数理解析研究所講究録
第1922巻2014年130-134

対角部分空間配置のホモトピー分解
Homotopy decomposition of diagonal arrangements

京都大学理学研究科 岸本大祐*
Daisuke Kishimoto
Department of Mathematics, Kyoto University

1 主定理

本稿では入江幸右衛門さんとの共同研究 [IK] について述べる．空間 X を固定する．部分集合 $\sigma \subset [m] = \{1, \ldots, m\}$ に対して定まる X^m の部分空間

$$\Delta_\sigma(X) = \{(x_1, \ldots, x_m) \in X^m \mid x_{i_1} = \cdots = x_{i_k}, \{i_1, \ldots, i_k\} = [m] - \sigma\}$$

を X^m の対角部分空間という．対角部分空間の配置を考えるのだが, 配置方法を組み合わせ的に記述するのが便利である．以下，K を頂点集合を $[m] = \{1, \ldots, m\}$ とする抽象単体複体とする．ただし，空部分集合は常に K に属する．単体複体 K に対して対角部分空間配置

$$\{\Delta_\sigma(X)\}_{\sigma \in K}$$

が定まる．数々ある部分空間配置のうち，対角部分空間配置は特に重要である．例えば次の例が挙げられる．

例 1.1. $m-1$ 次元単体の $m-3$ 骨格に対応する対角部分空間配置は組み紐配置である．

*kishi@math.kyoto-u.ac.jp

したがって，K の定める対角部分空間配置の和

$$\Delta_K(X) = \bigcup_{\sigma \in K} \Delta_\sigma(X).$$

のトポロジーは重要な研究対象である.（先行研究に関しては [KS, Ki, Ko, L, M, MW, PRW] 参照）[ZZ] や [BBCG] にあるように，部分空間配置やその補空間のホモトピー分解は非常に強力な結果である．Faten Labassi さん [L] は $\Delta_K(X)$ の懸垂のホモトピー分解を，K が $m-1$ 単体の $m-d-1$ 骨格で $2d > m$ をみたすときに示した．その証明は単体の骨格の対称性に大きく依存しているため，一般の単体複体 K に対して同様の手法を用いることはできない．そこで，われわれは Labassi さんの研究指導者である Sadok Kallel さんから，一般の K に対して同様の分解ができないかという質問を受けた．次の定理がこの質問に対する肯定的な答えである．証明方法は Labassi さんのとは全く異なる.

定理 1.2. 空間 X が連結 CW 複体であり，$2(\dim K+1) < m$ であるとき，

$$\Sigma\Delta_K(X) \simeq \Sigma(\bigvee_{\sigma \in K} \widehat{X}^{|\sigma|} \vee \widehat{X}^{|\sigma|+1})$$

となる．ここで，$\widehat{X}^k$ は $k > 0$ のとき k 個の X のスマッシュ積，$k = 0$ のとき一点を意味する.

この定理の系として，K の定める対角部分空間配置の補空間の Euler 数を計算する.

系 1.3. 空間 X が n 次元連結閉多様体であり，$2(\dim K+1) < m$ であるとき，補空間 $X^m - \Delta_K(X)$ の *Euler* 数は次で与えられる.

$$\chi(X)^m - (-1)^{mn}\chi(X)(1 + \sum_{\emptyset \neq \sigma \in K} (\chi(X) - 1)^{|\sigma|})$$

Proof. X はコンパクト多様体なので，$\Delta_K(X)$ は mn 次元多様体 X^m のコンパクト，局所可縮な部分空間である．よって，Lefschetz 同型定理より，

$$H_i(X^m, X^m - \Delta_K(X); \mathbb{Z}/2) \cong H^{mn-i}(\Delta_K(X); \mathbb{Z}/2)$$

となり，$\chi(X^m, X^m-\Delta_K(X)) = (-1)^{mn}\chi(\Delta_K(X))$を得る．定理 1.2から

$$\chi(X^m, X^m - \Delta_K(X)) = (-1)^{mn}\chi(X)(1 + \sum_{\emptyset\neq\sigma\in K}(\chi(X) - 1)^{|\sigma|})$$

となることがわかり，$\chi(X^m) = \chi(X^m, X^m - \Delta_K(X)) + \chi(X^m - \Delta_K(X))$により証明終わり． □

注意 1.4. 系 1.3においてXのコンパクト性は必要である．例えば，Xがユークリッド空間$\mathbb{R}$でKが空集合のみからなるとき，補空間$X^m - \Delta_K(X)$はS^{m-2}にホモトピー同値であるので，系 1.3の公式は成り立たない．

2 証明の流れ

定理 1.2の証明は，おおまかに次の三つの段階（どれも非常に初等的）を踏む．

1. $2(\dim K + 1) < m$という条件を用いて，$\Delta_K(X)$を全空間とするホモトピーファイブレーションを構成する．
2. このホモトピーファイブレーションのファイバー包含写像は懸垂すると左ホモトピー逆写像をもつことを示す．
3. 一般に，ホモトピーファイブレーションの包含写像の懸垂が左ホモトピー逆写像をもつとき，全空間の懸垂がファイバーと底空間を用いて分解されることを示し，$\Delta_K(X)$に応用する．

1について：$2(\dim K+1) < m$という条件から，任意の点$(x_1, \ldots, x_m) \in \Delta_K(X)$の成分のうち半分より多くが$X$の同じ点であることがわかる．このような点を対応させることにより，連続写像$\pi\colon \Delta_K(X) \to X$を得る．この写像を$K$の単体$\sigma$に対して$\Delta_\sigma(X)$に制限したものは射影$X^{|\sigma|+1} \to X$と同一視される．つまり，$\pi$は共通の底空間をもつファイブレーションの和となり，一般にこのように構成されるものはホモトピーファイブレーションであることが知られている．([F, Proposition, pp.180]を参照）よって，$\pi\colon \Delta_K(X) \to X$はホモトピーファイブレーションである．

2について：まず，Xがホップ空間のときに左ホモトピー逆元を直接構成する．(これは懸垂せずにつくれる）次に一般の場合をこの特別な場合

に懸垂写像 $E = \Omega\Sigma$ を通して帰着させる．1 でつくったホモトピーファイブレーションのファイバーは多面体積と呼ばれる空間で，この空間は懸垂すると分解することが知られている．([BBCG] 参照）この分解が上の帰着を可能にしている．

3 について：ホモトピーファイブレーション $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} B$ に対して，Σj の左ホモトピー逆写像 r が存在するとする．$f \in H^*(F)$ に対して，$\bar{f} = \Sigma^{-1}r^*(\Sigma f) \in H^*(E)$ は

$$j^*(\bar{f}) = f$$

をみたす．よって，F が有限型なら Leray-Hirsch の定理より，合成

$$\begin{aligned}\Sigma E \xrightarrow{\text{pinch}} \Sigma E \vee \Sigma E \vee \Sigma E &\xrightarrow{\Sigma\pi\vee r\vee\Delta} \Sigma B \vee \Sigma F \vee \Sigma(E \wedge E)\\ &\xrightarrow{1\vee 1\vee(\pi\wedge r)} \Sigma B \vee \Sigma F \vee \Sigma(B \wedge F)\end{aligned}$$

がコホモロジーで同型になることがわかる．ここで，Δ は対角写像である．F が一般の場合も少し工夫すると上の合成写像がホモロジーで同型になることがわかる．よって，J.H.C. Whitehead の定理より上の合成写像はホモトピー同値である．これを $\Delta_K(X)$ に応用すると，$\Delta_K(X)$ を X と多面体積の懸垂を用いて分解できる．上で述べた通り，多面体積の懸垂は分解するので，ここで得た分解はさらに細かく分解し，主定理を得る．

参考文献

[BBCG] A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen, and S. Gitler, *The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, Advances in Math. **225** (2010), 1634-1668.

[F] E.D. Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics **1622**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[IK] K. Iriye and D. Kishimoto, *Homotopy decomposition of diagonal arrangements*, preprint.

[KS] S. Kallel and I. Saihi, *Homotopy groups of diagonal complements*, `arXiv:1306.6272`.

[Ki] S. Kim, *Shellable complexes and topology of diagonal arrangements*, Discrete Comput. Geom. **40** (2008), 190-213.

[Ko] D.N. Kozlov, *A class of hypergraph arrangements with shellable intersection lattice*, J. Comb. Theory, Ser. A **86** (1999), 169-176.

[L] F. Labbasi, *Sur les diagonales épaisses et leurs complémentaires*, to appear in Homotopy and Related Structures.

[M] M.S. Miller, *Massey products and k-equal manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2012**, no. 8, 1805-1821.

[MW] M. Miller and M.Wakefield, *Formality of Pascal arrangements*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), no. 12, 4461-4466.

[PRW] I. Peeva, V. Reiner, and V. Welker, *Cohomology of real diagonal subspace arrangements via resolutions*, Compositio Math. **117** (1999), 99-115.

[ZZ] G.M. Ziegler and R.T. Živaljević, *Homotopy types of subspace arrangements via diagrams of spaces*, Math. Ann. **295**, (1993), 527-548.