数理解析研究所講究録
第 1923 巻 2014 年 242-250

Minimal element theorems and Ekeland's variational principles in set optimization (集合最適化における極小値定理と Ekeland の変分原理)

立命館大学 理工学部　荒谷　洋輔 (ARAYA, Yousuke)*
(College of Science and Technology, Ritsmeikan University)

1　はじめに

ベクトル最適化問題において、スカラー化手法は重要な研究テーマの一つである。1990 年頃、Gerth-Weidner は、Minkowski 汎関数から派生した劣線形スカラー化関数を提案し、ベクトル値関数における Ekeland の変分原理などの応用などを示した。

1997 年、黒岩-田中-Ha[12] は、集合値写像の像空間の元（集合）における大小の比較について、６種類の順序を導入し、その順序における最適化問題を提唱した。この最適化問題に対して、上記のベクトルに対する劣線形スカラー化関数を集合に対しても考えることはできるのか、という問題がある。

上記の集合におけるスカラー化関数の性質の研究は、Hamel-Löhne [9]、Hernández-Rodríguez-Marín [10]、桑野-田中-山田 [14]、荒谷 [2] などがある。私たちは、それらを利用することにより、集合値写像における極小値定理と Ekeland の変分原理を得ることができたので、ここに報告する。

2　準備

2.1　ベクトル最適化からの準備

本稿では、(X,d) を完備距離空間、Y を線形位相空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A\subset Y$ に対し、A の代数的内部、位相的内部、位相的閉包をそれぞれ cor$A$、int$A$、cl$A$ と表す。また、この論文で、C は Y の部分集合で閉凸錐を表すものとする。つまり、(a) $\mathrm{cl}C=C$、(b) $C+C\subseteq C$、(c) $\lambda C\subseteq C\ \forall\lambda\in[0,\infty)$。なお、錐 C が solid とは $\mathrm{int}C\neq\emptyset$ を満たすことであり、pointed とは $C\cap(-C)=\{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。

凸錐 C によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y,\leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1,y_2\in Y,\qquad y_1\leq_C y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2-y_1\in C$$

もし、C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の（実）順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる。

* *E-mail:* y-araya@fc.ritsumei.ac.jp

2.2 集合最適化からの準備

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ に対して、2つの集合の和は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ と $V \in \mathcal{V}$ に対して、スカラー積は以下のように定義される。

$$\alpha V := \{\alpha v | v \in V\}$$

そのとき $\mathcal{V}$ は、$\{\mathbf{0}_Y\}$ を零ベクトルとするベクトル空間であることが確かめられる。

定義 2.1 (Kuroiwa-Tanaka-Ha [12, 13]). $A,\ B \in \mathcal{V}$ と凸錐 $C \subset Y$ に対して、

$$A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \qquad\qquad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C。$$

注意 1. ベクトル順序と集合における順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、$x, y \in Y$ と $C \subset Y$ に対して $y \in x+C$ と $x \in y-C$ は同値である。一方、集合における順序の場合、$A, B \in \mathcal{V}$ と $C \subset Y$ に対して、上の2つの順序に対応する $B \subset A+C(A \leq_C^l B)$ と $A \subset B - C(A \leq_C^u B)$ は一般に異なることが次の例で確かめられる。

例 1.

$$Y = \mathbb{R}^2, \quad C = \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$A_1 = [0,2] \times [0,2] \quad B_1 = [3,5] \times [0,1] \qquad A_2 = [0,2] \times [1,2] \qquad B_2 = [3,5] \times [0,2]$$

このとき、次のことが分かる。$A_1 \leq_C^l B_1$、$A_1 \not\leq_C^u B_1$、$A_2 \not\leq_C^l B_2$、$A_2 \leq_C^u B_2$。

よって $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は比較することができない。

定義 2.2 (Jahn-Ha [11]). $A,\ B \in \mathcal{V}$ と凸錐 $C \subset Y$ に対して、

$$A \leq_C B \qquad \text{by} \qquad A = B \quad \text{or} \quad A \neq B,\ B - A \subset C。$$

命題 2.3 ([14]). $A, B \in \mathcal{V}$ と $y \in Y$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad (A+y) \leq_C^{l[u]} (B+y)$、

(ii) $A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B \ (\alpha \geq 0)$、

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

命題 2.4 ([11]). $A, B \in \mathcal{V}$ と $y \in Y$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C B \quad \Longrightarrow \quad (A+y) \leq_C (B+y)$、

(ii) $A \leq_C B \quad \Longrightarrow \quad \alpha A \leq_C \alpha B \ (\alpha \geq 0)$、

(iii) $\leq_C$ は、反射律と推移律が成り立つ。さらに、もし C が *pointed* ならば、$\leq_C$ は反対称律が成り立ち、したがって $(\mathcal{V}, \leq_C)$ は順序空間となる。

注意 2. 上記のことから、Jahn-Ha 型の集合の順序は、ほとんどベクトルと同じ扱いができるということが分かる。

集合 $A \in \mathcal{V}$ が C-proper とは、$A + C \neq Y$、$(-C)$-proper とは、$A - C \neq Y$ である。$\mathcal{V}_C$ を $\mathcal{V}$ の C-proper な集合族とする。

定義 2.5. $\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する。

$$V_1 \sim_l V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq^l_C V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq^l_C V_1,$$

$$V_1 \sim_u V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq^u_C V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq^u_C V_1,$$

$$V_1 \sim V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C V_1,$$

同値類の集合をそれぞれ $[\cdot]^l$、$[\cdot]^u$、$[\cdot]$ と書く。

同値関係の定義より

$$A \in [B]^l \Leftrightarrow A + C = B + C$$

$$A \in [B]^u \Leftrightarrow A - C = B - C$$

$$A \in [B] \Leftrightarrow (A = B) \text{ or } (B - A \subset C,\ A - B \subset C)$$

が分かる。さらに、もし C が pointed ならば、$A \in [B] \Leftrightarrow A = B$ も分かる。

定義 2.6. $A \in \mathcal{V}$ が $l[u]$-minimal set であるとは、任意の $B \in \mathcal{V}$ について

$$B \leq^{l[u]}_C A \quad \Longrightarrow \quad A \leq^{l[u]}_C B$$

が成り立つことである。(あるいは、$B' \leq^{l[u]}_C A$ となる $B' \in \mathcal{V}$ が存在しない) $\mathcal{V}$ の $l[u]$-minimal set の族を $l[u]$-Min$\mathcal{V}$ と書く。

定義 2.7. $A \in \mathcal{V}$ が minimal set であるとは、任意の $B \in \mathcal{V}$ について

$$B \leq_C A \quad \Longrightarrow \quad A \leq_C B$$

が成り立つことである。(あるいは、$B' \leq_C A$ となる $B' \in \mathcal{V}$ が存在しない) $\mathcal{V}$ の minimal set の族を Min$\mathcal{V}$ と書く。

3 集合に対するスカラー化関数

3.1 ベクトルに対するスカラー化関数

Gerth(Tammer) と Weidner は次のようなスカラー化関数を導入した。

補題 3.1 ([6, 7]). $C \subset Y$ を solid な閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。$\varphi_{C,k^0} : Y \to (-\infty, \infty]$ を次で定義する。

$$\varphi_{C,k^0}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \leq_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 - C\}$$

この時、関数 φ_{C,k^0} は次の 6 つの性質をもつ。

(i) $\mathrm{dom}\varphi_{C,k^0} := \{y \in Y | \varphi_{C,k^0}(y) < \infty\} \neq \emptyset$、任意の $y \in Y$ に対して $\varphi_{C,k^0}(y) > -\infty$、

(ii) $\{y \in Y | \varphi_{C,k^0}(y) \leq t\} = tk^0 - C$、

(iii) φ_{C,k^0} は下半連続 (任意の $t \in R$ に対して、$\{y \in Y | \varphi_{C,k^0}(y) \leq t\}$ が閉集合)、

(iv) φ_{C,k^0} は $\leq_C$-単調 ($y_1 \leq_C y_2$ なら $\varphi_{C,k^0}(y_1) \leq \varphi_{C,k^0}(y_2)$)、

(v) 任意の $y \in Y$、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し $\varphi_{C,k^0}(y + \lambda k^0) = \varphi_{C,k^0}(y) + \lambda$、

(vi) φ_{C,k^0} は劣加法的 (任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対して、$\varphi_{C,k^0}(y_1 + y_2) \leq \varphi_{C,k^0}(y_1) + \varphi_{C,k^0}(y_2)$)。

[1] では、次のスカラー化関数の性質を調べている。(実際には、2変数関数へ拡張した形で書かれている) $\psi_{C,k^0} : Y \to [-\infty, \infty)$

$$\psi_{C,k^0}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + C\}$$

ここで、$\psi_{C,k^0}(y) = -\varphi_{C,k^0}(-y)$ が分かる。([1, 17] 参照)

3.2 集合に対するスカラー化関数

ここで、ベクトルに対するスカラー化関数 $\varphi_{C,k^0}, \psi_{C,k^0}$ を集合の場合に拡張してみる。集合の場合は順序が $\leq_C^l$、$\leq_C^u$、$\leq_C$ の3通りあるので、inf 型、sup 型それぞれ2通りの合計6通りを考える。$\inf\emptyset = \infty$ と $\sup\emptyset = -\infty$ を認めることにより、$h_{\inf}^l, h_{\inf}^u, h_{\inf} : \mathcal{V} \to (-\infty, \infty]$ と $h_{\sup}^l, h_{\sup}^u, h_{\sup} : \mathcal{V} \to [-\infty, \infty)$ を次のように定義する。本稿は [2, 3] の簡略版であり、実際には(集合を変数と見た場合の) 2変数関数で定義し、性質を調べている。

$$h_{\inf}^l(V_y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y \leq_C^l tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, \{tk^0\} \subset V_y + C\}$$

$$h_{\inf}^u(V_y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y \leq_C^u tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y \subset tk^0 - C\}$$

$$h_{\inf}(V_y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y \leq_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y = tk^0 \text{ or } V_y \neq tk^0, tk^0 - V_y \subset C\}$$

$$h_{\sup}^l(V_y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C^l V_y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y \subset tk^0 + C\}$$

$$h_{\sup}^u(V_y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C^u V_y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, \{tk^0\} \subset V_y - C\}$$

$$h_{\sup}(V_y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C V_y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_y = tk^0 \text{ or } V_y \neq tk^0, V_y - tk^0 \subset C\}$$

これらの集合に対するスカラー化関数について、Hamel-Löhne [9]、Hernández-Rodríguez-Marín [10]、桑野-田中-山田 [14, 15] などの先行研究がある。上記のスカラー化関数の関係について次が分かる。

$$h_{\sup}^l(V_y) = -h_{\inf}^u(-V_y) \quad \text{and} \quad h_{\sup}^u(V_y) = -h_{\inf}^l(-V_y).$$

$$h_{\sup}(V_y; V_a) = -h_{\inf}(-V_y; -V_a).$$

l 型と u 型は、対(つい)の関係になっていることが重要である。よって、l 型と u 型についての集合に対するスカラー化関数は、ベクトルの場合とは異なり、$h_{\inf}^l$ と $h_{\inf}^u$ の2つを調べる必要がある。それに対し、Jahn-Ha 型の集合に対するスカラー化関数は、ベクトルの場合と同じ関係が成り立つので、$h_{\inf}$ のみで十分である。

定理 3.2. スカラー化関数 $h_{\inf}^l : \mathcal{V}_C \to (-\infty, \infty]$ は次の性質をもつ。

(i) $h^l_{\inf} > -\infty$、

(ii) $h^l_{\inf}$ は $\leq^l_C$-増加、

(iii) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $h^l_{\inf}(V_y + \lambda k^0) = h^l_{\inf}(V_y) + \lambda$、

(iv) $V_y \in [V_{\bar{y}}]^l \Longrightarrow h^l_{\inf}(V_y) = h^l_{\inf}(V_{\bar{y}})$、

(v) $h^l_{\inf}$ は劣線形。

定理 3.3. スカラー化関数 $h^u_{\inf} : \mathcal{V} \to (-\infty, \infty]$ は次の性質をもつ。

(i) $h^u_{\inf} > -\infty$、

(ii) $h^u_{\inf}$ は $\leq^u_C$-増加、

(iii) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $h^u_{\inf}(V_y + \lambda k^0) = h^u_{\inf}(V_y) + \lambda$、

(iv) $V_y \in [V_{\bar{y}}]^u \Longrightarrow h^u_{\inf}(V_y) = h^u_{\inf}(V_{\bar{y}})$、

(v) $h^u_{\inf}$ は劣線形。

定理 3.4. スカラー化関数 $h_{\inf} : \mathcal{V} \to (-\infty, \infty]$ は次の性質をもつ。

(i) $h_{\inf} > -\infty$、

(ii) $h_{\inf}$ は $\leq_C$-増加、

(iii) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $h_{\inf}(V_y + \lambda k^0) = h_{\inf}(V_y) + \lambda$、

(iv) $V_y \in [V_{\bar{y}}] \Longrightarrow h_{\inf}(V_y) = h_{\inf}(V_{\bar{y}})$、

(v) $h_{\inf}$ は劣線形。

4 集合最適化における極小値定理と Ekeland の変分原理

Ekeland の変分原理は、最適化の分野で数学的な理論のみならず数値計算の理論においても幅広い応用があり、様々な研究がなされている。

定理 4.1 (Ekeland [5]). (X, d) を完備距離空間とし、$f : X \to [0, \infty]$ を実効定義域が空とならない ($\mathrm{dom} f := \{x \in X | f(x) < \infty\} \neq \emptyset$), 下半連続な (拡張実数値) 関数とする。この時, 任意の $x_0 \in \mathrm{dom} f$ と $\varepsilon > 0$ に対して、次の 2 つの条件を同時に満たすような $\bar{x} \in X$ が存在する

(1) $f(\bar{x}) \leq f(x_0)$、

(2) $d(\bar{x}, x_0) \leq 1$、

(3) 任意の $x \neq \bar{x}$ に対して $f(\bar{x}) - \varepsilon d(\bar{x}, x) < f(x)$。

その後 Brezis-Browder は、上記の定理を前順序空間上での極小値定理という形で拡張した。

定理 4.2 (Brezis-Browder[4]). $(W, \preceq)$ を前順序空間とする。(つまり、$\preceq$ は W 上で反射律と推移律が成り立つ。) 関数 $\phi : W \to \mathbb{R}$ が、次を満たす。

(A1) ϕ は下に有界、

(A2) $w_1 \preceq w_2$ ならば $\phi(w_1) \leq \phi(w_2)$、

(A3) 任意の $\preceq$-減少列 $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W$ に対して、任意の $n \in \mathbb{N}$ で $w \preceq w_n$ となるような $w \in W$ が存在する。

その時、任意の $w_0 \in W$ に対して、次を満たす $\bar{w} \in W$ が存在する。

(i) $\bar{w} \preceq w_0$、

(ii) $\hat{w} \preceq \bar{w}$ ならば $\phi(\hat{w}) = \phi(\bar{w})$。

この章では、前章の集合におけるスカラー化関数を用いて、完備距離空間上での集合値写像における Ekeland の変分原理と極小値定理を示す。

4.1 集合最適化における極小値定理

私たちは、次の順序関係をそれぞれ $X \times \mathcal{V}_C$、 $X \times \mathcal{V}$、$X \times \mathcal{V}$ 上に導入する ([9] 参照)：

$$(x_1, V_1) \preceq^l_{k^0} (x_2, V_2) \iff V_1 + d(x_1, x_2)k^0 \leq^l_C V_2$$

$$(x_1, V_1) \preceq^u_{k^0} (x_2, V_2) \iff V_1 + d(x_1, x_2)k^0 \leq^u_C V_2$$

$$(x_1, V_1) \preceq_{k^0} (x_2, V_2) \iff V_1 + d(x_1, x_2)k^0 \leq_C V_2$$

さらに、私たちは [8] の 2 章を参考にすることより、新たに次の順序関係をそれぞれ $X \times \mathcal{V}_C$、$X \times \mathcal{V}$、$X \times \mathcal{V}$ 上に導入する。これらは、前述の $\preceq^l_{k^0}, \preceq^u_{k^0}$、$\preceq_{k^0}$ よりも強い。

$$(x_1, V_1) \preceq^l_{k^0, h^l_{\inf}} (x_2, V_2) \iff \begin{cases} (x_1, V_1) \preceq^l_{k^0} (x_2, V_2) \\ h^l_{\inf}(V_1) < h^l_{\inf}(V_2) \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ V_2 \in [V_1]^l \end{cases}$$

$$(x_1, V_1) \preceq^u_{k^0, h^u_{\inf}} (x_2, V_2) \iff \begin{cases} (x_1, V_1) \preceq^u_{k^0} (x_2, V_2) \\ h^u_{\inf}(V_1) < h^u_{\inf}(V_2) \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ V_2 \in [V_1]^u \end{cases}$$

$$(x_1, V_1) \preceq_{k^0, h_{\inf}} (x_2, V_2) \iff \begin{cases} (x_1, V_1) \preceq_{k^0} (x_2, V_2) \\ h_{\inf}(V_1) < h_{\inf}(V_2) \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ V_2 \in [V_1] \end{cases}$$

順序関係 $\preceq^l_{k^0}$、$\preceq^u_{k^0}$、$\preceq_{k^0}$ と $\preceq^l_{k^0, h^l_{\inf}}$、$\preceq^u_{k^0, h^u_{\inf}}$、$\preceq_{k^0, h_{\inf}}$ は、それぞれ $X \times \mathcal{V}_C$、 $X \times \mathcal{V}$、$X \times \mathcal{V}$ 上で反射律と推移律を満たすことが確かめられる。

P_X, P_Y を、それぞれ $X \times Y$ から、X と Y への射影とする。($P_X(x, y) = x \quad (x, y) \in X \times Y$)

定理 4.3 (**l-type**). X を完備距離空間、Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$、$\mathcal{A} \subset X \times \mathcal{V}_C$ を空でない集合とする。次を仮定する。

(i) $\mathcal{A}$ は下に有界 (任意の $x \in X$ に対して、$V_a \leq^l_C P_{\mathcal{V}_C}(\mathcal{A})$ となる $V_a \in \mathcal{V}_C$ が存在する。);

(ii) 任意の $\preceq^l_{k^0}$-減少列 $\{(x_n, V_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して、$(x, V) \preceq^l_{k^0} (x_n, V_n)$ となる $(x, V) \in \mathcal{A}$ が存在する。

そのとき、任意の $(x_0, V_0) \in \mathcal{A}$ に対して、次を満たす $(\bar{x}, \bar{V}) \in \mathcal{A}$ が存在する。

(a) $(\bar{x},\bar{V}) \preceq^l_{k^0} (x_0,V_0)$、

(b) もし、$(\hat{x},\hat{V}) \preceq^l_{k^0} (\bar{x},\bar{V})$ となる $(\hat{x},\hat{V}) \in \mathcal{A}$ があるならば、$\hat{x}=\bar{x}$。

もし、$\preceq^l_{k^0}$ を $\preceq^l_{k^0,h^l_{\inf}}$ へ取り替えたならば、結論 (b) は、次のように置き換えられる。

(b') もし、$(\hat{x},\hat{V}) \preceq^l_{k^0,h^l_{\inf}} (\bar{x},\bar{V})$ となる $(\hat{x},\hat{V}) \in \mathcal{A}$ があるならば、$\hat{x}=\bar{x}$ と $\hat{V} \in [\bar{V}]^l$ である。

Proof. $\mathcal{A}_0 := \{(x,V) \in \mathcal{A} | (x,V) \preceq^l_{k^0} (x_0,V_0)\}$ とする。Brezis-Browder の定理を前順序集合 $(\mathcal{A}_0, \preceq^l_{k^0})$ に適用し、関数 ϕ を次のように定義する。

$$\phi : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}, \qquad \phi(x,V) := h^l_{\inf}(V).$$

すると、$h^l_{\inf}$ の性質を利用することにより、ϕ は定理 4.2 の仮定を満たすことが確かめられる。したがって、定理 4.2 から任意の $(x_0,V_0) \in \mathcal{A}_0$ に対して次を満たす $(\bar{x},\bar{V}) \in \mathcal{A}_0$ が存在する。

(1) $(\bar{x},\bar{V}) \preceq^l_{k^0} (x_0,V_0)$,

(2) $(\hat{x},\hat{V}) \preceq^l_{k^0} (\bar{x},\bar{V})$ ならば $\phi(\hat{x},\hat{V}) = \phi(\bar{x},\bar{V})$.

条件 (1)、(2) から、定理 4.3 の結論 (a)、(b) が得られる。また、$\preceq^l_{k^0,h^l_{\inf}}$ の定義と結論 (b) から、結論 (b') が得られる。 □

注意 3. 上記の極小値定理は、順序 $\preceq^l_{k^0}$ を使うところまでは Hamel-Löhne[9] とほぼ同じである。私たちの結果は、より強い順序 $\preceq^l_{k^0,h^l_{\inf}}$ を導入することにより、強い結果 (b') が得られた。

定理 4.4 (u-type). X を完備距離空間、Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$、$\mathcal{A} \subset X \times \mathcal{V}$ を空でない集合とする。次を仮定する。

(i) $\mathcal{A}$ は下に有界 (任意の $x \in X$ に対して、$V_a \leq^u_C P_{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$ となる $V_a \in \mathcal{V}$ が存在する。);

(ii) 任意の $\preceq^u_{k^0}$-減少列 $\{(x_n,V_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して、$(x,V) \preceq^u_{k^0} (x_n,V_n)$ となる $(x,V) \in \mathcal{A}$ が存在する。

そのとき、任意の $(x_0,V_0) \in \mathcal{A}$ に対して、次を満たす $(\bar{x},\bar{V}) \in \mathcal{A}$ が存在する。

(a) $(\bar{x},\bar{V}) \preceq^u_{k^0} (x_0,V_0)$、

(b) もし、$(\hat{x},\hat{V}) \preceq^u_{k^0} (\bar{x},\bar{V})$ となる $(\hat{x},\hat{V}) \in \mathcal{A}$ があるならば、$\hat{x}=\bar{x}$。

もし、$\preceq^u_{k^0}$ を $\preceq^u_{k^0,h^u_{\inf}}$ へ取り替えたならば、結論 (b) は、次のように置き換えられる。

(b') もし、$(\hat{x},\hat{V}) \preceq^u_{k^0,h^u_{\inf}} (\bar{x},\bar{V})$ となる $(\hat{x},\hat{V}) \in \mathcal{A}$ があるならば、$\hat{x}=\bar{x}$ と $\hat{V} \in [\bar{V}]^u$ である。

定理 4.5 (Jahn-Ha's type). X を完備距離空間、Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$、$\mathcal{A} \subset X \times \mathcal{V}$ を空でない集合とする。次を仮定する。

(i) $\mathcal{A}$ は下に有界 (任意の $x \in X$ に対して、$V_a \leq_C P_{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$ となる $V_a \in \mathcal{V}$ が存在する。);

(ii) 任意の $\preceq_{k^0}$-減少列 $\{(x_n,V_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して、$(x,V) \preceq_{k^0} (x_n,V_n)$ となる $(x,V) \in \mathcal{A}$ が存在する。

そのとき、任意の $(x_0,V_0) \in \mathcal{A}$ に対して、次を満たす $(\bar{x},\bar{V}) \in \mathcal{A}$ が存在する。

(a) $(\bar{x}, \bar{V}) \preceq_{k^0} (x_0, V_0)$、

(b) もし、$(\hat{x}, \hat{V}) \preceq_{k^0} (\bar{x}, \bar{V})$ となる $(\hat{x}, \hat{V}) \in \mathcal{A}$ があるならば、$\hat{x} = \bar{x}$。

もし、$\preceq_{k^0}$ を $\preceq_{k^0, h_{\inf}}$ へ取り替えたならば、結論 (b) は、次のように置き換えられる。

(b') もし、$(\hat{x}, \hat{V}) \preceq_{k^0, h_{\inf}} (\bar{x}, \bar{V})$ となる $(\hat{x}, \hat{V}) \in \mathcal{A}$ があるならば、$\hat{x} = \bar{x}$ と $\hat{V} \in [\bar{V}]$ である。

さらに、C が *pointed* ならば、 結論 (b') は次のように置き換えられる。

(b") もし、$(\hat{x}, \hat{V}) \preceq_{k^0, h_{\inf}} (\bar{x}, \bar{V})$ となる $(\hat{x}, \hat{V}) \in \mathcal{A}$ があるならば、$\hat{x} = \bar{x}$ と $\hat{V} = \bar{V}$ である。

4.2 集合最適化における Ekeland の変分原理

前述の極小値定理において、$\mathcal{A} = \mathrm{gr}F := \{(x, F(x)) | x \in X\} \subset X \times \mathcal{V}$ とすると、次の 3 つの型の集合最適化における Ekeland の変分原理を得る。

定理 4.6 (*l*-**type**). X を完備距離空間、Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$、$F : X \to \mathcal{V}_C$ を集合値写像とする。次を仮定する。

(i) F は下に有界 (任意の $x \in X$ に対して、$V_a \leq_C^l F(x)$ となる $V_a \in \mathcal{V}_C$ が存在する。);

(ii) $\{x' \in X | F(x') + d(x', x)k^0 \leq_C^l F(x)\}$ は任意の $x \in X$ について閉集合である。

そのとき、任意の $x_0 \in X$ に対して、次を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する。

(a) $F(\bar{x}) + d(x_0, \bar{x})k^0 \leq_C^l F(x_0)$、

(b) 任意の $x \neq \bar{x}$ に対して、$F(x) + d(\bar{x}, x)k^0 \not\leq_C^l F(\bar{x})$。

定理 4.7 (*u*-**type**). X を完備距離空間、Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$、$F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像とする。次を仮定する。

(i) F は下に有界 (任意の $x \in X$ に対して、$V_a \leq_C^u F(x)$ となる $V_a \in \mathcal{V}$ が存在する。);

(ii) $\{x' \in X | F(x') + d(x', x)k^0 \leq_C^u F(x)\}$ は任意の $x \in X$ について閉集合である。

そのとき、任意の $x_0 \in X$ に対して、次を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する。

(a) $F(\bar{x}) + d(x_0, \bar{x})k^0 \leq_C^u F(x_0)$、

(b) 任意の $x \neq \bar{x}$ に対して、$F(x) + d(\bar{x}, x)k^0 \not\leq_C^u F(\bar{x})$。

定理 4.8 (Jahn-Ha's type). X を完備距離空間、Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を閉凸錐、$k^0 \in C \setminus (-C)$、$F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像とする。次を仮定する。

(i) F は下に有界 (任意の $x \in X$ に対して、$V_a \leq_C F(x)$ となる $V_a \in \mathcal{V}$ が存在する。);

(ii) $\{x' \in X | F(x') + d(x', x)k^0 \leq_C F(x)\}$ は任意の $x \in X$ について閉集合である。

そのとき、任意の $x_0 \in X$ に対して、次を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する。

(a) $F(\bar{x}) + d(x_0, \bar{x})k^0 \leq_C F(x_0)$、

(b) 任意の $x \neq \bar{x}$ に対して、$F(x) + d(\bar{x}, x)k^0 \not\leq_C F(\bar{x})$。

参考文献

[1] Y. Araya, *Nonlinear scalarizations and some applications in vector optimization*, Nihonkai Math. J. 21, (2010) 35–45.

[2] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. 75, (2012) 3821–3835.

[3] Y. Araya, *New types of nonlinear scalarizations in set optimization*, submitted to proceedings of Nonlinear Analysis and Optimization, 2012.

[4] H. Brezis, F. E. Browder, *A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis*, Advances in Math. 21 (1976) 355–364.

[5] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974) 324–354.

[6] C. Gerth, P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. 67, (1990) 297–320.

[7] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York (2003).

[8] A. Göpfert, C. Tammer, and C. Zălinescu *On the vectorial Ekeland's variational principle and minimal points in product spaces*, Nonlinear Anal. 39 (2000) 909–922.

[9] A. Hamel and A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear and Convex Anal. 7, (2006) 19–37.

[10] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 325, (2007) 1–18.

[11] J. Jahn and T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 148, (2011) 209–236.

[12] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30, (1997) 1487–1496.

[13] D. Kuroiwa, *On set-valued optimization*, Nonlinear Anal. 47, (2001) 1395–1400.

[14] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, in Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama (2009) 193–204.

[15] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Inherited properties of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama (2010) 161–177.

[16] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[17] S. Nishizawa, T. Tanaka, and P. Gr. Georgiev, *On inherited properties of set-valued maps*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama (2003) 341–350.