数理解析研究所講究録
第 1925 巻 2014 年 148-156

Zeta function of the braid group, and the Alexander polynomial

九州大学・数理学府　岡本　健太郎
Okamoto Kentaro
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 Introduction

ゼータ関数といえば、Riemann のゼータ関数をはじめ、Selberg ゼータ関数や合同ゼータ関数など数多くの種類のゼータ関数が考えられ、研究されている。また、特有の性質として Euler 積表示、関数等式、行列式表示などが挙げられる。本稿では、これらの基本的性質のうち「行列式表示」に重点を置き、表現を使った行列式によりゼータ関数を定義した。そこで、よく知られている (例えば、[6] 参照) 対称群の置換表現から定まる“原型ゼータ関数”の拡張として、組み紐群の表現を用いた新しいゼータ関数を定義する。そして、このゼータ関数の留数に結び目の古典的な多項式不変量である、Alexander 多項式が現れることを示した。

2 対称群の元から定義されるゼータ関数

まず、モデルとなる“原型ゼータ関数”を定義する ([6])。

定義 2.1. X を有限集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ とし、n 次対称群 S_nが作用しているとする。S_nの元σの不動点集合を $\mathrm{Fix}(\sigma) = \{x \in X; \sigma(x) = x\}$ と書く。このとき、複素数 s に対し**原型ゼータ関数**を次のように定義する。

$$\zeta_\sigma(s) := \exp\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#\mathrm{Fix}(\sigma^m)}{m} s^m\}$$

このゼータ関数は、複素平面内の単位開円板 $D^2 := \{s \in \mathbb{C}; |s| < 1\}$ 上で定義される。更に、この不動点集合の元の個数はσの置換行列のトレースに等しいことから、$M_n : S_n \to GL_n(\mathbb{Z})$ を置換表現として$\zeta_\sigma(s)$ は次のように表せる。

$$\zeta_\sigma(s) = \det(I_n - M_n(\sigma)s)^{-1}$$

この表示により、原型ゼータ関数は全複素平面上に解析接続される。
注) 一般に、群 G の元 g とその表現 $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$ に関して定まる**表現のゼータ関数** $\zeta_g(s)$ を、

$$\zeta_g(s) := \det(I - \rho(g)s)^{-1}$$

で定義しておく。これにより原型ゼータ関数は表現のゼータ関数の一つの例であると思える。

$\sigma \in S_n$が巡回的かつ長さが n であるときσは **full cyclic** であると呼ぶことにする。このとき、$M_n(\sigma)$ は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

と共役になることから $\zeta_\sigma(s)$ は明示的に,$\zeta_\sigma(s) = (1 - s^n)^{-1}$と書ける。この場合、$\zeta_\sigma(s)$ は $s = 1$ が 1 位の極となり、次が成り立つ。
命題 2.2. $\sigma \in S_n$がfull cyclicなとき、

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_\sigma(s) = -\frac{1}{n}$$

Dedekind のゼータ関数 $\zeta_K(s)$ の留数には代数体 K の不変量である類数や判別式が現れる。このように、ゼータ関数の留数には何かしらの不変量が現れることが多い。実際、原型ゼータ関数$\zeta_\sigma(s)$ の留数には$\sigma \in S_n$ の不変量である、長さ n が現れた。しかし、長さ以外のσの特徴は現れない。そこで、対称群の (ある意味で) 拡張である組み紐群に対して同様の議論を行い、留数の部分がどのような形になるかを対称群と照らし合わせて考察する。

3 組み紐群と絡み目の関係

この節では、組み紐、結び目に関する標準的な事柄を [3]、[4]、[5] から引用する。組み紐とは、3 次元空間内に平行に置かれた二つの異なる円板 D、C において、D 上の n 個の始点と C 上の n 個の終点を n 本の紐でつなげたものである（図 1）。但し、紐は D から C へ単調に下ろさなければならない。また、以降は簡単のため、図 2 のように組み紐を表示する。

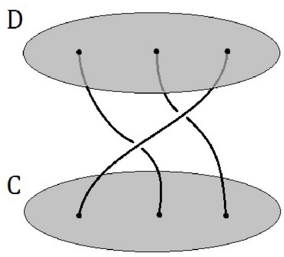


図 1: 組み紐の例

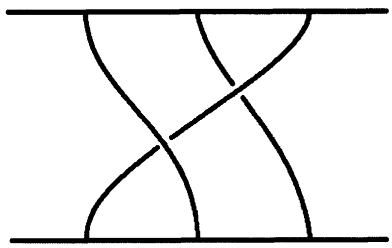
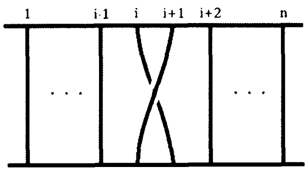


図 2: 組み紐の表示

さらに、このような n 本の紐からなる組み紐全体の集合は、下に同じ本数の組み紐をつなげることを演算とし、ホモトピー同値を入れることで群になる。これを n **次組み紐群**といい、B_n と書く。また、



を σ_i と定めると、$\sigma_i(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ は n 次組み紐群 B_n の生成元となり、次のような関係式によって特徴付けられることが知られている。

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad (|i-j| \geq 2)$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-2)$$

また、組み紐群と対称群の間には次のような自然な全射準同型が定義できる。

$$\pi_n : B_n \to S_n \qquad \pi_n(\sigma_i) := (i, i+1)$$

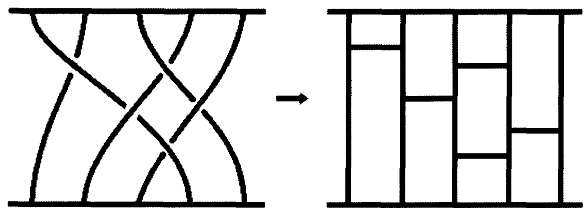


図 3: 組み紐とあみだくじ

上図のように、組み紐表示とあみだくじ表示を比べると対応がわかりやすい。つまり、π_nは紐の上下の違いをなくす写像と思える。

ここで、$\mathrm{Ker}\pi_n := P_n$を n **次純組み紐群**と呼び、次のような短完全列が得られる。

$$1 \to P_n \to B_n \to S_n \to 1 \quad \text{(exact)}$$

次に、組み紐群と絡み目の関係を、" 閉包 " と " Markov 同値 " により記述する。

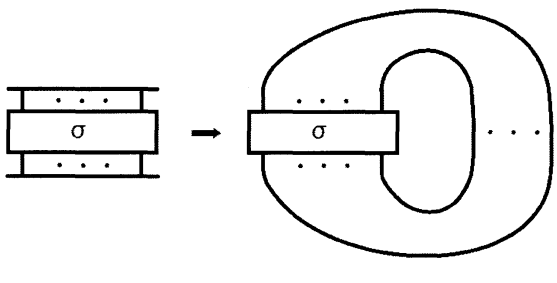


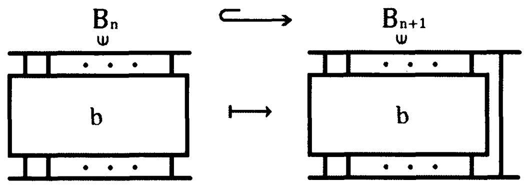
図 4: 組み紐の閉包

σを与えられた組み紐群 B_nの元とする。この組み紐の始点と終点を上の図のようにつなげることにより、絡み目$\hat{\sigma}$を作る。これをσの**閉包**という。但し、**成分数** n **の絡み目**とは n 本 $(n \geq 1)$ の単位円周 S^1を、3 次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$(あるいは 3 次元球面 S^3) 内に埋め込んだ、n 本の単純閉曲線のことをいい、特に成分数が 1 のときを**結び目**と呼ぶ。

さらに、組み紐群の和集合を

$$\mathfrak{B} := \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} B_n$$

と定める。但し、下図のように、$n{+}1$ 本目の紐を増やすことで包含写像を定め、$B_n \subset B_{n+1}$ であると考える。



この $\mathfrak{B}$ の中で、次のような同値関係を考える。

b,b$'$ $\in \mathfrak{B}$ が次の操作 $(m.1)$、$(m.2)$ を有限回施すことによって移りあうとき、b と b$'$は **Markov 同値**であるといい、b $\sim$ b$'$と書く。
但し、b $\in B_n$とする。

$(m.1)$ 任意の$\gamma \in B_n$に対して、b をγ^{-1}bγに移す。

(m.2) b $\in B_n \hookrightarrow B_{n+1}$を$\sigma_n{}^{\pm 1}$b に移す。

以上の定義を用いて、組み紐群と絡み目の関係を表す古典的な定理を述べる ([2]、[3],Chapter.8,Theorem 4.1,Chapter.9,Theorem 1.1)。

定理 3.1.(Alexander, Markov)
閉包から自然に得られる写像

$$\psi : \mathfrak{B}/\sim \;\to \{\text{ 絡み目 }\}$$

は全単射となる。但し、{ 絡み目 } とは絡み目全体の集合で、通常の絡み目の同値関係で割っているものとする。

この結果により、組み紐を研究することで、絡み目・結び目の性質を調べることができる。

4 組み紐群のゼータ関数

Burau は、組み紐群の有限次元表現として Burau 表現を与えた。この表現は、結び目 K の S^3での補空間における基本群$\pi_1(S^3 \setminus K)$、Fox の自由微分、Magnus 準同型を用いて計算される ([1],Chapter.3を参照)。

定義 4.1([3]) B_nの表現ρ_nを、次のように定める。

$$\rho_n : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}\left[q^{\pm 1}\right])$$

$$\rho_n(\sigma_i) := \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & \\ & 1-q & q & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

但し、$\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ は q を不定元とする $\mathbb{Z}$ 係数の 1 変数 Laurant 多項式環である。このρ_nを **Buaru 表現**という。

注 1) ρ_nは準同型であり、$\rho_n(\sigma_i)(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ は B_nの 2 つの関係式を満たす。よって表現ρ_nの定義は生成元σ_iのみで十分である。
注 2) 極限 $q \to 1$ を考えると、Burau 表現は置換表現に戻る。このことから、組み紐群と対称群が比較しやすく、次のような 4 つの群準同型に関する可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\pi_n} & S_n \\ \rho_n \downarrow & & \downarrow M_n \\ GL_n(\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]) & \xrightarrow{q \to 1} & GL_n(\mathbb{Z}) \end{array}$$

この表現を使って、与えられた組み紐からゼータ関数を定義できる。

定義 4.2 $\sigma \in B_n$、ρ_nを Burau 表現として、σに関する組み紐群のゼータ関数を、

$$\zeta_\sigma^{\mathrm{Burau}}(s) := \det(I_n - \rho_n(\sigma)s)^{-1}$$

で定義する。これを、**Burau ゼータ関数**と呼ぶ。

まずはこの Burau ゼータ関数が関数等式を満たすことを示す。

命題 4.3 $\sigma \in B_n$に対して、

$$\zeta^{\mathrm{Burau}}_{\sigma^{-1}}(1/s) = \widetilde{sgn}(\sigma)(-s)^n \zeta^{\mathrm{Burau}}_{\sigma}(s)$$

但し、$\widetilde{sgn}(\sigma)$ はσの**符号**といい、$\widetilde{sgn}(\sigma) := \det(\rho_n(\sigma))$ で定義される。

Proof: 定義より、

$$\begin{aligned}\zeta^{\mathrm{Burau}}_{\sigma^{-1}}(1/s) &= \det(I_n - \rho_n(\sigma^{-1})s^{-1})^{-1} \\ &= \det(\rho_n(\sigma))s^n \det(\rho_n(\sigma)s - I_n)^{-1} \\ &= \det(\rho_n(\sigma))s^n(-1)^n \det(I_n - \rho_n(\sigma)s)^{-1}\end{aligned}$$

となり、関数等式が得られる。

注 3)$\sigma = {\sigma_{i_1}}^{e_1}{\sigma_{i_2}}^{e_2}\cdots{\sigma_{i_j}}^{e_j} \in B_n$と表されるとき、

$$\varepsilon(\sigma) := e_1 + e_2 + \cdots + e_j$$

を組み紐σの**指数**といい、$1 \leq i \leq n-1$ に対し、$\det(\rho_n(\sigma_i)) = -q$ であることから、$\widetilde{sgn}(\sigma) = (-q)^{\varepsilon(\sigma)}$となる。

$\sigma \in B_n$に対して$\pi_n(\sigma) \in S_n$がfull cyclicであるとき、σも **full cyclic** であるという。$\sigma \in B_n$がfull cyclicであるとき、$\hat{\sigma}$は結び目となることに注意する。

また、任意のσに対して Burau 表現行列の各行の和は 1 になることが生成元の表現行列から容易にわかる。つまり、表現ρ_nは自明表現$\mathbf{1}$を部分表現として含む。更に、よく知られた結果 ([1], Lemma 3.11.1) から、ρ_nは 1 次元の自明表現$\mathbf{1}$と$n-1$次元の既約表現$\rho_n^{(n-1)}$に直和分解される。(なお、組み紐群の$n-1$次元の既約表現は対称群の既約表現に対応している。)

$$\rho_n = \mathbf{1} \oplus \rho_n^{(n-1)}$$

ここで、$\sigma \in B_n$について、行列式が

$$\begin{aligned}\det(I_n - \rho_n(\sigma)s) &= \det(I_n - \mathbf{1} \oplus \rho_n^{(n-1)}(\sigma)s) \\ &= \det(I_1 - \mathbf{1}(\sigma)s) \cdot \det(I_{n-1} - \rho_n^{(n-1)}(\sigma)s) \\ &= (1-s) \cdot \det(I_{n-1} - \rho_n^{(n-1)}(\sigma)s)\end{aligned}$$

となることに注意する。
そして、Burauにより、この既約表現 $\rho_n^{(n-1)}$ を用いて、結び目$\hat{\sigma}$に関する Alexander 多項式を導き出せることが示されている。
(ここではBirmanによる修正版 [1],Theorem 3.11 を引用する。)

定理 4.4(Burau, Birman) $\sigma_n \in B_n$がfull cyclicであるとき、

$$\det(I_{n-1} - \rho_n^{(n-1)}(\sigma)) = (1 + q + \cdots + q^{n-1}) \cdot \Delta_{\hat{\sigma}}(q)$$

となる。ここで $\Delta_{\hat{\sigma}}(q)$ は結び目$\hat{\sigma}$に関する Alexander 多項式である。

この結果と、Burau ゼータ関数の定義から、次のようにゼータ関数の言葉でまとめられる。

定理 4.5 $\sigma_n \in B_n$がfull cyclicであるとき、

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_\sigma^{\mathrm{Burau}}(s) = -\tfrac{1}{[n]_q} \cdot \{\Delta_{\hat{\sigma}}(q)\}^{-1}$$

ここで、$[n]_q$ は q 整数

$$[n]_q := \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

である。

これにより、結び目の不変量である Alexander 多項式の、ゼータ関数を用いた新しい解釈を得ることができた。さらに、極限 $q \to 1$ を考えて原型ゼータ関数の留数 (命題 2.2) と比べることで Alexander 多項式の、$q = 1$ における値が常に 1 になるという事実 ([4], 命題 6.3.1) も容易に示すことができる。

参考文献

[1] J. S. Birman, Braids, links, and mapping class groups, Annals of Mathematics Studies 82 PrincetonUniversity Press (1975)

[2] J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1923), 275-306

[3] Kunio Murasugi and Bohdan I. Kurpita, A Study of Braid, Kluwer Academic Publishers (1999)

[4] 村杉邦男, 結び目理論とその応用 日本評論社 (1993)

[5] 河野俊丈, 組みひもの数理 遊星社 (2009)

[6] 黒川信重, 小山信也 リーマン予想のこれまでとこれから 日本評論社 (2009)