数理解析研究所講究録
第 1922 巻 2014 年 78-83

ルート系から定まるトーリック多様体上の交叉数とヤング図

阿部 拓
大阪市立大学 数学研究所

1 序

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ とは $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間の列の成す空間である.

$$Fl(\mathbb{C}^n)=\{V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_n \mid V_i\text{ は }\mathbb{C}^n\text{ の線型部分空間で }\dim_{\mathbb{C}}V_i=i\}$$

$SL_n(\mathbb{C})$ を n 次の特殊線形群とし, $T\subset SL_n(\mathbb{C})$ を対角成分のみからなる部分群とする. このとき, $SL_n(\mathbb{C})$ は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ に自然に作用し, トーラス T はその制限として作用する. このトーラス作用の一般軌道の閉包はトーリック多様体であることが知られている. このトーリック多様体を X と書く.

旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は n 次置換群 $\mathfrak{S}_n$ の元 w ごとにシューベルト胞体 C_w と呼ばれる胞体をもち, X との共通部分 $X\cap C_w$ を考えるとこれらは X の胞体分割を与える. 今, $X\cap C_w$ の X における閉包を X_w と書くとき, X_w のポアンカレ双対 $[X_w]$ は X の特異コホモロジーの基底を成す : $H^*(X;\mathbb{Z})=\bigoplus_{w\in\mathfrak{S}_n}\mathbb{Z}[X_w]$. そこで, カップ積の展開

$$[X_u][X_v]=\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}c_{uv}^w[X_w]$$

において展開係数 $c_{uv}^w\in\mathbb{Z}$ が現れるが, この数 c_{uv}^w はどのように記述される数だろうか. それについて考えたい. この問題を念頭に置いたうえで, 構造定数 c_{uv}^w と等価な量である交叉数をヤング図で計算する方法について述べる.

2 ルート系から定まるトーリック多様体

E^n を実 n 次元ユークリッド空間とし, $\Phi\subset E^n$ をルート系, W をそのワイル群とする. Φ からトーリック多様体を構成しよう. $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ を Φ の底 (または単純ルートの集合) とすると, その双対基底 $\Pi^*=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ が双対空間 $(E^n)^*$ の中に決まる. 特に

$\omega_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ であり，ω_i は基本コウェイトと呼ばれる．このとき

$$\begin{aligned}\sigma_0 :&= \{f \in (E^n)^* \mid i = 1, \cdots, n \text{ に対し } f(\alpha_i) \geq 0\} \\ &= \{c_1\omega_1 + \cdots + c_n\omega_n \in (E^n)^* \mid i = 1, \cdots, n \text{ に対し } c_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}\end{aligned}$$

とおき，各 $u \in W$ に対し $\sigma_u := u\sigma_0$ と定める．ただし，Weyl 群 W の $(E^n)^*$ への作用は E^n への作用の双対作用で与える．各 σ_u は Weyl の部屋と呼ばれる．各 σ_u は $(E^n)^*$ における錐であり，全ての $u \in W$ について錐 σ_u とその面（これもまた錐である）の集まりを考るとそれは $(E^n)^*$ における扇をなす．ただし，格子点はコウェイト格子 $N := \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\omega_i$ によって与える．この得られた扇を $\Delta(\Phi)$ と書き，この扇に対応するトーリック多様体を $X(\Phi)$ と書くことにする．すなわち，$X(\Phi)$ は Weyl の部屋とコウェイト格子の成す扇に対応するトーリック多様体である．このトーリック多様体 $X(\Phi)$ が実は 1 節に出てきたトーリック多様体 X そのものなのである．すなわち，$X(\Phi)$ は一般化された旗多様体への標準的なトーラス作用の一般軌道の閉包として記述することもできる．$X(\Phi)$ の一般的な性質についてはBatyrev-Blume [2]，Klyachko [4]，Procesi [5] などを参照されたい．

扇において特に 1 次元錐はトーラス作用で不変な複素余次元 1 の部分多様体と 1 対 1 に対応し，トーリック多様体の幾何やトポロジーを記述するうえで重要である．我々の扇 $\Delta(\Phi)$ の場合，1 次元錐の生成元全体はコウェイトの成す集合

$$\Phi^* := \cup_{u \in W}\{u\omega_1, \cdots, u\omega_n\} \subset (E^n)^*$$

で与えられる．扇 $\Delta(\Phi)$ の性質から，トーリック多様体 $X(\Phi)$ はコンパクトで非特異なトーリック多様体であることが従う．$\Delta(\Phi)$ の構成からは明らかではないが，実は $X(\Phi)$ は射影多様体である[1]．また，構成より Weyl 群が $X(\Phi)$ に自然に作用する．

3 $X(\Phi)$ のコホモロジー環

Φ をルート系とし，$X(\Phi)$ を前節で構成したトーリック多様体とする．$X(\Phi)$ を記述する扇 $\Delta(\Phi)$ の 1 次元錐の生成元の集合が $\Phi^* = \cup_{u \in W}\{u\omega_1, \cdots, u\omega_n\}$ であることは 2 節ですでに見た．すなわち，各 $x \in \Phi^*$ ごとに，特性部分多様体と呼ばれる複素余次元 1 の部分多様体 $D_x \subset X(\Phi)$ が定まる．D_x のポアンカレ双対を $\tau_x := [D_x]$ と書くと，$\tau_x \in H^2(X(\Phi); \mathbb{Z})$ である．コンパクトかつ非特異なトーリック多様体の特異コホモロジー環を多項式環の商として記述する方法はよく知られており (Danilov-Jurkiewicz)，我々のトーリック多様体 $X(\Phi)$ の場合には次のように表示される．

$$H^*(X(\Phi); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tau_x \mid x \in \Phi^*]/I$$

ここで，I は次の形の 2 種類の元で生成される $\mathbb{Z}[\tau_x \mid x \in \Phi^*]$ のイデアルである．

(i) $\tau_{x_1} \cdots \tau_{x_k}$ ただし $x_i = u\omega_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ となるような $u \in W$ は存在しない．

[1]旗多様体のある運動量多面体に対応する非特異射影的トーリック多様体である．

(ii) $\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha,x\rangle\tau_x \quad (\alpha\in\Phi)$

さて，ワイル群の元 $u\in W$ に対し，$X(\Phi)$ の部分多様体 X_u が次のようにして定まる．

$$X_u := \bigcap_{\substack{i\in[n] \\ u\alpha_i\in\Phi^-}} D_{u\omega_i}$$

ただし，$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ であり，Φ^- は負ルートの集合である．X_u のポアンカレ双対 $[X_u]$ はコホモロジー環 $H^*(X(\Phi);\mathbb{Z})$ の元を定める．相異なる特性部分多様体 $D_{x_1},\cdots,D_{x_k}$ は横断的に交わるので，$[X_u]$ は次のようにと書くことができる．

$$[X_u] = \prod_{\substack{i\in[n] \\ u\alpha_i\in\Phi^-}} \tau_{u\omega_i} \quad \in H^*(X(\Phi);\mathbb{Z}) \tag{1}$$

命題 3.1. (Klyachko [4], De Mari-Procesi-Shayman [3]) $[X_u]$ 達は $X(\Phi)$ のコホモロジー群の基底を成す：$H^*(X(\Phi);\mathbb{Z})=\bigoplus_{u\in W}\mathbb{Z}[X_u]$.

そこで，カップ積の展開

$$[X_u][X_v] = \sum_{w\in W} c_{uv}^w[X_w] \quad (c_{uv}^w\in\mathbb{Z})$$

において展開係数 $c_{uv}^w\in\mathbb{Z}$ が現れる．この係数 c_{uv}^w はコホモロジー環 $H^*(X(\Phi);\mathbb{Z})$ の（基底 $\{[X_w]\}_{w\in W}$ に関する）構造定数と呼ばれる．序説にも書いたが，構造定数 c_{uv}^w がどのように記述されるかを調べたい．

少し間接的にはなるが，一つの方法として交叉数を用いる方法がある．$X(\Phi)$ のホモロジー基本類を $\mu_{X(\Phi)}$ と書くとき，ホモロジーとコホモロジーのペアリング $(\ ,\ )$ を用いて $X(\Phi)$ における Y^w, X_u, X_v の交叉数を

$$I_{uv}^w := (\mu_{X(\Phi)}, [Y^w][X_u][X_v]) \in \mathbb{Z}$$

により定める．ただし，$Y^w := w_0X_{w_0w}$ であり，$w_0\in W$ は最長元である．サイズが $|W|$ の行列 $\mathcal{I}$ を $\mathcal{I}_{uv}=(\mu_{X(\Phi)},[Y^u][X_v])$ で定めると，構造定数 c_{uv}^w と交叉数 I_{uv}^w の間に次の関係があることが従う．

$$I_{uv}^w = \sum_{w'\in W}\mathcal{I}_{ww'}c_{uv}^{w'} \ , \qquad c_{uv}^w = \sum_{w'\in W}(\mathcal{I}^{-1})_{ww'}I_{uv}^{w'} \tag{2}$$

このようにして構造定数 c_{uv}^w と交叉数 I_{uv}^w は可逆な線形変換で結びついており[2]，この意味で両者は等価な量であると言える．(1) 式により，交叉数 I_{uv}^w の計算は特性部分多様体の交叉数の計算に帰着される．そこで，次節では特性部分多様体の交叉数をヤング図を用いて計算する方法について述べる．

[2]行列 $\mathcal{I}$ は上三角行列と思うことができ，必要なら逆行列を $\mathcal{I}$ の言葉で具体的に書き下すこともできる．

4　交叉数とヤング図

この節では特性部分多様体の交叉数のヤング図を用いた計算について説明する．A_n 型についてのみ解説するが，他の古典型ルート系 B, C, D 型の場合も同様な議論を進めていくことができる（[1]）．

2節で述べたように，扇 $\Delta(\Phi)$ の1次元錐の生成元の集合は $\Phi^* = \cup_{u \in \mathfrak{S}_{n+1}} \{u\omega_1, \cdots, u\omega_n\}$ である．今，$[n+1] = \{1, 2, \cdots, n+1\}$ とするとき，

$$\Phi^* \to \{S \subset [n+1] \mid \emptyset \subsetneq S \subsetneq [n+1]\} \quad ; \quad u\omega_i \ \mapsto \ \{u(1), \cdots, u(i)\}$$

という全単射が定義され，これによって Φ^* は $[n+1]$ の空でない真部分集合全体と同一視される．すなわち，$\emptyset \subsetneq S \subsetneq [n+1]$ ごとに $D_S \subset X(A_n)$ という特性部分多様体が定まっているとしてよい．3節で導入した記号にならって，D_S のポアンカレ双対を $\tau_S \in H^2(X(A_n); \mathbb{Z})$ と書く．このとき，3節で述べた $X(A_n)$ のコホモロジー環における関係式 (i) は

$$\text{（適当な入れ替えの下で）} S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k \text{となっていなければ } \tau_{S_1}\tau_{S_2}\cdots\tau_{S_k} = 0$$

と言い換えることができる．これは，この主張の仮定が成り立っていなければそもそも特性部分多様体 $D_{S_1}, D_{S_2}, \cdots, D_{S_k}$ 達が $X(A_n)$ において交わらないということからくる関係式である．

さて，$X(A_n)$ への Weyl 群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ の作用に着目すると次の補題が得られる．

補題 4.1. $\emptyset \subsetneq S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subsetneq [n+1]$ および $\emptyset \subsetneq S'_1 \subset S'_2 \subset \cdots \subset S'_n \subsetneq [n+1]$ とする．このとき，$i = 1, \cdots, n$ について $|S_i| = |S'_i|$ ならば，次が成り立つ．

$$(\mu_{X(\Phi)}, \tau_{S_1} \cdots \tau_{S_n}) = (\mu_{X(\Phi)}, \tau_{S'_1} \cdots \tau_{S'_n})$$

この補題は特性部分多様体 $D_{S_1}, D_{S_2}, \cdots, D_{S_n}$ が非自明に交わっている場合にその交叉数 $(\mu_{X(\Phi)}, \tau_{S_1} \cdots \tau_{S_n})$ が数の組 $|S_1| \leq |S_2| \leq \cdots \leq |S_n|$ のみで決まってしまうことを意味する．すなわち，$\lambda = (|S_n| \geq |S_{n-1}| \geq \cdots \geq |S_1|)$ をヤング図と思うとき，交叉数 $(\mu_{X(\Phi)}, \tau_{S_1} \cdots \tau_{S_n})$ はヤング図 λ の言葉で述べられるはずである．

そこで，交叉数の計算のために，ヤング図に値をとる関数を考える．今 λ を n 行からなるヤング図とし，各行の箱の個数は n 以下であるとする．λ の凸な角の数を s と置く．すなわち $s = |\{i \in [n] \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\}|$．ここで，$\lambda_{n+1} = 0$．凸な角を与える行の番号の集合を次のように書く．

$$\{i \in [n] \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\} = \{i_1, \cdots, i_s\}$$

ただし $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ とする．特に $i_s = n$．各 $r = 1, \cdots, s$ に対し，次のように定める．

$$a_r := i_r - i_{r-1} - 1, \quad b_r := \lambda_{i_r} - \lambda_{i_{r+1}} - 1, \quad c_r := \lambda_{i_r} + i_r - n - 1$$

ここで，$0 \leq y \leq x$ でなければ $\binom{x}{y} = 0$ と約束する．これらの数の図形的な意味は比較的単

純である（図1）．実際，ヤング図λの（右上から）r番目の凸な角の箱を黒く塗っておくと，a_rは黒箱とその上側にある凹な角までの間にある箱の数であり，b_rは黒箱とその左側にある凹な角までの間にある箱の数であり，c_rは反対角線との交点と黒箱の間にある箱の数である．これらの数はヤング図と反対角線を実際に書けば簡単に数えることができる．

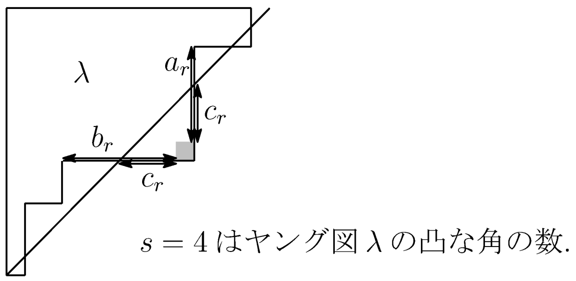

図 1: a_r, b_r, c_r の図形的な意味

今，各$r=1,\cdots,s$に対して（すなわちλの各凸角に対して）

$$y_r := \binom{a_r}{c_r}\binom{b_r}{c_r}$$

と置き，$I(\lambda)$を次のように定める．

$$I(\lambda) := (-1)^{n-s} y_1 \cdots y_s$$

次に述べる主結果により，特性部分多様体の交叉数はヤング図を用いて計算される．

定理 4.2. ([1]) $\emptyset \subsetneq S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subsetneq [n+1]$とするとき，

$$\left(\mu_{X(A_n)}, \tau_{S_1} \cdots \tau_{S_n}\right) = I(\lambda)$$

ここでλはヤング図$(|S_n| \geq |S_{n-1}| \geq \cdots \geq |S_1|)$であり，$\mu_{X(A_n)}$は$X(A_n)$の基本類である．

詳細は[1]に譲るが，Y^w, X_u, X_vの交叉数I_{uv}^wは次のようにしてヤング図を用いて計算される．まずY^w, X_u, X_vが交わっていなければ交叉数は0なので，これらは非自明に交わっているとしてよい（そのための必要十分条件はu, v, wの言葉で述べることができる）．また，コホモロジー類$[Y^w], [X_u], [X_v]$の次数の和は$2n$としてよい（そうでなければやはり交叉数は0）．$[X_u]$の記述式(1)により積$[Y^w][X_u][X_v]$はn個のτ_S達の積として表されるので，交叉数を計算するためのヤング図λ_{uv}^wが定まる（λ_{uv}^wはw, u, vのみから組み合わせ論的に定義できる）．そこで値$I(\lambda_{uv}^w)$を計算すれば，それがすなわちY^w, X_u, X_vの交叉数I_{uv}^wを与えるのである．さらに，(2)式を用いることで構造定数c_{uv}^wも（逆行列を含むので計算は一般に複雑であるが）ヤング図を用いて計算することができる．

参考文献

[1] H. Abe, *Young diagrams and intersection numbers for toric manifolds associated with Weyl chambers*, preprint, arXiv:1404.3805.

[2] V. Batyrev and Mark Blume, *The functor for toric varieties associated with Weyl chambers and Losev-Manin moduli spaces*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 581-604.

[3] F. De Mari, C. Procesi and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529-534.

[4] A. Klyachko, *Orbits of a maximal torus on a flag space*, Functional Anal. Appl. **19** (1985), no. 2, 65-66.

[5] C. Procesi, *The toric variety associated to Weyl chambers*, Mots, 153-161, Lang. Raison. Calc., Hermès, Paris, 1990.