

**命題 3.2**([3]).  $|B(G)|$  と  $|N(G)|$  は ホモトピー同値である.

**証明の概略.**  $\{A_1 \uplus A_2 \in B(G) \mid A_2 = \emptyset\} \subset B(G)$  と  $N(G)$  は 単体複体として同型である.

$G$  の頂点集合  $V(G)$  を  $\{v_1, \dots, v_n\}$  と表し,  $V(G)$  のベキ集合から  $N$  への写像  $\alpha$  を  $\alpha(\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}) := \min\{i_1, \dots, i_k\}$  により定義する.

$B(G)$  の部分集合  $\Sigma$  を次を満たすものとして定める:

$$\begin{aligned} \{v_{i_1} \uplus \emptyset, \dots, v_{i_l} \uplus \emptyset, \emptyset \uplus v_{j_1}, \dots, \emptyset \uplus v_{j_m}\} \in \Sigma \\ \Leftrightarrow \alpha(CN(\{v_{j_1}, \dots, v_{j_m}\})) \notin \{i_1, \dots, i_l\} \text{ (ただし, } m \geq 1 \text{ とする)}. \end{aligned}$$

$\sigma: \Sigma \rightarrow B(G) \setminus \Sigma$  を  $\sigma_\tau = \tau \cup \{v_{\alpha(\{y_1, \dots, y_m\})} \uplus \emptyset\}$  により定義するとき,

$$B(G) \searrow B(G) - \{\tau_1, \sigma_{\tau_1}\} \searrow B(G) - \{\tau_1, \sigma_{\tau_1}, \tau_2, \sigma_{\tau_2}\} \searrow \cdots \searrow N(G)$$

となるような elementary collapse の列が存在する. これにより,  $B(G)$  と  $N(G)$  は simple homotopy 同値であり,  $|B(G)|$  と  $|N(G)|$  がホモトピー同値であることがわかる. ■

この命題より,  $|N(G)|$  が  $k$ -連結であれば,  $|B(G)|$  も  $k$ -連結であり, したがって, 定理 3.1 と系 2.4 より次のことがわかる.

**命題 3.3 (Lovász の不等式 [8]).**  $N(G)$  が  $k$  連結ならば  $\chi(G) \geq k + 3$ .

Lovász は [8] の中で, ここで説明した方法とは別の方法でこの不等式を導き, Kneser graph  $KG_{n,k}$  が  $(n - 2k - 1)$ -連結であることを証明することにより, この節の初めの方で紹介した等式  $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$  を証明した. この等式を見ると, Lovász の不等式や定理 3.1 は彩色数を調べるのにかなり有効に思える. しかし, 次のような定理が知られている.

**定理 (Erdős, Lovász).** 任意の 2 つの整数  $m, n \geq 2$  に対して, どの閉道も  $m$  より大きいような  $n$ -彩色グラフが存在する.

どの閉道も 5 より大きければ, 近傍複体や箱複体のホモロジー群は 2 次以上では消える. このとき,  $\text{Ind}_{\mathbb{Z}_2} B(G) + 2 \leq 3$  であり, 近傍複体や箱複体を用いるのは彩色数を調べるのに有効とはいえない. 次節で, 近傍複体や箱複体を考えるのが有効になるようなグラフについて考察しよう.

## 4 $D^2$ の三角形分割グラフについて

2次元円板 ( $D^2$ ) の 3 角形分割の 1 切片になっているようなグラフを  $D^2$  の **3 角形分割グラフ** と呼ぶことにする. また,  $D^2$  の 3 角形分割グラフ  $G$  において,  $G$  の頂点が  $D^2$  の 3 角形分割の境界上にないときには, その頂点を  $D^2$  の **内部** にある頂点と呼ぶことにする. グラフの頂点  $v$  の **次数** とは,  $v$  に接続する辺の個数のことである.  $D^2$  の 3 角形分割グラフ  $G$  は平面グラフであり, 四色定理 ([1]) より  $\chi(G) \leq 4$  となる. また,  $G$  は  $K_3$  を部分グラフとして含むので,  $\chi(G)$  は 3 か 4 である. [12] の定理 19.4 の証明と同様にして次のことがわかる.

**命題 4.1.**  $D^2$  の 3 角形分割グラフでは, 内部の頂点到奇数次数のものがあれば  $\chi(G) = 4$  であり, 内部の頂点がすべて偶数次数であるか内部の頂点が存在しなければ  $\chi(G) = 3$  である.

以下では,  $D^2$  の 3 角形分割グラフ  $G$  の近傍複体  $N(G)$  の位相について考えることにしよう. まず, 次のことが成り立つ.

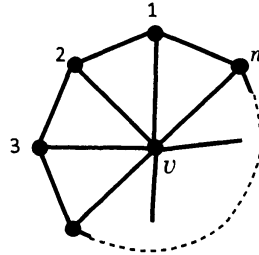
**命題 4.2.** 連結で彩色数が 3 以上のグラフ  $G$  の近傍複体  $N(G)$  は連結である.

**証明.**  $N(G)$  の2つの頂点  $u, v$  は  $G$  の頂点でもあり,  $G$  が連結で彩色数が3以上のグラフであることから,  $u$  から  $v$  への歩道で長さが偶数になるものがある.

なぜなら, まず歩道  $u = a_0, a_1, \dots, a_n = v$  は  $G$  の連結性より存在する.  $n$  が奇数の場合に, これを利用して長さが偶数の歩道を次のように構成する: 彩色数が3以上のグラフには奇閉路を持つので, それを  $b_1, \dots, b_{2k-1}, b_1$  とする.  $u$  から  $b_1$  への歩道を考え, 奇閉路  $b_1, \dots, b_{2k-1}, b_1$  を1周した後に  $b_1$  から  $u$  にもどる歩道は  $u$  から  $u$  自身への歩道で, 長さが奇数である. このように作った長さが奇数の歩道と, 長さが奇数の歩道  $u = a_0, a_1, \dots, a_n = v$  をつなげると  $u$  から  $v$  への長さ偶数の歩道が作れる.

さて, 長さが偶数の歩道  $u = a_0, a_1, \dots, a_{2k} = v$  を考えると,  $\{a_0, a_2\} \subset N(a_1), \{a_2, a_4\} \subset N(a_3), \dots, \{a_{2k-2}, a_{2k}\} \subset N(a_{2k-1})$  なので,  $N(G)$  において,  $u$  と  $v$  を結ぶ1-単体の列が存在する. したがって,  $N(G)$  は連結である. ■

$D^2$  の3角形分割グラフの近傍複体は命題 4.2 より連結である. 次に,  $|N(G)|$  の基本群について考える.  $n$  頂点の閉路グラフに1つの頂点  $v$  を加え,  $v$  と閉路グラフの頂点をすべて結んだ下のようなグラフ  $W_n$  を車輪と呼ぶ.



$W_n$  の近傍複体のホモトピー型は以下のようになっている.

**命題 4.3.**  $|N(W_4)| \simeq S^1$  であり,  $n$  が6以上の偶数のとき,  $|N(W_n)| \simeq S^1 \vee S^2 \vee S^2$ . また,  $n$  が3以上の奇数のとき,  $|N(W_n)| \simeq S^2$ .

**証明の概略.** 上の図のように頂点に名前をつける ( $1, 2, \dots, n$  と  $v$ ).  $N(W_4)$  の極大な単体は,  $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, v\}, \{2, 4, v\}$  であり,  $|N(W_4)| \simeq S^1$  であることは容易にわかる.

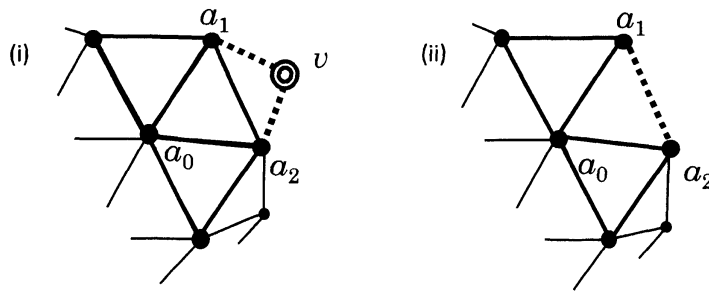
$n$  が6以上の偶数のとき  $n = 2k$  となる自然数  $k$  をとると,  $N(W_n)$  の極大な単体は,  $\{1, 2, \dots, 2k\}, \{1, 3, v\}, \{3, 5, v\}, \dots, \{2k-3, 2k-1, v\}, \{2k-1, 1, v\}, \{2, 4, v\}, \{4, 6, v\}, \dots, \{2k-2, 2k, v\}, \{2k, 2, v\}$  であり,  $\{1, 3, \dots, 2k-1\}, \{1, 3, v\}, \{3, 5, v\}, \dots, \{2k-3, 2k-1, v\}, \{2k-1, 1, v\}$  で1つ  $S^2$  とホモトピー同値な部分複体ができ,  $\{2, 4, \dots, 2k\}, \{2, 4, v\}, \dots, \{2k-2, 2k, v\}, \{2k, 2, v\}$  で1つ  $S^2$  とホモトピー同値な部分複体できて,  $\{1, 3, \dots, 2k-1\}$  と  $\{2, 4, \dots, 2k\}$  が極大な単体  $\{1, 2, \dots, 2k\}$  の面でつながっている. それ以外に頂点  $v$  で2つの  $S^2$  がつながるから,  $|N(W_n)| \simeq S^1 \vee S^2 \vee S^2$  となる.

$n$  が3以上の奇数のとき,  $n = 2k+1$  となる自然数  $k$  をとると,  $N(W_n)$  の極大な単体は,  $\{1, 2, \dots, 2k+1\}, \{1, 3, v\}, \{3, 5, v\}, \dots, \{2k-1, 2k+1, v\}, \{2k+1, 2, v\}, \{2, 4, v\}, \dots, \{2k-2, 2k, v\}, \{2k, 1, v\}$  であり,  $\{1, 2, \dots, 2k+1\}$  をつぶすような写像で  $|N(W_n)|$  と  $S^2$  のホモトピー同値写像が作れる. ■

$W_n$  の基本群については命題 4.3 でわかるが、一般の  $D^2$  の 3 角形分割グラフの近傍複体の基本群について次のことが成り立つ。

**定理 4.4.**  $G$  が  $D^2$  の 3 角形分割グラフのとき、 $G$  の内部の頂点で奇数次数のものが 1 つでもあれば  $|N(G)|$  は単連結であり、 $G$  の内部の頂点がすべて偶数次数もしくは内部の頂点が存在しなければ  $\pi_1(|N(G)|) \cong \mathbf{Z}$ 。

**証明.** 内部の頂点に奇数次数のものが 1 つでもあるような  $D^2$  の 3 角形分割グラフはその奇数次数の頂点の次数を  $n$  として、 $W_n$  に下図の (i) のように頂点と辺を加える操作と (ii) のように辺を加える操作を何度かすることにより得られる。(i) では  $v$  と辺  $a_1v, a_2v$  が加えられていて、(ii) では辺  $a_1a_2$  が加えられている。また、(i)→(i)→(ii)→(ii) のように続けて同じ操作をしてもよい。



まず、 $D^2$  の 3 角形分割グラフ  $G$  に (i) の操作をしたグラフを  $G'$  とすると、 $G'$  において  $N(a_0) \cap N(v)$  である。このようなとき、[5] の Lemma 5 より、 $|N(G')| \simeq |N(G' - v)| (= |N(G)|)$  である。もう少し補足しておく、 $N(G)$  と  $N(G')$  の違いは  $G$  の極大な単体  $CN(a_1)$  と  $CN(a_2)$  が  $CN(a_1) \cup \{v\}$  と  $CN(a_2) \cup \{v\}$  にそれぞれなることだけであり、 $CN(a_1)$  と  $CN(a_2)$  はともに  $a_0$  を含むことを考えれば  $N(G')$  は  $N(G)$  に collapse することがわかる。

次に  $D^2$  の 3 角形分割グラフ  $G$  に (ii) の操作をしたグラフを  $G''$  とするとき  $|N(G)|$  の基本群が 0 であれば、 $|N(G'')|$  の基本群も 0 であることを示す。

$a_0, a_1, a_2$  を上図 (ii) のものとする。 $N(G)$  と  $N(G'')$  の違いは  $CN(a_1)$  が  $CN(a_1) \cup \{a_2\}$  になり、 $CN(a_2)$  が  $CN(a_2) \cup \{a_1\}$  になったことである (ここで、 $CN$  は  $G$  において考えている)。

$|N(G'')|$  の頂点を基点とする閉道は  $|N(G'')|$  の 1-skelton 中の閉道とホモトープになるので、1-skelton 中の閉道のみを考える。 $|N(G)|$  になく  $|N(G'')|$  にある閉道は、途中で  $|CN(a_2) \cup \{a_1\}|$  または  $|CN(a_1) \cup \{a_2\}|$  を通るものである。 $|CN(a_2) \cup \{a_1\}|$  の 1-skelton 中の道で  $|CN(a_2)|$  に入っていないものは、 $ba_1$  というようなグラフ  $G$  で  $a_2$  と隣接する頂点  $b$  と  $a_1$  を含むような  $N(G'')$  の 1-単体を通る。しかしながら、 $ba_1$  という道は  $ba_0, a_0a_1$  という 2 つの 1-単体をつないだ道と (端点  $b, a_1$  を固定して) ホモトープであり、 $ba_0$  は  $|CN(a_2)|$  の道である。 $a_0a_1$  も  $G$  に  $a_0a_1$  を辺とする 3 角形があることから、 $|N(G)|$  内の道になっている。つまり、 $ba_1$  という道は  $|N(G)|$  内の道に (端点を固定して) ホモトープである。同様に、 $|CN(a_1) \cup \{a_2\}|$  を通る道も  $|N(G)|$  内の道にホモトープであり、 $|N(G'')|$  の頂点を基点



とする閉道は  $|N(G)|$  内の閉道にホモトープになる. したがって,  $|N(G)|$  基本群が 0 であることから,  $|N(G'')|$  の基本群も 0 である.

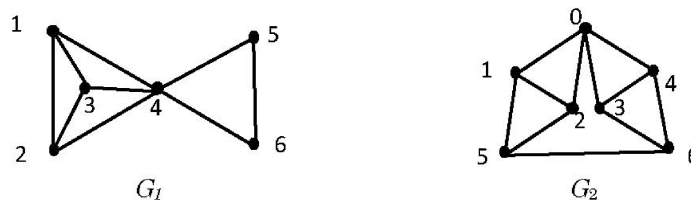
内部の頂点に奇数次数のものが 1 つでもあるような  $D^2$  の 3 角形分割グラフ  $G$  はその奇数次数の頂点 1 つの次数を  $n$  として,  $W_n$  に図 (i) の操作と (ii) の操作を何度かすることにより得られることと,  $\pi_1(|N(W_n)|) = 0$  であることより,  $|N(G)|$  が単連結であることがわかる.

次に,  $D^2$  の 3 角形分割グラフ  $G$  で  $G$  の内部の頂点がすべて偶数次数もしくは内部の頂点が存在しない場合であるが, このときは完全グラフ  $K_3$  に上の (i) と (ii) の操作を何度かして  $G$  ができる. (i) ではホモトピー型が変わらない. また,  $|N(K_3)| \approx S^1$  で  $\pi_1(|N(K_3)|)$  は 1 個の元で生成される, 上の (ii) の証明と同様にして, (ii) の操作で基本群の生成元の個数は 1 個のままかそれより少なくなることがわかる.  $G$  の内部の頂点がすべて偶数次数もしくは内部の頂点が存在しない場合は  $\chi(G) = 3$  なので,  $\pi_1(|N(G)|) = 0$  であれば, 命題 3.3 に反する. したがって,  $\pi_1(|N(G)|)$  は  $\mathbb{Z}$  もしくは  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  である. グラフ準同型  $f: K_3 \rightarrow G$  および  $g: G \rightarrow K_3$  が存在して,  $g \circ f: K_3 \rightarrow K_3$  は恒等写像なので,  $N(g)_* \circ N(f)_*: \pi_1(|N(K_3)|) \rightarrow \pi_1(|N(K_3)|)$  は恒等写像である. このことから,  $\pi_1(|N(G)|) = \mathbb{Z}$  がわかる. ■

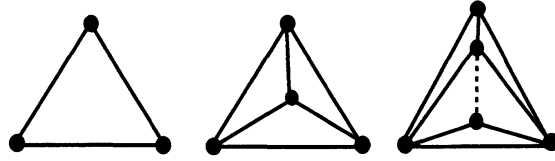
命題 4.1 と 定理 4.4 の結果から次のことがわかる.

**系 4.5.**  $D^2$  の 3 角形分割グラフ  $G$  について,  $|N(G)|$  が単連結であるための必要十分条件は  $\chi(G) = 4$  である.

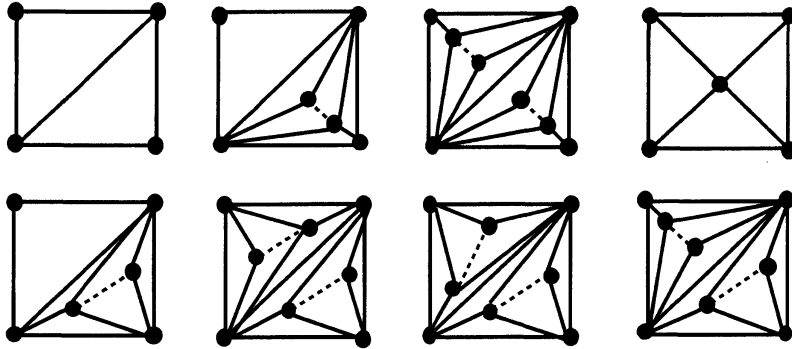
系 4.5 は,  $D^2$  の 3 角形分割グラフでは Lovász の不等式 (命題 3.3) おいて等号が成り立つということに他ならない. また,  $D^2$  の 3 角形分割グラフ以外の平面グラフでは Lovász の不等式が成り立たない例が存在する. 下の図の 2 つのグラフでは, 近傍複体は単連結とはならないが彩色数は 4 である. 特に  $G_2$  は, 彩色数 4 でありながら  $\text{Ind}_{\mathbb{Z}_2} B(G_2) = 1$ , つまり  $\chi(G_2) > \text{Ind}_{\mathbb{Z}_2} B(G_2) + 2$  となる例になっている.



次に,  $G$  が  $D^2$  の 3 角形分割グラフのときの近傍複体の 2 次以上のホモロジー群について考えよう.  $D^2$  の 3 角形分割において, 長さ 3 の閉道とその内部は次の図のいずれかの形をしているものとする. ただし, 1 番右のグラフの点線部はそこにいくつかの頂点が縦に並んでいるものとし, それらはそれぞれ 1 つ上, 1 つ下の頂点と隣接し, 右と左の頂点とも隣接するものとする.



また、長さ 4 の閉道とその内部は下図の中のいずれかのものか、それらを折り返してできるものと仮定する。ただし、点線部は上の長さ 3 の閉道の 1 番右のグラフと同様であり、これらは点線の両端の頂点を同一視したグラフ (上図の真ん中の点線がないグラフ) にしてもよい。



このように閉道の形に制限をつけると、次のことが成り立つ。

**定理 4.6.**  $D^2$  の 3 角形分割グラフにおいて、 $G$  の長さ 3 と 4 の閉道が上のようなものしか存在しないとき、近傍複体の 2 次以上のホモロジー群について以下が成り立つ。

- (1)  $p \geq 3$  では  $H_p(N(G); \mathbf{Z}) = 0$ .
- (2)  $G$  の内部の頂点に奇数次数のものがあるとき、内部の頂点のうち 4 以外の次数をもつ頂点の個数を  $n$  とすると、 $H_2(N(G); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{2n-1}$
- (3)  $G$  の内部の頂点がすべて偶数次数であるとき、内部の頂点のうち 4 以外の次数をもつ頂点の個数を  $n$  とすると、 $H_2(N(G); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{2n}$

**証明の概略.** 証明は定理 4.4 の証明の中の (i), (ii) の操作をしたときの変化を考える。(2) の場合、つまりグラフの内部の頂点に奇数次数のものがあるときは、奇数次数の頂点の次数を  $n$  として、 $W_n$  を考え、(3) の場合は、 $K_3$  を考えて、(i), (ii) の操作を繰り返すことによりグラフを構成する。(i), (ii) の操作で近傍複体における自然な包含写像から誘導される基本群の準同型が同型なので、1 次ホモロジー群は変わらないことに注意しておこう。つまり、(2) のとき  $H_1(N(G)) = 0$ 、(3) のとき  $H_1(N(G)) \cong \mathbf{Z}$  である。ここで、ホモロジー群の係数は  $\mathbf{Z}$  である。以下も、ホモロジー群の係数は  $\mathbf{Z}$  とする。

さて、(i), (ii) の操作をしたときの 2 次以上のホモロジー群の変化についてであるが、まず、(i) の操作の前後の近傍複体はホモトピー同値なのでホモロジー群も変わらない。次に (ii) の操作前のグラフを  $G$ 、操作後を  $G'$  とする。 $CN_G(a_1) \cup \{a_2\}$  とその辺単体からなる単体複体を  $L_1$  (ここで、 $CN_G$  は  $CN$  を  $G$  で考えたもの)、 $CN_G(a_2) \cup \{a_1\}$  とその辺単体からなる単体複体を  $L_2$  とし、 $K_1 = N(G)$ 、 $K_2 = L_1 \cup L_2$  とする。このとき、 $N(G') = K_1 \cup K_2$

であり,  $K_1, K_2$  に Mayer-Vietori 完全系列を考えることにより  $N(G')$  のホモロジー群を計算する.

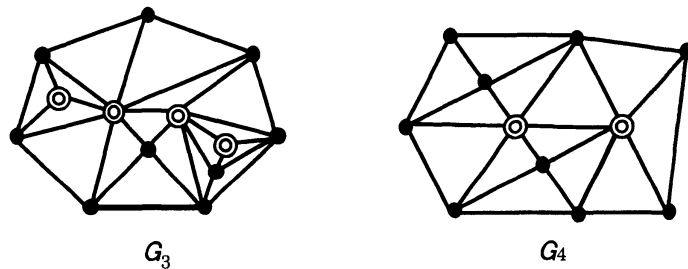
$K_1 \cap K_2 = K_1 \cap (L_1 \cup L_2) = (K_1 \cap L_1) \cup (K_1 \cap L_2)$  で,  $|(K_1 \cap L_1) \cap (K_1 \cap L_2)| = |CN_G(a_1) \cap CN_G(a_2)|$  は可縮であることから,  $K_1 \cap L_1$  と  $K_1 \cap L_2$  のホモロジー群がわかれば,  $K_1 \cap K_2$  のホモロジー群を計算できる.  $K_1 \cap L_1$  は  $CN_G(a_1)$  が1つの単体で, それ以外の単体は,  $a_2 \cup \sigma$  ( $\sigma \subset CN_G(a_1)$ ) という形になっている. したがって,  $H_p(K_1 \cap L_1)$  ( $k \geq 1$ ) の生成元に現れる単体の頂点は,  $a_2$  を除くとグラフ上で  $a_1$  と隣接し  $a_2$  から長さ2の歩道があるようなものに制限することができる. これは,  $G'$  の中で,  $a_1 a_2$  という辺を含む長さ4の閉道上に存在する頂点ということになる.  $K_1 \cap L_2$  でも同様のことがいえて, 結局, 辺  $a_1 a_2$  を含む長さ4の閉道のみを考えれば  $K_1 \cap K_2$  のホモロジー群はわかる.

辺  $a_1 a_2$  を含む長さ4の閉道とその内部が上に挙げたものときに制限すると,  $a_1, a_2$  の両方に隣接する頂点  $a_0$  が新たな内部の頂点になるとき,  $a_0$  の次数が4以外であれば,  $H_p(K_1 \cap K_2)$  は  $p = 1$  で  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ ,  $p \geq 2$  で0となる. (2), (3) いずれの場合も,  $K_1 = N(G)$  と  $N(G')$  の1次ホモロジー群は自然に同型であり,  $|K_2|$  は可縮であることから, Mayer-Vietoris 完全系列を考えると  $H_2(N(G')) \cong H_2(N(G)) \oplus \mathbf{Z}^2$  を得る. また,  $p \geq 3$  では  $H_p(N(G')) = H_p(N(G)) = 0$  である.

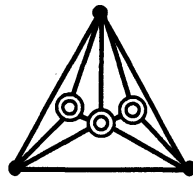
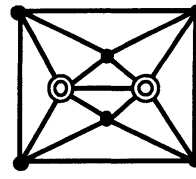
$a_0$  の次数が4のときには,  $H_p(K_1 \cap K_2)$  は  $p = 0$  以外では, 0となり, このときはすべての  $p$  で  $H_p(N(G')) \cong H_p(N(G))$  である.

以上から, (2), (3) いずれの場合も, (ii) の操作を1回するとき, 次数4以外の内点が増えれば2次ホモロジー群のランクが2つ増え, それ以外にホモロジー群の変化はない. (2) の場合 (グラフの内部の頂点に奇数次数のものがあるとき),  $W_n$  ( $n$  は奇数) に (i), (ii) の操作を繰り返してグラフを構成し, (3) の場合は,  $K_3$  に (i), (ii) の操作を繰り返してグラフを構成するが,  $|N(W_n)| \cong S^2$  ( $n$  は奇数),  $|N(K_3)| \cong S^1$  であることより定理の結論を得る. ■

**例.** 下図の  $G_3$  は奇数次数の内部の頂点があり, 4以外の次数をもつ内部の頂点は4個だから, (2) より  $H_2(N(G_3); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^7$ .  $G_4$  は内部の頂点はすべて次数が偶数で, 4以外の次数をもつ内部の頂点は2個だから, (3) より  $H_2(N(G_4); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^4$ .



定理4.6の長さ3と4の閉道の形に関する仮定については, ここで与えたものは強いものであるが, 制限を全くなくすることはできない. 例えば, 次の図の  $G_5$  は内部の頂点に次数4以外の頂点が3個あるが  $H_2(N(G_5); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$  であり,  $G_6$  では内部の頂点に次数4以外の頂点は2個であるが  $H_2(N(G_6); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^5$  である.

 $G_5$  $G_6$ 

## References

- [1] K. Appel, W. Haken, Every planar graph map is four colourable, *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976) 711–712.
- [2] P. Csorba, Homotopy types of box complexes, *Combinatorica.* **27**(2007), 669–682.
- [3] P. Csorba, On the simple  $\mathbf{Z}_2$ -homotopy types of graph complexes and their simple  $\mathbf{Z}_2$ -universality, *Canad. Math. Bull.* 51 (2008), 535–544.
- [4] P. Csorba, Fold and Mycielskian on homomorphism complexes, *Contrib. Discrete Math.* **3** (2008), 1–8.
- [5] P. Csorba, Homotopy types of box complexes of chordal graphs, *European J. Combin.* **31**(2010), 861–866.
- [6] P. Erdős, Graph theory and probability. II. *Canad. J. Math.* **13**(1961), 346–352.
- [7] L. Lovász, On chromatic number of finite set-systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **19**(1968), 59–67.
- [8] L. Lovász, Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy, *J. Combin. Theory Ser. A* 25 (1978) 319–324.
- [9] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem*, Springer, Berlin(2003).
- [10] 長崎生光, 川上智博, 原靖浩, 牛瀧文宏, The Smith homology and a generalized Borsuk-Ulam theorem, *京大数理解析研究所講究録 1670 換群論の新たな展開* 2009年, 34–39
- [11] 中岡 稔, *不動点定理とその周辺*, 岩波書店, 1997年
- [12] R. J. Wilson (西関隆夫, 西関裕子 共訳), *グラフ理論入門 (原書第4版)*, 近代科学社, 2001年