数理解析研究所講究録
第 1925 巻 2014 年 103-116

Quantization of the moment map on symplectic vector space and the oscillator representation

橋本 隆司（鳥取大学 大学教育センター）

1 はじめに

シンプレクティックベクトル空間上の運動量写像を正準量子化すれば自然に oscillator (Segal-Shale-Weil) 表現が得られることが [3] でわかった．もう少し詳しく述べると，実簡約 Lie 群 $G = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}), \mathrm{U}(p,q), \mathrm{O}^*(2n)$ のそれぞれに対し，次表にあるシンプレクティック G-ベクトル空間 (W,ω) 上の運動量写像を正準量子化すれば oscillator 表現が得られるのである．

W	$\mathbb{R}^{2n}$	$(\mathbb{C}^{p+q})_{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{C}^{2n})_{\mathbb{R}}$
$\omega(u,v)$	${}^t u J_n v$	$\mathrm{Im}({}^t\bar{u} I_{p,q} v)$	$\mathrm{Im}({}^t\bar{u} I_{n,n} v)$
G	$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{U}(p,q)$	$\mathrm{O}^*(2n)$

ただし，$J_n = \begin{bmatrix} & 1_n \\ -1_n & \end{bmatrix}, I_{p,q} = \begin{bmatrix} 1_p & \\ & 1_q \end{bmatrix}$ とする．本稿ではその様子を $G = \mathrm{O}^*(2n)$, $W = (\mathbb{C}^{2n})_{\mathbb{R}}$ の場合に焦点を絞り解説したい（他の場合については上記 [3] を参照して下さい）．

以下，$G = \mathrm{O}^*(2n)$ とおき，これを以下のように実現しておく：

$$\begin{aligned} \mathrm{O}^*(2n) &= \{g \in \mathrm{U}(n,n);\ {}^t g S g = S\} \\ &= \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C});\ g^* I_{n,n} g = I_{n,n},\ {}^t g S g = S\}, \end{aligned}$$

ただし $S = \begin{bmatrix} & 1_n \\ 1_n & \end{bmatrix}$ とする．また G の Lie 環 $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{o}^*(2n)$ とおき，その基底を以下のようにとる：

$$\begin{aligned} X^c_{i,j} &= E_{i,j} - E_{j,i} + E_{n+i,n+j} - E_{n+j,n+i} && (1 \leqslant i < j \leqslant n), \\ Y^c_{i,j} &= \mathrm{i}\,(E_{i,j} + E_{j,i} - E_{n+i,n+j} - E_{n+j,n+i}) && (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n), \\ X^n_{i,j} &= E_{i,n+j} - E_{j,n+i} - E_{n+i,j} + E_{n+j,i} && (1 \leqslant i < j \leqslant n), \\ Y^n_{i,j} &= \mathrm{i}\,(E_{i,n+j} - E_{j,n+i} + E_{n+i,j} - E_{n+j,i}) && (1 \leqslant i < j \leqslant n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで $E_{i,j}$ は $2n\times 2n$ 次の行列要素を表す．$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{o}^*(2n)$ の複素化

$$\mathfrak{o}_{2n}=\{X\in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C});\ {}^tXS+SX=O\} \tag{1.2}$$

を $\mathfrak{g}:=\mathfrak{o}_{2n}$ とおくと，その基底は

$$\begin{aligned} X^0_{i,j}&=E_{i,j}-E_{n+j,n+i} \quad (1\leqslant i,j\leqslant n),\\ X^+_{i,j}&=E_{i,n+j}-E_{j,n+i} \quad (1\leqslant i<j\leqslant n),\\ X^-_{i,j}&=E_{n+j,i}-E_{n+i,j} \quad (1\leqslant i<j\leqslant n)\end{aligned} \tag{1.3}$$

で与えられる．また $\mathfrak{g}=\mathfrak{o}_{2n}$ 上の非退化不変双線形型式を $B(X,Y)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(XY)$ で定め，この B による $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の同一視をしばしば行う．$\mathfrak{g}$ の基底 $\{X_\alpha\}$ に対し，$\{X^\vee_\alpha\}$ をその双対基底，すなわち，

$$B(X_\alpha,X^\vee_\beta)=\delta_{\alpha,\beta}$$

をみたす $\mathfrak{g}$ の基底とする．

Cartan 対合 $\theta X=-{}^t\bar{X}$ に関する $\mathfrak{g}_0$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ とする．その複素化を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ とすれば，それらの具体的な形は

$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{bmatrix}A & O\\ O & -{}^tA\end{bmatrix}; A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})\right\} \tag{1.4}$$

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix};\ \begin{matrix}B,C\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})\\ {}^tB+B=O,\ {}^tC+C=O\end{matrix}\right\} \tag{1.5}$$

となる．$\mathfrak{k}$ に対応する Lie 群を $K_{\mathbb{C}}$ とおけば，$K_{\mathbb{C}}$ は Adjoint 作用により $\mathfrak{p}$ に働くが，その既約分解を

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^++\mathfrak{p}^-,\quad \mathfrak{p}^+=\left\{\begin{bmatrix}O & B\\ O & O\end{bmatrix}\in\mathfrak{p}\right\},\quad \mathfrak{p}^-=\left\{\begin{bmatrix}O & O\\ C & O\end{bmatrix}\in\mathfrak{p}\right\} \tag{1.6}$$

とする．

一般に (M,ω) を Lie 群 G の作用をもつシンプレクティック多様体，すなわち，ω は M 上の非退化な閉 2 次微分形式で $g^*\omega=\omega$ $(\forall g\in G)$ を満たすものとする．M 上の滑らかな $\mathbb{R}$-値函数の全体を $C^\infty(M)$ とかく．$f\in C^\infty(M)$ に対し，M 上のベクトル場 ξ_f を $\iota(\xi_f)\omega=\mathrm{d}f$（ただし ι は内部積）で定めるとき，Poisson 括弧積を

$$\{f,g\}:=\omega(\xi_g,\xi_f) \qquad (f,g\in C^\infty(M)) \tag{1.7}$$

で定め，線形性によりこれを $\mathbb{C}$-値函数に拡張しておく．classical observable $f\in C^\infty(M)$ に対応する quantum observable を $\widehat{f}$ とすれば，量子化条件の一つは，$f_1,f_2\in C^\infty(M)$ に

対し，

$$\{f_1, f_2\} = f_3 \quad \Longrightarrow \quad [\widehat{f_1}, \widehat{f_2}] = -\mathrm{i}\,\hbar\widehat{f_3} \tag{1.8}$$

が成り立つことを要請する[*1]．ここで $\hbar$ は Planck 定数であるが，以下簡単のため，$\hbar = 1$ とおく．

次に運動量写像の定義を思い出そう．G の Lie 環を $\mathfrak{g}_0$, その双対を $\mathfrak{g}_0^*$ とするとき，次の二条件を満たす写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}_0^*$ を運動量写像と呼ぶ：

$$(1)\quad \mu \text{ は } G \text{ 同変;} \qquad\qquad (2)\quad \mathrm{d}\langle\mu, X\rangle = \iota(X_M)\omega \quad (X \in \mathfrak{g}_0). \tag{1.9}$$

ただし X_M は $X_M = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(-tX)$ で定義される M 上のベクトル場とする．

以下，本稿で扱うシンプレクティック多様体 (M, ω) は，次の (1.10) で与えられるシンプレクティック形式 ω を備えたベクトル空間 $W = (\mathbb{C}^{2n})_{\mathbb{R}}$ とする：

$$\omega(u, v) = \mathrm{Im}(u^* I_{n,n} v) \quad (u, v \in \mathbb{C}^{2n}). \tag{1.10}$$

2　Oscillator 表現

$W = (\mathbb{C}^{2n})_{\mathbb{R}}$ の元を $v = x + \mathrm{i}\,y \in W$, $x = {}^t(x_1, \ldots, x_{2n})$, $y = {}^t(y_1, \ldots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$，とかくとき，$\omega$ を座標函数 $x_1, \ldots, y_n$ で表せば

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}y_j - \mathrm{d}x_{n+j} \wedge \mathrm{d}y_{n+j}) \tag{2.1}$$

となる．

注意 2.1. (i) $\mathrm{O}^*(2n)$ を複素直交行列のなす線形 Lie 群

$$\mathrm{O}^*(2n) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n};\ {}^t g g = 1,\ {}^t g J_n g = J_n\}$$

としても実現できる (cf. [4])．仮にこの実現を G^γ とかく．なぜなら，$G \ni g \mapsto \gamma g \gamma^{-1} \in G^\gamma$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \in \mathrm{U}(2n)$，により G は G^γ に同型になるからである．

さて $\mathbb{H} = \{a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ を四元数体とするとき

$$\mathbb{H}^n := \left\{v = {}^t(v_1, \ldots, v_n); v_i \in \mathbb{H}\ (i = 1, \ldots, n)\right\}$$

[*1] この他にもいくつか要請される条件については，例えば [6] を参照．

を**右** $\mathbb{H}$-ベクトル空間と見なす．$\mathbf{i} \in \mathbb{H}$ を $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ と同一視すれば，

$$\phi_1 : \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^{2n}, \quad v = v' + \mathbf{j}\, v'' \mapsto \begin{bmatrix} v' \\ v'' \end{bmatrix} \qquad (v', v'' \in \mathbb{C}^n) \tag{2.2}$$

により $\mathbb{H}^n$ は $\mathbb{C}^{2n}$ と $\mathbb{C}$-同型になる．このとき G^γ は，四元数的歪エルミート型式

$$C(u, v) := u^* \mathbf{j}\, v \qquad (u, v \in \mathbb{H}^n) \tag{2.3}$$

を保つ $\mathbb{H}^n$ 上の $\mathbb{H}$-線形変換として特徴づけられる (詳細は [2] を参照).

(ii) また $\mathbb{H}^n$ は

$$\phi_2 : \mathbb{H}^n \to \mathrm{Mat}_{n\times 2}(\mathbb{C}), \quad v = v' + v''\mathbf{j} \mapsto [v',\ v''] \tag{2.4}$$

により $\mathrm{Mat}_{n\times 2}(\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}$-ベクトル空間として同型である．ただし，この場合，$\mathbb{H}^n$ を**左** $\mathbb{H}$-ベクトル空間と見なす．$v'' \in \mathbb{C}^n$ に対して $\mathbf{j}\, v'' = \bar{v}''\mathbf{j}$ なので

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^{2n} \to \mathrm{Mat}_{n\times 2}(\mathbb{C}), \quad \begin{bmatrix} v' \\ v'' \end{bmatrix} \mapsto [v',\ \bar{v}''] \tag{2.5}$$

は $\mathbb{R}$-同型であることに注意.

より一般に，$\mathbb{H}^n$ の k 箇の直和 $(\mathbb{H}^n)^k$ を左 $\mathbb{H}$-ベクトル空間を考えよう．このとき，$(\mathbb{H}^n)^k$ に右から $\mathrm{Mat}_k(\mathbb{H})$ の元，例えば $a + b\,\mathbf{j}$，$a, b \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{C})$，を掛けることは，$\mathrm{Mat}_{n\times 2k}(\mathbb{C})$ に右から複素 $2k$ 次正方行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$ を掛けることに対応する.

$v = \begin{bmatrix} v' \\ v'' \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$，$v', v'' \in \mathbb{C}^n$，に対し，$v_+ := (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(v) = [v',\ \bar{v}''] \in \mathrm{Mat}_{n\times 2}(\mathbb{C})$ とおく．注意 2.1 (ii) により $\mathbb{R}$-同型 $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ を通して $\mathrm{Sp}(1)$ が W に右から作用することに注意.

命題 2.2. $G = \mathrm{O}^*(2n)$，シンプレクティックベクトル空間 (W, ω) を上のようにとると，運動量写像 $\mu : W \to \mathfrak{g}_0^* \simeq \mathfrak{g}_0$ は以下の式で与えられる：

$$\mu(v) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(v\, v^* I_{n,n} - S\, {}^t(v\, v^* I_{n,n}) S\right) \tag{2.6a}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} v_+ v_+^* & -v_+ J_1\, {}^t v_+ \\ -\bar{v}_+ J_1 v_+^* & -\bar{v}_+\, {}^t v_+. \end{bmatrix} \tag{2.6b}$$

ただし $v = x + \mathrm{i}\, y \in W$，$x = {}^t(x_1, \ldots, x_{2n}), y = {}^t(y_1, \ldots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ とする．特に，μ は G-同変，かつ，$\mathrm{Sp}(1)$-不変である.

証明． シンプレクティック G-ベクトル空間 (W, ω) 上の運動量写像 $\mu : W \to \mathfrak{g}_0^*$ は，$\langle \mu(v), X \rangle = \frac{1}{2}\omega(v, Xv)$ （$X \in \mathfrak{g}_0$）で与えられることが知られている（例えば [1]）．これを使えば，次を示すのは容易である.

$$\langle \mu, X\rangle = \begin{cases} x_i y_j - x_j y_i - x_{n+i} y_{n+j} + x_{n+j} y_{n+i} & \text{if} \quad X = X^c_{i,j}; \\ x_i x_j + x_{n+i} x_{n+j} + y_i y_j + y_{n+i} y_{n+j} & \text{if} \quad X = Y^c_{i,j}; \\ x_i y_{n+j} - x_j y_{n+i} + x_{n+i} y_j - x_{n+j} y_i & \text{if} \quad X = X^n_{i,j}; \\ x_i x_{n+j} - x_j x_{n+i} - y_j y_{n+i} + y_i y_{n+j} & \text{if} \quad X = Y^n_{i,j}. \end{cases} \tag{2.7}$$

これを複素座標 $z_i := x_i + \mathrm{i}\, y_i$ およびその複素共役 $\bar{z}_i = x_i - \mathrm{i}\, y_i$ （$i = 1, \dots, 2n$）を用いて書き直せば

$$\langle \mu, X\rangle = \begin{cases} -\frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{z}_i z_j - \bar{z}_j z_i - \bar{z}_{n+i} z_{n+j} + \bar{z}_{n+j} z_{n+i}) & \text{if} \quad X = X^c_{i,j}; \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_i z_j + \bar{z}_j z_i + \bar{z}_{n+i} z_{n+j} + \bar{z}_{n+j} z_{n+i}) & \text{if} \quad X = Y^c_{i,j}; \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{z}_i z_{n+j} - \bar{z}_j z_{n+i} + \bar{z}_{n+i} z_j - \bar{z}_{n+j} z_i) & \text{if} \quad X = X^n_{i,j}; \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_i z_{n+j} - \bar{z}_j z_{n+i} - \bar{z}_{n+i} z_j + \bar{z}_{n+j} z_i) & \text{if} \quad X = Y^n_{i,j} \end{cases} \tag{2.8}$$

となる．従って，$v' := {}^t(z_1, \dots, z_n)$, $v'' := {}^t(z_{n+1}, \dots, z_{2n})$ とおけば

$$\begin{aligned} \mu(v) &= \sum_{i<j} \langle \mu, X^c_{i,j}\rangle (X^c_{i,j})^\vee + \sum_{i\leqslant j} \langle \mu, Y^c_{i,j}\rangle (Y^c_{i,j})^\vee + \sum_{i<j} \langle \mu, X^n_{i,j}\rangle (X^n_{i,j})^\vee + \sum_{i<j} \langle \mu, Y^n_{i,j}\rangle (Y^n_{i,j})^\vee \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \Big((z_i \bar{z}_j + \bar{z}_{n+i} z_{n+j}) E_{i,j} - (\bar{z}_i z_j + z_{n+i} \bar{z}_{n+j}) E_{n+i,n+j} \\ &\qquad\qquad - (z_i \bar{z}_{n+j} - \bar{z}_{n+i} z_j) E_{i,n+j} - (\bar{z}_i z_{n+j} - z_{n+i} \bar{z}_j) E_{n+i,j} \Big) \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \begin{bmatrix} v'\,{}^t\bar{v}' + \bar{v}''\,{}^t v'' & -v'\,{}^t\bar{v}'' + \bar{v}''\,{}^t v' \\ -\bar{v}'\,{}^t v'' + v''\,{}^t\bar{v}' & -\bar{v}'\,{}^t v' - v''\,{}^t\bar{v}'' \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \left(\begin{bmatrix} v' \\ v'' \end{bmatrix} {}^t(\bar{v}', -\bar{v}'') + \begin{bmatrix} \bar{v}'' \\ -\bar{v}' \end{bmatrix} {}^t(v'', -v') \right) \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \left(v\, v^* I_{n,n} - S\, {}^t(v\, v^* I_{n,n}) S \right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

を得る．(2.6a) を書き直して第二の表示式 (2.6b) を得る．

μ が Sp(1)-不変であることは (2.6b) から直ちにわかる．またこれが G-同変であることは以下のようにして確かめられる．すなわち，$g \in G$ ならば $g^* I_{n,n} = I_{n,n} g^{-1}$ であるから，

$$\mu(gv) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(gvv^* g^* I_{n,n} - S\, {}^t(gvv^* g^* I_{n,n}) S \right) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(gvv^* I_{n,n} g^{-1} - S\, {}^t(gvv^* I_{n,n} g^{-1}) S \right).$$

ここで ${}^t g S = S g^{-1}$ に注意すれば，右辺の括弧の中の第 2 項は

$$S\, {}^t g^{-1}\, {}^t(vv^* I_{n,n})\, {}^t g S = gS\, {}^t(vv^* I_{n,n}) S\, g^{-1}$$

に等しい．故に

$$\mu(gv) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(gvv^* I_{n,n} g^{-1} - gS\, {}^t(vv^* I_{n,n}) S\, g^{-1} \right) = \mathrm{Ad}(g)\mu(v)$$

となり，証明おしまい． □

(2.1) より $\mathbb{R}$-値座標函数 x_i, y_i, $i = 1, \ldots, 2n$, 間の Poisson 括弧積は

$$\{x_i, y_j\} = -\delta_{i,j}, \quad \{x_{n+i}, y_{n+j}\} = \delta_{i,j} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

で与えられる（ただし他の組合せはすべて自明）．従って，$\mathbb{C}$-値座標函数 $z_j = x_j + \mathrm{i}\, y_j$ とその複素共役 $\bar{z}_j = x_j + \mathrm{i}\, y_j$（$j = 1, \ldots, 2n$）の Poisson 括弧積は

$$\{z_i, \bar{z}_j\} = \{\bar{z}_{n+i}, z_{n+j}\} = 2\mathrm{i}\, \delta_{i,j} \tag{2.10}$$

となる（他の組合せはすべて自明）．そこで (2.10) を考慮に入れ，$i = 1, \ldots, n$ に対し

$$\begin{aligned} \widehat{z_i} &= z_i, & \widehat{\bar{z}_i} &= -2\partial_{z_i}, \\ \widehat{\bar{z}_{n+i}} &= \bar{z}_{n+i}, & \widehat{z_{n+i}} &= -2\partial_{\bar{z}_{n+i}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

と量子化すれば，$i, j = 1, \ldots, n$ に対し

$$[\widehat{z_i}, \widehat{\bar{z}_j}] = [\widehat{\bar{z}_{n+i}}, \widehat{z_{n+j}}] = 2\delta_{i,j} \tag{2.12}$$

を満たす (cf. (1.8))．

W 上の複素構造 I を $e_j \mapsto \mathrm{i}\, e_j$, $\mathrm{i}\, e_j \mapsto -e_j$, $j = 1, \ldots, 2n$，により定める．$e_j \leftrightarrow \partial_{x_j}$, $\mathrm{i}\, e_j \leftrightarrow \partial_{y_j}$ と同一視する．上で導入した classical observables z_j および $\bar{z}_j$ は，W の複素化 $W_{\mathbb{C}}$ の基底 $\left\{\frac{1}{2}(e_j - \mathrm{i}\, Ie_j), \frac{1}{2}(e_j + \mathrm{i}\, Ie_j); j = 1, \ldots, 2n\right\}$ に関する座標と見なせる．(2.11) で行った量子化は，$W_{\mathbb{C}}$ の複素 Lagrangian 部分空間として，次の V をとることに対応している：

$$V = \left\langle \frac{1}{2}(e_j - \mathrm{i}\, Ie_j), \frac{1}{2}(e_{n+j} + \mathrm{i}\, Ie_{n+j}); j = 1, \ldots, n \right\rangle_{\mathbb{C}}. \tag{2.13}$$

簡単のため $w_j := \bar{z}_{n+j}$, $j = 1, \ldots, n$，とおき，$V = \mathrm{Mat}_{n\times 2}(\mathbb{C})$ の元を $[z, w]$, $z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$, $w = {}^t(w_1, \ldots, w_n)$，と記すことにする．

さて，運動量写像の一番目の表示式 (2.6a) を用いて，(2.11) に従い μ を量子化しよう．すなわち，(2.6a) 中の $z_i, \bar{z}_i$ を，規則 (2.11) により，それぞれ，作用素 $\widehat{z_i}, \widehat{\bar{z}_i}$ に単に置き換える．得られた行列を $\widehat{\mu}$ とおく:

$$\widehat{\mu} := -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\begin{bmatrix}\widehat{z_1}\\ \vdots\\ \widehat{z_{2n}}\end{bmatrix}(\widehat{\bar{z}}_1,\ldots,\widehat{\bar{z}}_{2n})\,I_{n,n} - S\,I_{n,n}\begin{bmatrix}\widehat{\bar{z}}_1\\ \vdots\\ \widehat{\bar{z}}_{2n}\end{bmatrix}(\widehat{z_1},\ldots,\widehat{z_{2n}})\,S\right)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\begin{bmatrix}z\\ -2\partial_w\end{bmatrix}\left(-2\,{}^t\partial_z,\,{}^tw\right)I_{n,n} - S\,I_{n,n}\begin{bmatrix}-2\partial_z\\ w\end{bmatrix}\left({}^tz,-2\,{}^t\partial_w\right)S\right)$$

$$= \mathrm{i}\begin{bmatrix}z\,{}^t\partial_z + w\,{}^t\partial_w & \frac{1}{2}(z\,{}^tw - w\,{}^tz)\\ 2(\partial_z\,{}^t\partial_w - \partial_w\,{}^t\partial_z) & -(\partial_w\,{}^tw + \partial_z\,{}^tz)\end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

ただし $z = {}^t(z_1,\ldots,z_n), w = {}^t(w_1,\ldots,w_n), \partial_z = {}^t(\partial_{z_1},\ldots,\partial_{z_n}), \partial_w = {}^t(\partial_{w_1},\ldots,\partial_{w_n})$ とおいた．第二表示 (2.6b) の量子化

$$\widehat{\mu} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}\widehat{v}_+\,{}^t\widehat{\bar{v}}_+ & -\widehat{v}_+J_1\,{}^t\widehat{v}_+\\ -\widehat{\bar{v}}_+J_1\,{}^t\widehat{\bar{v}}_+ & -\widehat{\bar{v}}_+J_1\,{}^t\widehat{v}_+,\end{bmatrix} \tag{2.15}$$

も (2.14) と同一の結果を導く（ただし $\widehat{v}_+ = [z,w], \widehat{\bar{v}}_+ = [-2\partial_z,-2\partial_w]$ ）．

V 上の多項式函数全体のなす $\mathbb{C}$-代数を $\mathcal{P}(V)$，すなわち $\mathcal{P}(V) = \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n,w_1,\ldots,w_n]$，$V$ 上の多項式係数微分作用素全体のなす環を $\mathcal{PD}(V)$ とする．V には右から

$$\mathrm{Sp}_1 = \{g \in \mathrm{GL}_2;\ {}^tgJ_1g = J_1\}$$

が作用し，従って右正則作用により $\mathcal{P}(V)$ に作用する．後者の作用を ρ とかく．Sp_1 の V への右作用は注意 2.1 (ii) で言及した $\mathrm{Mat}_{n\times 2}(\mathbb{C})$ の V への作用と同一である．

定理 2.3. $X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$ に対し，$\pi(X) = \mathrm{i}\,\langle\widehat{\mu}, X\rangle$ とおくと，

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathcal{PD}(V)$$

は Lie 代数の準同型を与える．基底 (1.3) に対する表現作用素の具体的な形は

$$\pi(X) = \begin{cases}-(z_j\partial_{z_i} + w_j\partial_{w_i} + \delta_{i,j}) & \text{if}\quad X = X^0_{i,j};\\ 2\,(\partial_{z_i}\partial_{w_j} - \partial_{w_i}\partial_{z_j}) & \text{if}\quad X = X^+_{i,j};\\ \frac{1}{2}\,(z_jw_i - w_jz_i) & \text{if}\quad X = X^-_{i,j}\end{cases} \tag{2.16}$$

となる．さらに，$\pi(X)$ は Sp_1 の作用と可換である．

証明． 次節で W の k 箇の直和を考えるので，この定理の証明は系 3.3 でまとめて行う．□

3 Howe 双対性

次に $W=(\mathbb{C}^{2n})_{\mathbb{R}}$ の k 箇の直和 W^k を考えれば $W^k=\mathrm{Mat}_{2n\times k}(\mathbb{C})$ と同一視できる．このとき W^k は

$$\omega_k(u,v)=\operatorname{Im}\operatorname{tr}(u^* I_{n,n} v) \quad (u,v\in W^k),$$

で定まるシンプレクティック型式 ω_k を持ち，$G=\mathrm{O}^*(2n)$ によるシンプレクティックな左作用を持つ．$e_{i,a}\in\mathrm{Mat}_{2n\times k}(\mathbb{C})$ を $2n\times k$ 次の行列単位とするとき，同一視 $e_{i,a}\leftrightarrow\partial_{x_{i,a}}$, $\mathrm{i}\,e_{i,a}\leftrightarrow\partial_{y_{i,a}}$ の下，W^k の元を $v={}^t[v_1,\dots,v_{2n}]\in\mathrm{Mat}_{2n\times k}(\mathbb{C})$, $v_i=x_i+\mathrm{i}\,y_i$, $x_i=(x_{i,1},\dots,x_{i,k})$, $y_i=(y_{i,1},\dots,y_{i,k})$ $(i=1,\dots,2n)$ と書けば，ω_k は

$$\omega_k=\sum_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant a\leqslant k}(\mathrm{d}x_{i,a}\wedge\mathrm{d}y_{i,a}-\mathrm{d}x_{n+i,a}\wedge\mathrm{d}y_{n+i,a}) \tag{3.1}$$

で与えられる．さらに，(2.2) および (2.4) で定義した $\mathbb{C}$-同型 ϕ_1 および ϕ_2 は，自然に $(\mathbb{H}^n)^k$ と $\mathrm{Mat}_{2n\times k}(\mathbb{C})$ および $(\mathbb{H}^n)^k$ と $\mathrm{Mat}_{n\times 2k}(\mathbb{C})$ との同型に拡張する．これらも同じ記号で表せば，$\phi_2\circ\phi_1^{-1}$ を通して $\mathrm{Sp}(k)$ が W^k に右から作用する．

命題 3.1. (W^k,ω_k) を上で与えたシンプレクティック G-ベクトル空間とすると，運動量写像 $\mu:W^k\to\mathfrak{g}_0^*\simeq\mathfrak{g}_0$ は (2.6) と同じ式で与えられる．すなわち，$v=\left[\begin{smallmatrix}v'\\v''\end{smallmatrix}\right]\in W^k$, $v',v''\in\mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{C})$，に対し

$$\begin{aligned}\mu(v)&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(v\,v^* I_{n,n}-S\,{}^t(v\,v^* I_{n,n})S\right)\\&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}v_+v_+^* & -v_+J_k\,{}^tv_+\\ -\bar v_+J_kv_+^* & -\bar v_+\,{}^tv_+\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし $v_+=(\phi_2\circ\phi_1^{-1})(v)\in\mathrm{Mat}_{n\times 2k}(\mathbb{C})$. 特に μ は G-同変，かつ，$\mathrm{Sp}(k)$-不変である．

証明． 命題 2.2 の証明を適当に解釈すれば，それがそのまま通用する． □

(3.1) より $\mathbb{R}$-値座標函数 $x_{i,a},y_{i,a}$ 間の Poisson 括弧積は

$$\{x_{i,a},y_{j,b}\}=-\delta_{i,j}\delta_{a,b},\quad \{x_{n+i,a},y_{n+j,b}\}=\delta_{i,j}\delta_{a,b} \tag{3.3}$$

となるので，$\mathbb{C}$-値座標函数の間のそれは

$$\{z_{i,a},\bar z_{j,b}\}=\{\bar z_{n+i,a},z_{n+j,b}\}=2\mathrm{i}\,\delta_{i,j}\delta_{a,b} \tag{3.4}$$

となる（ただし $i,j=1,\dots,n; a,b=1,\dots,k$，その他の組合せはすべて自明）．従って $z_{i,a}$ および $\bar{z}_{i,a}$ を次のように量子化する：

$$\begin{aligned} \widehat{z_{i,a}} &= z_{i,a}, & \widehat{\bar{z}_{i,a}} &= -2\partial_{z_{i,a}}, \\ \widehat{\bar{z}_{n+i,a}} &= \bar{z}_{n+i,a}, & \widehat{z_{n+i,a}} &= -2\partial_{\bar{z}_{n+i,a}}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

このとき

$$[\widehat{z_{i,a}}, \widehat{\bar{z}_{j,b}}] = [\widehat{\bar{z}_{n+i,a}}, \widehat{z_{n+j,b}}] = 2\delta_{i,j}\delta_{a,b} \tag{3.6}$$

と所期の結果を得る（ただし $i,j=1,\dots,n; a,b=1,\dots,k$）．

V を (2.13) のようにとり，その k 箇の直和を V^k とすると，V^k は $\mathrm{Mat}_{n\times 2k}(\mathbb{C})$ と同一視できる．そこで，簡単のために $w_{i,a}=\bar{z}_{n+i,a}$（$i=1,\dots,n; a=1,\dots,k$）とおき，V^k の元を $[z,w]$, $(z=(z_{i,a}), w=(w_{i,a})\in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{C}))$ と書くことにする．また V^k 上の多項式函数全体のなす $\mathbb{C}$-代数を $\mathcal{P}(V^k)=\mathbb{C}[z_{i,a},w_{i,a}; i=1,\dots,n, a=1,\dots,k]$，$V^k$ 上の多項式係数微分作用素環を $\mathcal{PD}(V^k)$ と記す．このとき，複素シンプレクティック群 Sp_k が V^k に右から作用し，従って $\mathcal{P}(V^k)$ に右正則表現で作用する．これをいつものように ρ と書く．

補題 3.2. $x=(x_{i,a})_{i=1,\dots,n;a=1,\dots,2k}\in V^k$ および $g\in \mathrm{GL}_{2k}$ に対し，次の関係式が $\mathrm{End}\big(\mathcal{P}(V^k)\big)$ において成り立つ：

$$\rho(g)^{-1}\partial_{x_{i,a}}\rho(g) = \sum_b g_{ab}\partial_{x_{i,b}}, \tag{3.7}$$

$$\rho(g)^{-1}x_{i,a}\rho(g) = \sum_b g^{ba}x_{i,b}. \tag{3.8}$$

ただし $g=(g_{ab})$ および $g^{-1}=(g^{ab})$ とする．

証明． $\partial_{x_{i,a}} \leftrightarrow e_{i,a}\in \mathrm{Mat}_{n\times 2k}(\mathbb{R})$ と同一視しているので，

$$(\partial_{i,a}(\rho(g)f))(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(xg+te_{i,a}g) = \sum_{b=0}^{2k} g_{ab}\frac{\partial f}{\partial x_{i,b}}(xg),$$

従って

$$\left(\rho(g)^{-1}\partial_{x_{i,a}}\rho(g)\right)f = \sum_{b=1}^{2k} g_{ab}\frac{\partial f}{\partial x_{i,b}} \quad (f\in\mathcal{P}(V^k))$$

となり，(3.7) を得る．

他方，

$$\left(\rho(g)^{-1}(x_{i,a}f)\right)(x) = \left(\sum_{b=1}^{2k} x_{i,b}g^{ba}\right)f(xg^{-1})$$

なので

$$\Big(\rho(g)^{-1}x_{i,a}\,\rho(g)\Big)f = \Big(\sum_{b=1}^{2k} g^{ba}x_{i,b}\Big)f,$$

ゆえに (3.8) を得る. □

$a \in \mathcal{PD}(V^k)$ と $g \in \mathrm{GL}_{2k}$ に対して，$\rho(g)\,a\,\rho(g)^{-1} =: \mathrm{Ad}_{\rho(g)}\,a$ と略記し，さらに，$\mathcal{PD}(V^k)$ の元を成分にもつ行列 $A = (a_{ij})$ に対し，$\mathbf{Ad}_{\rho(g)}A = (\mathrm{Ad}_{\rho(g)}\,a_{ij})$ と書こう.

量子化された行列 $\widehat{\mu}$ は (2.14) と同じ式で与えられる：

$$\widehat{\mu} = \mathrm{i}\begin{bmatrix} z\,{}^t\partial_z + w\,{}^t\partial_w & \frac{1}{2}(z\,{}^tw - w\,{}^tz) \\ 2(\partial_z\,{}^t\partial_w - \partial_w\,{}^t\partial_z) & -(\partial_w\,{}^tw + \partial_z\,{}^tz) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

ただし， z (resp. w) および ∂_z (resp. ∂_w) はその (i,a) 成分がそれぞれ掛算作用素 $z_{i,a}$ (resp. $w_{i,a}$)，微分作用素 $\partial_{z_{i,a}}$ (resp. $\partial_{w_{i,a}}$) を成分とする $n\times k$ 行列を表す.

系 3.3. $X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$ に対し，$\pi(X) = \mathrm{i}\,\langle\widehat{\mu}, X\rangle$ とおくと，

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathcal{PD}(V)$$

は Lie 代数の準同型を与える．基底 (1.3) に対する表現作用素の具体的な形は

$$\pi(X) = \begin{cases} -\sum_{a=1}^{k}(z_{j,a}\partial_{z_{i,a}} + w_{j,a}\partial_{w_{i,a}} + k\delta_{i,j}) & \text{if} \quad X = X^0_{i,j}; \\ 2\sum_{a=1}^{k}(\partial_{z_{i,a}}\partial_{w_{j,a}} - \partial_{w_{i,a}}\partial_{z_{j,a}}) & \text{if} \quad X = X^+_{i,j}; \\ \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{k}(z_{j,a}w_{i,a} - w_{j,a}z_{i,a}) & \text{if} \quad X = X^-_{i,j}. \end{cases} \tag{3.10}$$

さらに，$\pi(X)$ は Sp_k の作用と可換である.

証明． もちろん (3.10) が $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X^{\star}_{ij}\}$ が満たす交換関係と同一であることを示せば十分であるが，ここでは別証明を与える．$X \in \mathfrak{g}_0$ に対し $H_X := \langle\mu, X\rangle$ とおけば，運動量写像 μ により $\mathfrak{g}_0 \to C^\infty(W), X \mapsto H_X$ が Lie 環の準同型

$$\{H_X, H_Y\} = H_{[X,Y]} \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}_0). \tag{3.11}$$

となることに注意．次に，Poisson 括弧積，交換子積ともに derivation であること，および，(2.7) からわかるように各 H_X が座標函数 x_i, y_j に関して 2 次で，$\widehat{x_i}$ と $\widehat{y_j}$ の交換子積が $\mathcal{PD}(V)$ の中心元であることに注意すれば，(3.11) より

$$[\pi(X), \pi(Y)] = \pi([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g}_0)$$

がわかる．あとは線形性により $\mathfrak{g}$ にまで拡張する.

次に $\pi(X)$ が Sp_k の右作用と可換であることを示す．$\widehat{\mu}$ の 2 番目の表示式 (2.15) と補題 3.2 より，$g \in \mathrm{GL}_{2k}$ に対し，

$$\mathbf{Ad}_{\rho(g)^{-1}}\widehat{v}_+ = \widehat{v}_+ g^{-1} \quad \text{および} \quad \mathbf{Ad}_{\rho(g)^{-1}}\widehat{\bar{v}}_+ = \widehat{\bar{v}}_+ {}^t g.$$

従って，$g \in \mathrm{Sp}_k$ ならば ${}^t g J_k g = J_k$ なので

$$\begin{aligned}\mathbf{Ad}_{\rho(g)^{-1}}\widehat{\mu} &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} \widehat{v}_+ g^{-1}\, {}^t(\widehat{\bar{v}}_+ {}^t g) & -\widehat{v}_+ g^{-1} J_k\, {}^t(\widehat{v}_+ g^{-1}) \\ -\widehat{\bar{v}}_+ {}^t g J_k\, {}^t(\widehat{\bar{v}}_+ {}^t g) & -\widehat{\bar{v}}_+ {}^t g\, {}^t(\widehat{v}_+ g^{-1}) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} \widehat{v}_+ {}^t \widehat{\bar{v}}_+ & -\widehat{v}_+ J_k {}^t \widehat{v}_+ \\ -\widehat{\bar{v}}_+ J_k {}^t \widehat{\bar{v}}_+ & -\widehat{\bar{v}}_+ {}^t \widehat{v}_+ \end{bmatrix} = \widehat{\mu}\end{aligned}$$

となり，これで証明おしまい． □

さて，よく知られているように，簡約好一対 $(\mathfrak{o}_{2n}, \mathrm{Sp}_k)$ の作用の下で $\mathcal{P}(V^k)$ を既約分解すると

$$\mathcal{P}(V^k) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \widehat{\mathrm{Sp}_k},\, L(\sigma) \neq \{0\}} L(\sigma) \otimes V_\sigma, \tag{3.12}$$

となる．ここに $\widehat{\mathrm{Sp}_k}$ は Sp_k の有限次元既約表現同型類の全体，V_σ は $\sigma \in \widehat{\mathrm{Sp}_k}$ の代表元，$L(\sigma) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}_k}(V_\sigma, \mathcal{P}(V^k))$ は $\mathfrak{o}_{2n}$ の無限次元既約表現で，$\sigma \neq \tau \implies L(\sigma) \neq L(\tau)$ を満たす．また $\pi|_{\mathfrak{k}}$ は $K_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{GL}_n$ の表現に持ち上がり，従って各 $L(\sigma)$ は既約な $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群となる (例えば [7] を参照).

4 有限次元表現

本節では，これまでと異なる次の複素 Lagrangian 部分空間 $V' \subset W_{\mathbb{C}}$ を考える：

$$V' := \left\langle \tfrac{1}{2}(e_1 - \mathrm{i}\, Ie_1), \ldots, \tfrac{1}{2}(e_{2n} - \mathrm{i}\, Ie_{2n}) \right\rangle_{\mathbb{C}}. \tag{4.1}$$

ここで I は §2 で考えたのと同じ W 上の複素構造である．この複素 Lagrangian 部分空間 V' に対応する正準量子化を

$$\widehat{z_i} = z_i, \quad \widehat{\bar{z}_i} = -2\epsilon_i \partial_{z_i} \qquad (i = 1, \ldots, 2n) \tag{4.2}$$

により行う．当然のことながら今の場合も (3.6) が成り立つ．(4.2) により量子化された運動量写像を，これまでと同じく $\widehat{\mu}$ と書くことにすると，

$$\widehat{\mu} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\begin{bmatrix} \widehat{z_1} \\ \vdots \\ \widehat{z_{2n}} \end{bmatrix} (\widehat{\bar{z}_1}, \ldots, \widehat{\bar{z}_{2n}}) I_{n,n} - S I_{n,n} \begin{bmatrix} \widehat{\bar{z}_1} \\ \vdots \\ \widehat{\bar{z}_{2n}} \end{bmatrix} (\widehat{z_1}, \ldots, \widehat{z_{2n}}) S \right)$$
$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\begin{bmatrix} z' \\ z'' \end{bmatrix} (-2\,{}^t\partial_{z'}, 2\,{}^t\partial_{z''}) I_{n,n} - S I_{n,n} \begin{bmatrix} -2\partial_{z'} \\ 2\partial_{z''} \end{bmatrix} ({}^tz', {}^tz'') S \right)$$
$$= -\mathrm{i} \begin{bmatrix} -z'\,{}^t\partial_{z'} + \partial_{z''}\,{}^tz'' & -z'\,{}^t\partial_{z''} + \partial_{z''}\,{}^tz' \\ -z''\,{}^t\partial_{z'} + \partial_{z'}\,{}^tz'' & -z''\,{}^t\partial_{z''} + \partial_{z'}\,{}^tz' \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

となる．ただし $z' = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$, $z'' = {}^t(z_{n+1}, \ldots, z_{2n})$, $\partial_{z'} = {}^t(\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_n})$, $\partial_{z''} = {}^t(\partial_{z_{n+1}}, \ldots, \partial_{z_{2n}})$ である．故に $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$ の基底 (1.3) について，$\pi(X) := \mathrm{i}\,\langle \widehat{\mu}, X \rangle$ は

$$\pi(X) = \begin{cases} z_j\,\partial_{z_i} - z_{n+i}\,\partial_{z_{n+j}} & \text{if} \quad X = X^0_{i,j}; \\ z_{n+j}\,\partial_{z_i} - z_{n+i}\,\partial_{z_j} & \text{if} \quad X = X^+_{i,j}; \\ z_i\,\partial_{z_{n+j}} - z_j\,\partial_{z_{n+i}} & \text{if} \quad X = X^-_{i,j} \end{cases} \tag{4.4}$$

で与えられる．各表現作用素 $\pi(X)$ は斉次多項式の次数を保つので，$\mathcal{P}(V')$ の既約分解に現れる既約 $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$ は有限次元となることがわかる．

同様に k 箇の直和 V'^k を考えた場合も，$\mathcal{P}(V'^k)$ の既約分解に現れる既約 $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群は有限次元であることがわかる．

5 随伴多様体

最後に，運動量写像と $\mathcal{P}(V^k)$ あるいは $\mathcal{P}(V'^k)$ の既約分解に現れる既約 $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群の随伴多様体との関係についての一観察を述べて本稿を終える．

まず $\mathfrak{p}^+$ の $K_{\mathbb{C}}$-軌道分解を

$$\mathfrak{p}^+ = \bigsqcup_{j=0}^{r} \mathcal{O}^{K_{\mathbb{C}}}_j \quad (r := \mathbb{R}\text{-}\operatorname{rank} G = \lfloor n/2 \rfloor) \tag{5.1}$$
$$\mathcal{O}^{K_{\mathbb{C}}}_j = \left\{ \begin{bmatrix} O & C \\ O & O \end{bmatrix} \in \mathfrak{g};\ {}^tC + C = O,\ \operatorname{rank} C = 2j \right\} \tag{5.2}$$

とする．このとき，閉包を $\overline{}$ で表すことにすれば，

$$\overline{\mathcal{O}^{K_{\mathbb{C}}}_j} = \bigsqcup_{i \leqslant j} \mathcal{O}^{K_{\mathbb{C}}}_i = \left\{ \begin{bmatrix} O & C \\ O & O \end{bmatrix} \in \mathfrak{g};\ {}^tC + C = O,\ \operatorname{rank} C \leqslant 2j \right\} \tag{5.3}$$

となることが知られている（例えば [5, 7, 8] を参照）．

さて，$W_{\mathbb{C}}^k$ の元は $v = \begin{bmatrix} v' \\ v'' \end{bmatrix} = (z_{i,a})$ と $\tilde{v} = \begin{bmatrix} \tilde{v}' \\ \tilde{v}'' \end{bmatrix} = (\tilde{z}_{i,a})$ の組（ただし $z_{i,a}, \tilde{z}_{i,a} \in \mathbb{C}$）で与えられるが，§3 の記法で表される V^k の元 $[z, w]$ は，これらの記法では $v = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$ に，また §4 の記法で表される V'^k の元 $\begin{bmatrix} z' \\ z'' \end{bmatrix}$ は，$v = \begin{bmatrix} z' \\ z'' \end{bmatrix}, \tilde{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ にそれぞれ対応することに注意.

運動量写像 $\mu : W^k \to \mathfrak{g}_0$ は $W_{\mathbb{C}}$ から $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ への写像に一意的に拡張する．これを $\mu_{\mathbb{C}} : W_{\mathbb{C}}^k \to \mathfrak{g}$ と書く．このとき，命題 2.2 の証明中の (2.9) より

$$\mu_{\mathbb{C}}(v) = -\frac{\mathrm{i}}{2} \begin{bmatrix} v' \, {}^t\tilde{v}' + \tilde{v}'' \, {}^tv'' & -v' \, {}^t\tilde{v}'' + \tilde{v}'' \, {}^tv' \\ -\tilde{v}' \, {}^tv'' + v'' \, {}^t\tilde{v}' & -\tilde{v}' \, {}^tv' - v'' \, {}^t\tilde{v}'' \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

となる．従って，

$$\mu_{\mathbb{C}}(V'^k) = \overline{\mathcal{O}_0^{K_{\mathbb{C}}}} = \{0\}, \quad \mu_{\mathbb{C}}(V^k) = \overline{\mathcal{O}_m^{K_{\mathbb{C}}}} \tag{5.5}$$

が成り立っている．ここで $m = \min(k, r)$ とおいた.

故に，§§3 および 4 に登場した有限次元 $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群および $L(\sigma)$ の随伴多様体がそれぞれ $\{0\}$ および $\overline{\mathcal{O}_m^{K_{\mathbb{C}}}}$ に等しい (cf. [5, 7, 8]) ことに注意すれば，複素 Lagrangian 部分空間 V^k または V'^k の $\mu_{\mathbb{C}}$ による像は，$\mathcal{P}(V'^k)$ または $\mathcal{P}(V^k)$ の既約分解に現れる $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群の随伴多様体に一致することがわかる.

参考文献

[1] Chriss, N., Ginzburg, V.: Representation theory and complex geometry. Birkhäuser (1997)

[2] Goodman, R., Wallach, N.W.: Symmetry, representations and invariants, *Graduate Texts in Math.*, vol. 255. Springer Verlag (2010)

[3] Hashimoto, T.: The moment map on symplectic vector space and oscillator representation (2014). ArXiv:1408.6597 [math.RT]

[4] Helgason, S.: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, *Pure and App. Math.*, vol. 80. Academic Press (1978)

[5] Nishiyama, K., Ochiai, H., Taniguchi, K.: Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules—Hermitian symmetric case. Astérisque (273), 13–80 (2001). Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations

[6] Woodhouse, N.: Geometric quantization. Oxford Univ. Press (1991)

[7] Yamashita, H.: Cayley transform and generalized Whittaker models for irreducible highest weight modules. Astérisque (273), 81–137 (2001). Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations

[8] 山下 博: 簡約リー群の表現と冪零軌道, **東京大学数理科学レクチャーノート**, vol. 3. 東京大学大学院数理科学研究科 (2008). 阿部 紀行 記

Takashi Hashimoto
University Education Center, Tottori University,
4-101, Koyama-Minami, Tottori, 680-8550, JAPAN.
e-mail: thashi@uec.tottori-u.ac.jp