数理解析研究所講究録
第 1922 巻 2014 年 124-129

非有向曲面におけるデーン・ツイスト、ゴールドマン・リー代数とスケイン加群
DEHN TWISTS, GOLDMAN LIE ALGEBRAS AND SKEIN MODULES ON NONORIENTABLE SURFACE

東京大学・数理科学研究科 辻俊輔
SHUNSUKE TSUJI
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
THE UNIVERSITY OF TOKYO

F を境界が空でないコンパクトな非有向曲面とする。$x_0 \in \partial F$ を固定する。

$p:\tilde{F}\to F$ を orientation covering とする。次の図 1 のようにとれる。

図 1 のように $\tilde{F}$ に $\delta_1,\delta_2\ldots\delta_n,\delta'_1,\delta'_2\ldots\delta'_n$ の線分を固定する。任意の $i=1,2\ldots n$ で $p(\delta_i)=p(\delta'_i)$ とする。$\tilde{F}$ に向きを入れる。これらの線分で切った $\tilde{F}$ の左側を F^u 右側を F^d とする。x_0 の p のリフトを $x_0^u\in F^u, x_0^d\in F^d$ とする。また、$F\backslash\cup_{i=1}^n p(\delta_i)$ を F^u と同一視し、向きを入れる。

$\pi_1(F,x_0)=\pi$ を x_0 を基点とした F の基本群とする。$\hat{\tilde{\pi}}_1(\tilde{F})=\hat{\tilde{\pi}}$ を $\tilde{F}$ の free loop の free homotopy class 全体の集合とする。$\mathbb{Q}\pi$ を $\mathbb{Q}$ による π の群環とする。$\mathbb{Q}\hat{\tilde{\pi}}$ を $\hat{\tilde{\pi}}$ を free basis とした $\mathbb{Q}$ 加群とする。$\mathbb{Q}\hat{\tilde{\pi}}$ にはゴールドマン・リー代数の構造が入る。

有向曲面において、ゴールドマン・リー代数が基本群の群環に作用する。また、その作用は完備ゴールドマン・リー代数の基本群の完備群環への作用に拡張することができる。さらに、その作用によりデーン・ツイストの表示がされた([2] [3] [4] を参照)。本講演では非有向曲面において、基本群の群環に作用するリー代数を定義する。また、そのリー代数は基本群の完備群環への作用に拡張できるが、非有向曲面におけるデーン・ツイストの表示をする。

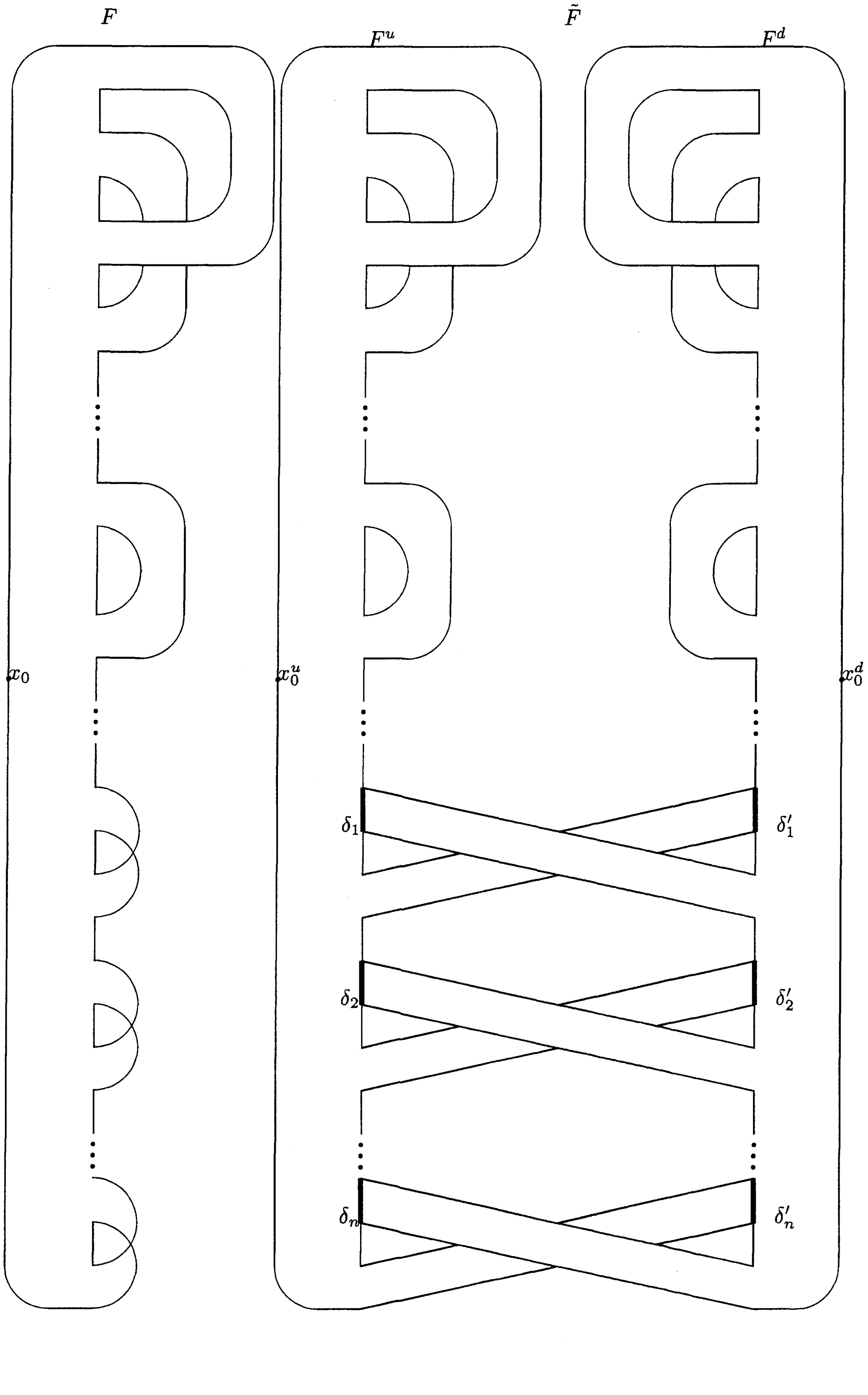

FIGURE 1. orientation cover

$\theta : \mathbb{Q}\hat{\hat{\pi}} \to \mathbb{Q}\hat{\hat{\pi}}$ を $\frac{1}{2}(id - \tau)$ と定義する。$\tilde{\sigma}$ を次のように定義する。

定義 1 ([5] [2]). $x \in \pi$ および $y \in \hat{\hat{\pi}}$ について、$\tilde{\sigma}(y)(x) \in K\pi$ を次のように定義する。$x \in \pi$ および $y \in \hat{\hat{\pi}}$ の代表を *general position* にとる

$$\tilde{\sigma}(y)(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{q \in p(y \cap F^u) \cap x} \varepsilon(q, p(y), x) x_{x_0 q} (p(y))_q x_{q x_0} - \sum_{q \in p(y \cap F^d) \cap x} \varepsilon(q, p(y), x) x_{x_0 q} (p(y))_q x_{q x_0} \Big).$$

ただし、$\varepsilon(q, p(y), x)$ は、$p(y)$ と x における p の $F \backslash \cup_{i=1}^{n} p(\delta_i)$ 上の *local intersection number* とする。$(p(y))_q$ は、$p(y)$ に沿った、$\pi_1(F, q)$ の元とする。$x_{x_0 q}$ は、x の q から、x_0 の部分的な *path*、$x_{q x_0}$ は、x の x_0 から、p の部分的な *path* とする。

この定義は次の補題で言い換えることができる。

補題 2. $r \in \pi$ について、$p : \tilde{F} \to F$ のリフトを $\tilde{r}$ とする。$y \in \mathbb{Q}\hat{\hat{\pi}}$ について、

$$\tilde{\sigma}(y)(r) = p(\sigma(\theta(y))(\tilde{r})$$

が成り立つ。右辺はゴールドマン・リー代数の基本群への作用 *(*河澄、久野 [2]*)* である。

これは $\mathbb{Q}\hat{\hat{\pi}}$ のリー代数としての作用になっていないが、部分リー代数 $\theta(\mathbb{Q}\hat{\hat{\pi}}) \subset \mathbb{Q}\hat{\hat{\pi}}$ のリー代数としての作用になっている。$\tilde{F}$ の完備ゴールドマン・リー代数を $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\hat{\pi}}}$、$\pi$ の $\mathbb{Q}$ 上完備群環を $\widehat{\mathbb{Q}\pi}$ とする。$\tilde{\sigma}$ は $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\hat{\pi}}}$ の $\widehat{\mathbb{Q}\pi}$ への作用に拡張できる。

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ として $\mathbb{R}$ から定まる向きを入れる。また、annulus を $S^1 \times I (I = [0,1])$ とする。積多様体として自然に向きを入れる。$S^1 \times I \to S^1 \times I : (s,t) \mapsto (s+t, t)$ を annulus の (右手) デーン・ツイストとする。F の A-s.c.c.(annulus simple connected curve) とは S^1 の埋め込み（の像）で管状近傍が annulus と同相のものである。annulus circle の管状近傍を A と向きも含めて定める。この時 $t_A : F \to F$ を A でデーン・ツイストして $F\backslash A$ では恒等写像となる自己同相写像とする。$\log(t_A) : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \to \widehat{\mathbb{Q}\pi}$ を次のように定義する

$$\log(t_A)(r) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}(id - t_A)^i(r).$$

$(\log(x))^2 = \sum_{i=2}^{\infty} a_i(x-1)^i$ とする。このとき r を $\tilde{F}$ の基本群の元として $(\log(r))^2 = \sum_{i=2}^{\infty} a_i(r-1)^i$ と定義する。さらに $L(r) = c((\log(r))^2) \in \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}$ と定義する。ただし、c は基点を忘れる写像である。

次の定理でデーン・ツイストの表示を与える。

定理 3 ([5]). $\tilde{F}$ の基本群の元 r を $p(c(r))$ が、S^1 の埋め込みで代表がとれるとする。（自己交差がない。）この時 $p(c(r))$ は A-$s.c.c.$ である。$c(r)$ の管状近傍の向きを $\tilde{F}$ の部分多様体として定める。p を $c(r)$ の管状近傍に制限した写像は $p(c(r))$ の管状近傍の向きを導入する。これを A とする。この時

$$\log(t_A)(\cdot) = \tilde{\sigma}(\theta(L(r)))(\cdot) : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \to \widehat{\mathbb{Q}\pi}$$

を得る。

さらに $e^{\tilde{\sigma}(L)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\tilde{\sigma}(L))^k$ と定義して、

$$t_A = e^{\tilde{\sigma}(L)} : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \to \widehat{\mathbb{Q}\pi}$$

を得る。

以下では [6] の意味で、作用 $\tilde{\sigma}$ はスケイン代数により量子化ができることを説明する。F の基本群の共役類の集合を $\hat{\pi}$ と書き、それを自由基底とした $\mathbb{Q}$ 自由加群を $\mathbb{Q}\hat{\pi}$ と書く。次の式で $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}$ の作用を $\mathbb{Q}\hat{\pi}$ の作用に拡張する

$$\tilde{\sigma}(y)(c(x)) = c(\tilde{\sigma}(y)(x)).$$

3次元多様体Eを$\tilde{F}\times I$において任意の$(x,t)\in\tilde{F}\times[0,1]$で$(x,t)$と$(\tau(x),1-t)$が同一の元であるとみなした3次元多様体とする。ただし、Iを閉区間$[0,1]$とする。全射$f':E\to F$を$f([(x,t)])=p(x)$と定義する。また全射$f:\tilde{F}\times I\to\tilde{F}$を第一成分への射影とする。

スケイン加群$\mathcal{A}(E)$および$\mathcal{A}(\tilde{F}\times I)$を[6] 3.1と同じ方法で定義する。さらに$A(E)$および$A(\tilde{F}\times I)$を次で定義する

$$A(E)=\mathcal{A}(E)/(x-1)\mathcal{A}(E),$$
$$A(\tilde{F}\times I)=\mathcal{A}(\tilde{F}\times I)/(x-1)\mathcal{A}(\tilde{F}\times I).$$

また、E（または$\tilde{F}\times I$）のリンクL_1が代表の$A(E)$（または$A(\tilde{F}\times I)$）の元を$[L_1]$と定義する。

埋め込み$i_1:\tilde{F}\times I\to E$を$i_1((x,t))=[(x,(t+2)/3)]$と定義する。埋め込み$i_2:E\to E$を$i_2([(x,t)])=[(x,(1+t)/3)]$と定義する。$\tilde{F}\times I$のリンク$L_1$,$E$のリンク$L_2$について、$L_1L_2$を$i_1(L_1)\cup i_2(L_2)$と定義する。これにより、$A(\tilde{F}\times I)$の$A(E)$への作用を定義する。

$\mathcal{K}(E),\mathcal{K}(\tilde{F}\times I)$を$E$のノットの集合$\tilde{F}\times I$の集合とする。$\mathbb{Q}\mathcal{K}(E),\mathbb{Q}\mathcal{K}(\tilde{F}\times I)$をそれぞれを自由基底とした$\mathbb{Q}$加群とする。

$\mathbb{Q}$加群準同型p_1,p_2,p'_1,p'_2を次で定義する

$$p_1:\mathbb{Q}\tilde{\mathcal{F}}\times\mathcal{I}\to\mathbb{Q}\hat{\pi},K\in\mathcal{K}(\tilde{F}\times I)\mapsto f(K),$$
$$p_2:\mathbb{Q}\tilde{\mathcal{F}}\times\mathcal{I}\to A(\tilde{F}\times I),K\in\mathcal{K}(\tilde{F}\times I)\mapsto[K],$$
$$p'_1:\mathbb{Q}\mathcal{E}\to\mathbb{Q}\hat{\hat{\pi}},K\in\mathcal{K}(E)\mapsto f'(K),$$
$$p'_2:\mathbb{Q}\mathcal{E}\to A(E),K\in\mathcal{K}(E)\mapsto[K].$$

同相写像$\tau':\tilde{F}\times I\to\tilde{F}\times I,(x,t)\mapsto(\tau(x),1-t)$を定義しておく。

この時次の命題が成り立つ。

命題 4. 任意の $x \in \mathcal{K}(\tilde{F} \times I), y \in \mathcal{K}(E)$ について次の式を満たす $z \in \mathcal{K}(E)$ が存在する

$$\tilde{\sigma}(p_1(x))(p_1'(y)) = p_1'(z),$$
$$\frac{1}{2}(p_2(x) - \tau(p_2(x)))(p_2'(y)) = hp_2'(z) \mod h\hbar A(E).$$

References

[1] W. M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian ows of surface groups representations*, Invent. Math. 85,263-302(1986).

[2] N. Kawazumi and Y. Kuno, *The logarithms of Dehn twists, to appear in: Quantum Topology*, preprint, arXiv: 1008.5017 (2010).

[3] N. Kawazumi and Y. Kuno, *Groupoid-theoretical methods in the mapping class groups of surfaces*, preprint, arXiv: 1109.6479 (2011).

[4] G.Massuyeau and V. Turaev, *Fox pairings and generalized Dehn twists*, preprint, arXiv:1109.5248v3(2012) to appear in Ann. Inst. Fourier.

[5] S. Tsuji, *The logarithms of Dehn twists on non-orientable surfaces*, preprint, arXiv:1405.2161(2014)

[6] Turaev, V. G., *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 24 (1991), no. 6