数理解析研究所講究録
第 1922 巻 2014 年 90-95

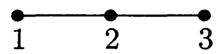
グラフから構成されるスピントーリック多様体*

大阪市立大学・理学研究科† 畑中　美帆
Miho Hatanaka
Department of Mathematics, Faculty of Sciences
Osaka City University

§1. グラフからのトーリック多様体の構成

この節では，グラフからトーリック多様体を構成する方法を紹介する．この報告書では、グラフ G を $n+1$ 頂点の有限単純グラフ，その頂点集合を $V(G)=\{1,2,\ldots,n+1\}$ とする．グラフ G に対して集合 $B(G)$ を，グラフ G を I に制限した時に連結グラフになるような $V(G)$ の部分集合 I の集合とする．ただし，空集合 $\emptyset$ は $B(G)$ に含めない．

例 1 以下のパスグラフ P_3 を考える．



この P_3 に対し，$B(G)$ は以下のようになる．

$$B(G)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

$B(G)$ の各元の中括弧を省略して，以下のように簡略化して表す．

$$B(G)=\{1,2,3,12,23,123\}.$$

次に，$B(G)$ から graph associahedron $P_{B(G)}$ を以下のように定義する．

$$P_{B(G)}=\sum_{I\in B(G)}\Delta_I\subset\mathbb{R}^{n+1}$$

* 出典：「変換群の位相幾何と代数構造」数理解析研究所講究録.
† 〒558-8585 大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138

ここで，和の記号はミンコフスキー和を意味し，Δ_I は $\{e_i \mid i \in I\}$ の convex hull, $e_1,\dots,e_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底である．$P_{B(G)}$ は Delzant polytope になり，グラフ G が連結の時 $\mathbb{R}^{n+1}$ のある超平面上にある n 次元の多面体になる ([3]).

グラフ G が k 個の連結成分を持つとすると，グラフ G は k 個の連結グラフ $G_1,\dots,G_k$ の非交和である．各連結グラフ G_i の頂点の数を v_i+1 とする．この時 graphical building set $B(G)$ は各連結グラフの graphical building set $B(G_i)$ の非交和になり，graph associahedron $P_{B(G)}$ は各連結グラフの graph associahedron $P_{B(G_i)}$ の直積になっている．ここで，$P_{B(G)}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれており，各 i に対して $P_{B(G_i)}$ は $\mathbb{R}^{v_i+1}$ に埋め込まれている．さらに $v_1+\cdots+v_k+k=n+1$ が成り立つ．各 i に対して，射影 $\pi_{G_i}:\mathbb{R}^{v_i+1}\to\mathbb{R}^{v_i}$ を $(\mathbf{x},x)\mapsto\mathbf{x}$ で定義し，射影 $\pi_G:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1-k}=\mathbb{R}^{v_1+\cdots+v_k}$ を $(\mathbf{x}_1,x_1,\dots,\mathbf{x}_k,x_k)\mapsto(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k)$ で定義する．この時，

$$\pi_G(P_{B(G)})=\pi_{G_1}(P_{B(G_1)})\times\cdots\times\pi_{G_k}(P_{B(G_k)})\subset\mathbb{R}^{v_1+\cdots+v_k}. \tag{0.1}$$

$\pi_G(P_{B(G)})$ の各 facet に，facet vector を対応させる写像を $\lambda_{B(G)}$ とする．

グラフ G が連結の時，$\pi_G(P_{B(G)})$ と $\lambda_{B(G)}$ を組合せ論的に求めることができる．まず $n+1$ 頂点の連結グラフ G に対して $B(G)$ を求める．n 次元の単体を一つとり，各 facet にグラフの頂点 $1,\dots,n+1$ を対応させる．頂点 i に対応する facet を F_i で表す．$B(G)$ の $I=1\dots n+1$ を除く各元 $I=i_1\dots i_k$ に対して，face $F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k}$ を切り，新しくできた facet に $I=i_1\dots i_k$ を対応させる．従って，graphical building set $B(G)$ の $V(G)$ を除く各元に対して facet が対応する．この方法でできた多面体は $\pi_G(P_{B(G)})$ になる．$\lambda_{B(G)}$ は以下のようにして決める．

$$\lambda_{B(G)}(F_I)=\sum_{i\in I}v_i.$$

ここで，$v_i=e_i\ (i=1,\dots,n)$, $v_{n+1}=-e_1-\cdots-e_n$ とする．

あとは [1] の方法で（実）トーリック多様体 $M(G)$ $(M_{\mathbb{R}}(G))$ が構成できる．

グラフ G が k 個の連結グラフ $G_1,\dots,G_k$ の非交和の時，(0.1) よりトーリック多様体 $M(G)$ は直積 $M(G_1)\times\cdots\times M(G_k)$ に微分同相になる．同様に実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(G)$ は直積 $M_{\mathbb{R}}(G_1)\times\cdots\times M_{\mathbb{R}}(G_k)$ に微分同相になる．

§2. グラフに対応するスピントーリック多様体

グラフ G から構成できるトーリック多様体 $M(G)$ にスピン構造が入るかどうかと，実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(G)$ が向き付け可能かどうかを判定するために，以下の命題を使

う．P を m 個の facets を持つ単純凸多面体，λ を P 上の characteristic function，λ' を λ と modulo 2 で合同な写像とする．(P,λ) から [1] の方法で構成される擬トーリック多様体を $M(P,\lambda)$，small cover を $M_{\mathbb{R}}(P,\lambda)$ とする．

命題 2 以下の 3 つは同値である．
(1) $M(P,\lambda)$ がスピン構造を持つ．
(2) $M_{\mathbb{R}}(P,\lambda')$ が向き付け可能である．
(3) $\epsilon(\lambda'(\mathbf{F}))=\{1\}$ となる $\mathbb{Z}_2^n$ から $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ への準同型写像 ϵ が存在する．ここで，$\mathbf{F}$ は単純凸多面体 P の facets の集合とする．

(2) と (3) の同値については [2] により証明されている．

単純凸多面体の face cut は対応するトーリック多様体の blow-up に対応する．詳しくは，F を単純凸多面体 P の k 個の facets $F_1,\dots,F_k$ の交わりである余次元 k の face とする．各 facet F_i のラベルを $\lambda(F_i)$ とする．face F を切ると，新しい facet ができ，その facet のラベルを $\lambda(F_1)+\cdots+\lambda(F_k)$ で決める．このようなラベル付き単純凸多面体に対応する擬トーリック多様体は，元の単純凸多面体に対応する擬トーリック多様体を face F に対応する部分多様体で blow-up したものになる．

有限単純グラフ G から構成されるトーリック多様体 $M(G)$ にスピン構造が入るかどうかと実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(G)$ の向き付け可能性について述べる．以下しばらくグラフ G が連結であることを仮定する．

例 3
(1) グラフ G が 1 点からなるグラフの時，対応するトーリック多様体と実トーリック多様体はともに 1 点である．これにはスピン構造が入り，向き付け可能と決める．
(2) グラフ G が 2 点からなる連結グラフの時，$\pi_G(P_{B(G)})$ は 1-simplex であり，対応するトーリック多様体は $\mathbb{C}P^1$，実トーリック多様体は $\mathbb{R}P^1$ である．命題 2 より，$\mathbb{C}P^1$ にはスピン構造が入り，$\mathbb{R}P^1$ は向き付け可能である．

定理 4 G を $n+1$ 個の頂点を持つ連結グラフとする $(n\geq 2)$．この時，トーリック多様体 $M(G)$ にはスピン構造は入らず，実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(G)$ は向き付け不可能である．

グラフ G が非連結の場合を考える．グラフ G が連結グラフ $G_1,\dots,G_k$ の非交和とすると，トーリック多様体 $M(G)$ は $M(G_1),\dots,M(G_k)$ の直積と微分同相になる．

補題 5 多様体 M が多様体 $M_1,\dots,M_k$ の直積に微分同相とする．

(1) M にスピン構造が入るための必要十分条件は，各 i に対して M_i にスピン構造が入ることである．
(2) M が向き付け可能であるための必要十分条件は，各 i に対して M_i が向き付け可能であることである．

補題 5 から以下の定理が成り立つ．

定理 6 G を有限単純グラフとする．
(1) $M(G)$ にスピン構造が入るための必要十分条件は $M(G)$ が $(\mathbb{C}P^1)^k$ に微分同相であることである．
(2) $M_{\mathbb{R}}(G)$ が向き付け可能であるための必要十分条件は $M_{\mathbb{R}}(G)$ が $(\mathbb{R}P^1)^k$ に微分同相であることである．
さらにこの時のグラフは，k 個の 2 頂点からなる連結グラフと有限個の 1 点からなるグラフの非交和である．

§3. Building set に対応するスピントーリック多様体

前節では，グラフから構成されるトーリック多様体にスピン構造が入るかどうかと実トーリック多様体の向き付け可能性について調べたが，この節では building set から構成されるトーリック多様体にスピン構造が入るかどうかと実トーリック多様体の向き付け可能性について述べる．building set から第 2 節で述べた方法で (実) トーリック多様体を構成することができる．

定義 7 S を有限集合とする．B が S 上のある building set であるとは，B が以下の (1),(2) を満たす，空でない S の部分集合の集合である．
(1) 各 i に対して $\{i\}$ が B の元である．
(2) B の元 I, J の交わりがあれば，I と J の和集合は B の元である．
全体集合 S が B の元である時，B を連結な building set という．

graphical building set は building set であるので，building set から構成できるトーリック多様体の方が graph から構成できるトーリック多様体よりも多い．さらに building set B からできる単純凸多面体 P_B は nestohedron という．

例 8
(1) $S = \{1\}$ とする．S 上の building set B は $\{1\}$ しかないので，nestohedron P_B は 1

点である．従って，(実) トーリック多様体 $M(B)$ ($M_{\mathbb{R}}(B)$) は 1 点である．

(2) $S=\{1,2\}$ とする．S 上の building set B は $\{1,2\}$ か $\{1,2,12\}$ しかない．B が $\{1,2\}$ の時，nestohedron P_B は 1 点なので，(実) トーリック多様体 $M(B)$ ($M_{\mathbb{R}}(B)$) は 1 点である．B が $\{1,2,12\}$ の時，nestohedron P_B は 1 単体であるので，トーリック多様体は $\mathbb{C}P^1$，実トーリック多様体は $\mathbb{R}P^1$ である．

(3) $S=\{1,2,3\}$ とする．S 上の building set B は本質的に次の 6 つある．

$$\{1,2,3\},\ \{1,2,3,12\},\ \{1,2,3,12,23,123\},\ \{1,2,3,12,23,31,123\},$$

$$\{1,2,3,123\},\ \{1,2,3,12,123\}.$$

それぞれの nestohedron P_B は 1 点，1 単体，5 角形，6 角形，2 単体，4 角形である．最後の building set からできる λ_B の像は $\{e_1,e_2,-e_1-e_2,e_1+e_2\}$. 従って，それぞれの building set からできるトーリック多様体 $M(B)$ は 1 点，$\mathbb{C}P^1,\mathbb{C}P^2\sharp 2\overline{\mathbb{C}P^2},\mathbb{C}P^2\sharp 3\overline{\mathbb{C}P^2},\mathbb{C}P^2,\mathbb{C}P^2\sharp\overline{\mathbb{C}P^2}$. 実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(B)$ は 1 点，$\mathbb{R}P^1,3\mathbb{R}P^2,4\mathbb{R}P^2,\mathbb{R}P^2,2\mathbb{R}P^2$. 最後の 2 つはグラフからは構成できない．

以下しばらく building set が連結であることを仮定する．

定理 9 S を $n+1$ 個の元を持つ有限集合 $\{1,2,\ldots,n+1\}$，B を S 上のある連結な building set とする．この時以下の 3 つは同値である．

(1) $M(B)$ にスピン構造が入る．

(2) $M_{\mathbb{R}}(B)$ が向き付け可能である．

(3) $M(B)$ の複素次元 n が奇数で，$B\backslash\{S\}$ の任意の元 X の位数が奇数である．

以下，building set が連結であることを仮定しない．

S を $n+1$ 個の元を持つ集合，B を S 上のある非連結な building set とする．この時 B は連結な building sets $B_1,\ldots,B_k$ の非交和である．各 i に対して B_i は v_i+1 個の元を持つ有限集合 S_i 上のある連結な building set とする．さらに S は $S_1,\ldots,S_k$ の非交和であり，以下が成り立つ．

$$v_1+\cdots+v_k+k=n+1.$$

非連結グラフから graph associahedron を構成した時と同様に，nestohedron P_B は各 nestohedrons P_{B_i} の直積になっている．ここで，P_B は $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれており，各 P_{B_i} は $\mathbb{R}^{v_i+1}$ に埋め込まれている．各 i に対して，射影 $\pi_i:\mathbb{R}^{v_i+1}\to\mathbb{R}^{v_i}$ を $(\mathbf{x},x)\mapsto\mathbf{x}$ で定義し，射影 $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1-k}=\mathbb{R}^{v_1+\cdots+v_k}$ を $(\mathbf{x_1},x_1,\ldots,\mathbf{x_k},x_k)\mapsto(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_k})$

で定義する．この時，以下が成り立つ．

$$\pi(P_B) = \pi_1(P_{B_1}) \times \cdots \times \pi_k(P_{B_k}) \subset \mathbb{R}^{v_1+\cdots+v_k}.$$

従って，トーリック多様体 $M(B)$ は直積 $M(B_1) \times \cdots \times M(B_k)$ に微分同相になる．同様に実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(B)$ は直積 $M_{\mathbb{R}}(B_1) \times \cdots \times M_{\mathbb{R}}(B_k)$ に微分同相になる．

補題 5 から以下の定理が成り立つ．

定理 10 S を有限集合，B を S 上の building set とする．さらに，B は連結な building sets $B_1, \ldots, B_k$ の非交和とし，各 i に対して B_i は有限集合 S_i 上の building set とする．この時，次の 3 つは同値．

(1) $M(B)$ にスピン構造が入る．

(2) $M_{\mathbb{R}}(B)$ は向き付け可能である．

(3) 各 building set B_i が以下のどちらかを満たす．

(I)B_i の位数が 1．

(II) トーリック多様体 $M(B)$ の複素次元 n が奇数であり，$B_i \backslash \{S_i\}$ の任意の元 X_i の位数が奇数である．

注意 11 トーリック多様体の 1 次のコホモロジー群は自明である．従って，トーリック多様体にもしスピン構造が入ったとすると，それは一つだけである．

参考文献

[1] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 62 (1991), 417-451.

[2] H. Nakayama and Y. Nishimura, *The orientability of small covers and coloring simple polytopes*, Osaka J. Math. 42 (2005), 243-256.

[3] A. Zelevinsky, *Nested complexes and their polyhedral realizations*, Pure and Applied Mathematics Quarterly volume 2, no. 3 (2006), 655-671.