

# ある反復関数系における塵集合アトラクタ領域について Dust-likeness locus of a contractive linear IFS

藤村 雅代 \*

MASAYO FUJIMURA

防衛大学校 数学教育室

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NATIONAL DEFENSE ACADEMY

## Abstract

We study contractive linear IFS (iterated function system). There has been a lot of work on fractal geometry of self-similar sets, however many of them are study of connectedness locus like a "Mandelbrot set". We investigate dust-likeness locus and give defining equations of boundary algebraic curves of dust-likeness locus of several families explicitly.

## 1 準備

本稿では奈良女子大の青木氏、谷口氏との共同研究 [1] の内容の一部の解説を行う。特に、解析や例の構成において数式処理システムを利用している部分を中心に解説する。

まず、反復関数系に関する用語の定義から始める。詳しくは、[4] や [5] を参照のこと。

### 定義 1

$D$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。写像  $S : D \rightarrow D$  に対して、

$$|S(x) - S(y)| \leq c|x - y| \quad (\forall x, y \in D)$$

をみたす  $c$  ( $0 < c < 1$ ) が存在するとき、 $S$  は **縮小写像** であるという。

さらに、有限個の縮小写像からなる族  $S = \{S_1, \dots, S_m\}$  が生成する半群を **反復関数系 (IFS: Iterated Function System)** と呼ぶ。

$S$  が定める反復関数系に対して、

$$F = \bigcup_{k=1}^m S_k(F) \tag{1}$$

次をみたす集合  $F$  を **アトラクタ** という。以降、省略して  $F$  を  $S$  が定めるアトラクタと呼ぶ。

族  $S$  に対して、(1) をみたす空でないコンパクト集合  $F$  が唯一つ存在することが知られている。すなわち、アトラクターは一意的に定まる。

アトラクタの描画方法は、初期集合を反復するレベルセット法や、点列を計算する方法などが知られている。また、アトラクタが自己相似な場合には、ジェネレータを用いることもできる (図 1 参照)。

---

\*masayo@nda.ac.jp

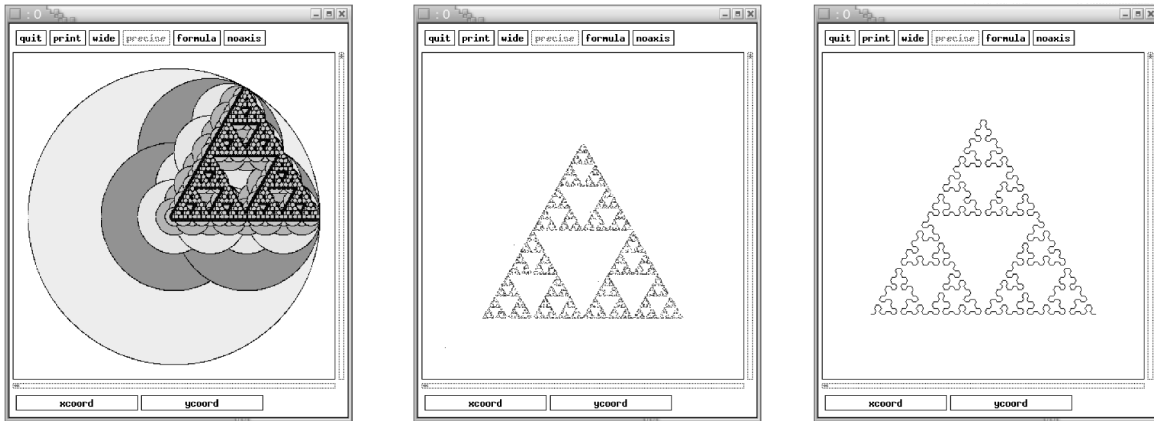


図 1: 族  $\{S_1(z) = \frac{z}{2} + \frac{1+\sqrt{3}i}{4}, S_2(z) = \frac{z}{2}, S_3(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\}$  が定めるアトラクタ (シェルピンスキーガスケツト) の描画例: レベルセット法 (左)、点列の計算による方法 (中)、ジェネレータを使う方法 (右)。

### 定義 2

族  $S$  に対して、 $V \supset \cup_{k=1}^m S_k(V)$  かつ  $S_\ell(V) \cap S_j(V) = \emptyset$  ( $\ell \neq j$ ) をみたす有界開集合  $V$  が存在するとき、 $S$  は開集合条件 (OSC: open set condition) をみたすという。

族  $S$  に対して、すべての  $k$  で  $|S_k(x) - S_k(y)| = c_k|x - y|$  が成立するとき、 $S$  が定めるアトラクターは自己相似になる。さらに、 $S$  が開集合条件をみたせば、

$$\sum_{k=1}^m c_k^s = 1$$

の解  $s$  がアトラクタのハウスドルフ次元を与える。

以下、 $S_k$  は相似縮小写像のみを考える。

### 定義 3

二つの族  $S_1 = \{S_{1,1}, \dots, S_{m,1}\}$ ,  $S_2 = \{S_{1,2}, \dots, S_{m,2}\}$  に対して相似変換  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  が存在して、

$$S_{k,2} = T^{-1} \circ S_{k,1} \circ T \quad (k = 1, \dots, m)$$

が成り立つとき、 $S_1$  と  $S_2$  は共役であるという。

また、 $S = \{S_1, \dots, S_m\}$  が正規形であるとは、 $S_1$  と  $S_2$  の不動点がそれぞれ  $(0, \dots, 0)$ ,  $(1, 0, \dots, 0)$  となることと定める。

アトラクターの形状に関して、次の用語を導入する。

### 定義 4

族  $S$  が定めるアトラクタ  $F$  が塵集合 (dust-like) であるとは、

$$S_k(F) \cap S_j(F) = \emptyset \quad (k \neq j)$$

をみたすこととする。

また、アトラクタが連結かつ局所連結で補集合が連結成分を持たない (穴なし) とき、樹状集合 (dendrite) という。

これから、2 元生成の反復関数系の空間のある切り口を考える。

## 2 塵集合アトラクタ

以降、 $\mathbb{C}$  上で反復関数系を扱うが、 $\mathbb{C}$  を  $\mathbb{R}^2$  と同一視して話を進める。

2元生成の反復関数系に関しては、 $\lambda \in \mathbb{C}$  をパラメータとした族  $\mathcal{M} = \{S_1(z) = \lambda z, S_2(z) = \lambda z + 1\}$  に対して、アトラクタが連結になる部分 (connectedness locus) は、Barnsley 等 (例えば [3]) の研究に始まり、近年まで盛んに研究されている。また、connectedness locus やアトラクタ自身に穴がある例に関して、『穴が実存する』ことを示すのは比較的大変である (Bandt [2] 参照)。

ここでは、アトラクタが塵集合になることに着目する。また、以下の正規形の族の反復関数系を扱う。  
 $r, s \in (0, 1)$  をパラメータとした族

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{r,s} = \{S_1(z) = r\omega_1 z, S_2(z) = s\omega_2(z-1) + 1\}$$

を考える。ただし、 $\omega_k$  ( $k=1, 2$ ) は  $\omega_k^4 = 1$  をみたす値とする。

ここでの目的は以下の2点である。

- 族  $\{\mathcal{S}\}$  の dust-likeness locus (パラメータ空間上の塵集合アトラクタを与える族の共役類からなる集合) を決定する。
- 族  $\{\mathcal{S}\}$  が  $\{\mathcal{M}\}$  と同じくらいに多様な力学的性質を持つことを示す。(例の構成)

### 2.1 $\omega_1, \omega_2 \in \{\pm 1\}$ の場合

$0 < r, s < 1$  に対して、

$$(a-1) \quad \mathcal{S} = \{rz, s(z-1) + 1\},$$

$$(a-2) \quad \mathcal{S} = \{rz, -s(z-1) + 1\},$$

$$(a-3) \quad \mathcal{S} = \{-rz, s(z-1) + 1\},$$

$$(a-4) \quad \mathcal{S} = \{-rz, -s(z-1) + 1\}.$$

の4つの場合を考える。

#### 補題 5

上記の (a-1) ~ (a-4) のいずれの  $\mathcal{S}$  に対しても、 $r + s < 1$  のときに限り、アトラクタ  $F$  は塵集合になる。

**証明** それぞれの  $\mathcal{S}$  に対して、初期集合を

$$(a-1) \quad \text{のとき } I = [0, 1].$$

$$(a-2) \quad \text{のとき } I = [0, 1 + s].$$

$$(a-3) \quad \text{のとき } I = [-r, 1].$$

$$(a-4) \quad \text{のとき } I = \left[ \frac{-r(s+1)}{1-rs}, \frac{s+1}{1-rs} \right].$$

とすればよい。いずれの場合も

$$S_1(I) \cup S_2(I) \subset I$$

をみたし、 $I$  の端点はアトラクタに含まれることは明らかである。

例えば、(a-2) の場合には、反復を行うと図 2 のようになり、反復後の端点が

$$r(1+s) < 1-s^2$$

をみたすとき、すなわち  $r < 1-s$  をみたすときに限り、アトラクタが塵集合になることが分かる。

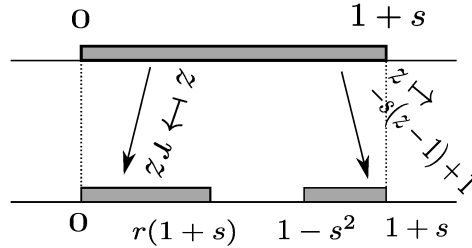


図 2: (a-2) の場合の反復後の形状。

他の場合も、同様にチェックできる。

## 2.2 $\omega_1 \in \{\pm i\}, \omega_2 \in \{\pm 1\}$ の場合

$0 < r, s < 1$  に対して、

$$(b-1) \quad \mathcal{S} = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = s(z-1)+1\}$$

$$(b-2) \quad \mathcal{S} = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = -s(z-1)+1\}$$

の二つの場合を考える。残りの組み合わせは上記のいずれかと共役になるので、これらの場合のみ考えれば十分である。

### 定義 6

複素平面上で左下の頂点の座標が  $a$ , 右上が  $b$  の長方形を  $[[a, b]]$  と表す。

(b-1) の場合、 $\mathcal{S}$  と共役な族

$$(b-1)' \quad \widehat{\mathcal{S}} = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = s(z-1-ir)+1+ir\}$$

の反復関数系を考える。このとき、初期集合を

$$L = [[-r^2 - r^3i, 1+ri]]$$

とおけば、 $S_k(L) \subset L$  ( $k=1, 2$ ) が成り立つ (図 3 の左参照)。さらに、 $L$  の頂点のうちの 3 点

$$-r^2 - r^3i, \quad 1+ri, \quad -r^2 + ri$$

は  $\widehat{\mathcal{S}}$  が定めるアトラクタに含まれることが計算からわかる。

このような「最小の」初期集合を求めることが、今後の議論の鍵となるが、そのため、本研究では数式処理システムを利用している。

具体的には、以下のような計算を行う。(この族の場合は手計算ができるが、今後のため手順を記載する。)

- $S_1 = irz, S_2 = s(z - 1 - t) + 1 + it$  とおく。
- 長方形の頂点の値を左下から反時計まわりに  $A, B, C, D$  とおく。
- 連立方程式

$$S_1(B) = A, \quad S_1(C) = D, \quad S_2(C) = C, \quad \Re A = \Re D, \quad \Re B = \Re C, \quad \Im A = \Im B, \quad \Im C = \Im D$$

を解いて、 $t, A, B, C, D$  を求める。

これにより、 $S$  と共役な族と扱いやすい初期集合のペアが得られる。

(b-1) について次が得られる。

**補題 7**

(b-1) の族  $S$  の定めるアトラクタは  $r^2 + s < 1$  のときに限り塵集合になる。

**証明** 共役をとって (b-1)' の  $\hat{S}$  が定めるアトラクタについて、上の主張が成り立つことを示せばよい。

$r^2 + s < 1$  ならば、 $S_1(L) \cap S_2(L) = \emptyset$  となる (図 3 参照)。逆に  $r^2 + s \geq 1$  ならば、図 4 のように初期集合  $L$  の対角線はアトラクタ  $F$  に含まれることが計算からわかる。したがって、アトラクタは塵集合になり得ない。実際、この場合アトラクタは連結になる。 ■

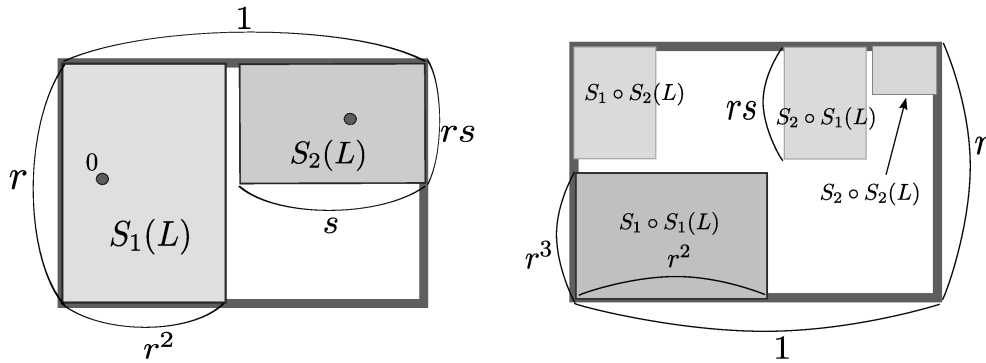


図 3: 初期集合と、その  $S_1, S_2$  による像 (左)。2 回反復後の形状 (右)。図の中の値は “比” を表す。

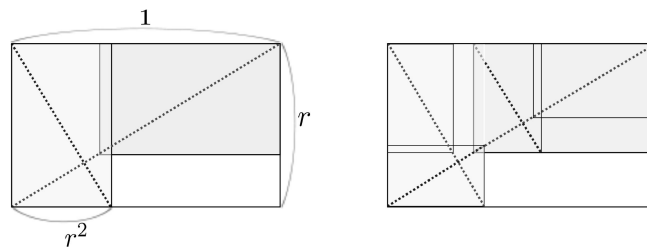


図 4: アトラクタが含む集合 ( $r^2 + s > 1$  の場合)。

$0 < r, s < 1$  に対して、(b-2) の場合も、(b-1) の場合と同じ主張が成り立つ。ただし、 $S$  の共役をとって

$$(b-2)' \quad \hat{S} = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = -s(z - 1 - ir) + 1 + ir\}$$

を考え、初期集合を

$$L: \left[ \left[ \frac{-r^2(1+s) - r^3(1+s)i}{1-r^2s}, \frac{1+s+r(1+s)i}{1-r^2s} \right] \right]$$

とおく。証明の手法は、同じで『絵』だけが変化する (図 5, 6 参照)。

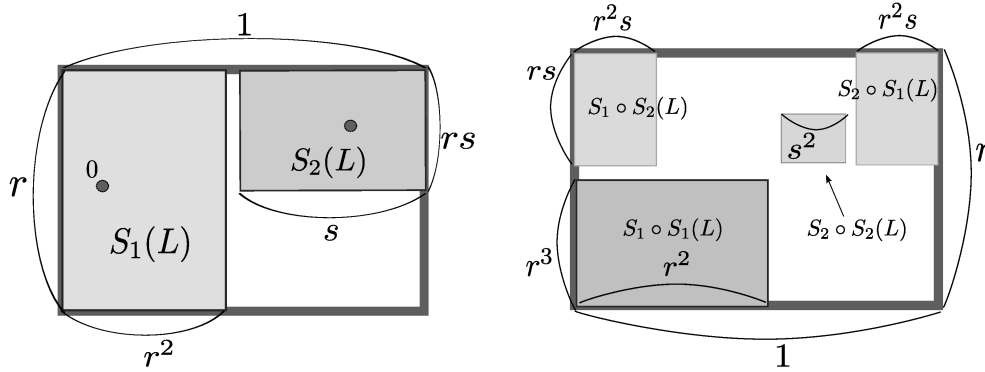


図 5: 初期集合と、その像。左の図は 図 3 と見た目が同じだが、長方形  $S_2(L)$  は回転して上下逆さまになっていることに注意する。

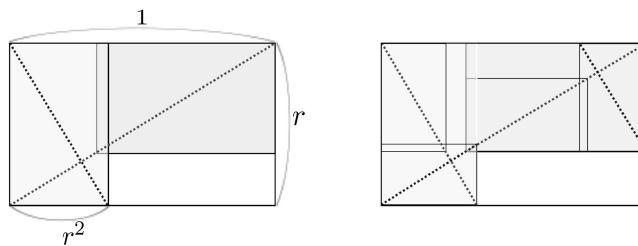


図 6: アトラクタが含む集合  $(r^2 + s > 1)$  の場合。

### 2.3 $\omega_1, \omega_2 \in \{\pm i\}$ の場合 1

$0 < s \leq r < 1$  と仮定してよい。また、

$$(c-1) \quad S = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = -is(z-1) + 1\}$$

$$(c-2) \quad S = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = is(z-1) + 1\}$$

の二つの場合を考える。残りの組み合わせは上記のいずれかと共役になる。

(c-1) のとき  $t = \frac{r-s}{1+rs}$  として、 $S$  と共役な族

$$(c-1)' \quad \hat{S} = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = -is(z-1-it) + 1 + it\}$$

の反復関数系を考え、初期集合を

$$L: \left[ \left[ \frac{-r^2(1+s^2) - r^3(1+s^2)i}{1-r^2s^2}, \frac{1+s^2+r(1+s^2)i}{1-r^2s^2} \right] \right]$$

とおく。このとき、 $S_1(L) \cup S_2(L) \subset L$  が成り立ち (図 7 参照)、 $L$  の頂点のうち 3 点は  $\hat{S}$  が定めるアトラクタに含まれる。

さらに、アトラクタに関して、次が成り立つ。

#### 補題 8

(c-1) の族  $S$  が定めるアトラクタは  $r^2 + sr < 1, s^2 + sr < 1$  のときに限り塵集合になる。

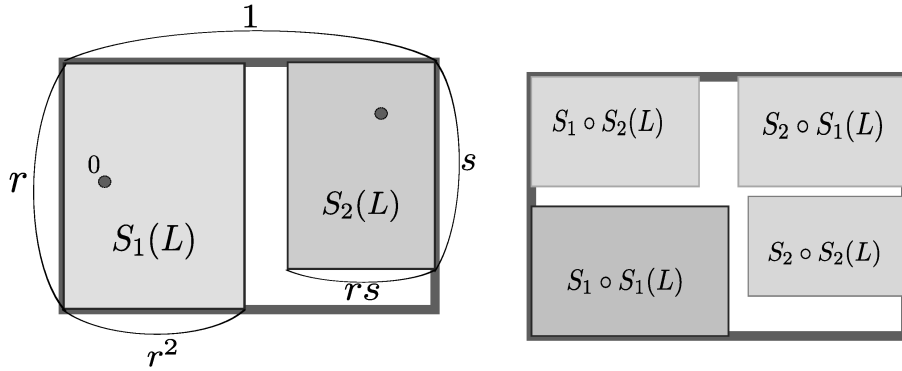


図 7: 初期集合とその像 (左)。2 回反復後の形状 (右)。

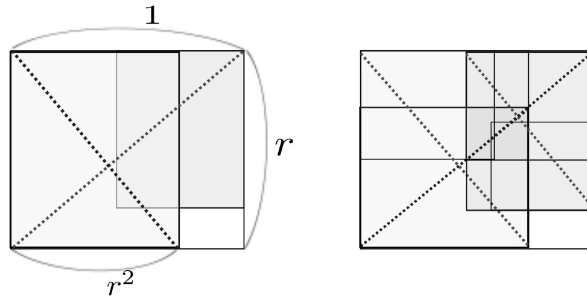


図 8: アトラクタが含む集合 ( $r^2 + sr > 1$  の場合)。

証明の手法は、前と同じで『絵』だけが変化する (図 7, 8 参照)。

同様の結果が、(c-2) に対しても成立する。ただし、(c-2) のとき  $t = \frac{r(1 - s^2 r^2)}{1 - s(r^3 + r - s)}$  として、共役な族

$$(c-2)' \quad \hat{S} = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = is(z - 1 - it) + 1 + it\}$$

の反復関数系を考え、初期集合を

$$L: \left[ \left[ \frac{-r^2(1 + s^2) - r^3(1 + s^2)i}{1 - s(r^3 + r - s)}, \frac{1 + s^2 + r(1 + s^2)i}{1 - s(r^3 + r - s)} \right] \right]$$

とおく。ここで、(c-2)' の場合は、 $r^2 + sr < 1, s^2 + sr < 1$  であっても初期集合の対角線はアトラクタに含まれない。代わりに図 10 にある点線部分がアトラクタに含まれることに注意する。

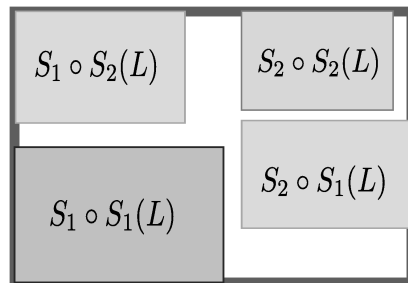


図 9: 2 回反復後の形状。

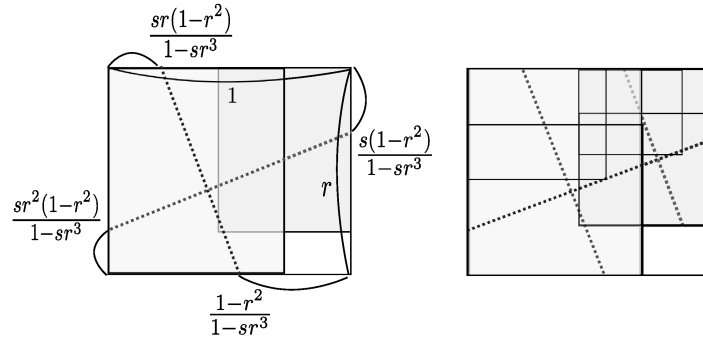


図 10: アトラクタが含む集合 ( $r^2 + sr > 1$  の場合)。

以上の議論から次が得られる。

**定理 9**

$r, s \in (0, 1)$  をパラメータとした族

$$S = \{S_1(z) = r\omega_1 z, S_2(z) = s\omega_2(z - 1) + 1\}$$

の族  $\{S\}$  に対して、反復関数系が塵集合アトラクターを持つ領域は次で与えられる。ただし、 $\omega_k$  ( $k = 1, 2$ ) は  $\omega_k^4 = 1$  をみたす値とする。

- (a)  $\omega_1, \omega_2 \in \{\pm 1\}$  のとき、 $\{r + s < 1\}$  (図 11 左)。
- (b)  $\omega_1 \in \{\pm i\}, \omega_2 \in \{\pm 1\}$  のとき、 $\{r^2 + s < 1\}$  (図 11 中)。
- (c)  $\omega_1, \omega_2 \in \{\pm i\}$  のとき、 $\{r^2 + sr < 1, s^2 + sr < 1\}$  (図 11 右)。

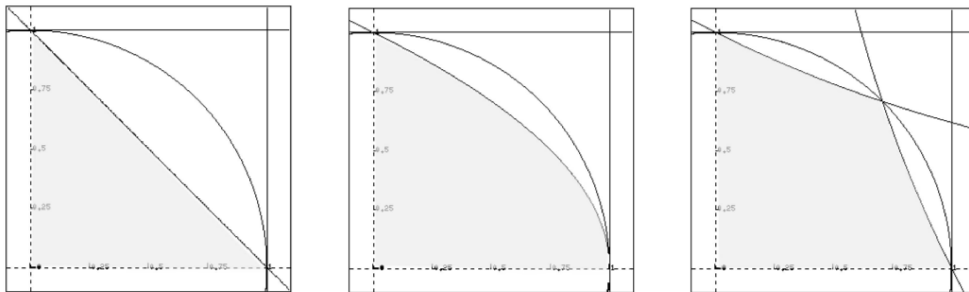


図 11:  $\{S\}$  に関する  $rs$ -平面上の塵集合領域。

**2.4 S が定めるアトラクタの例**

**2.4.1 アトラクタが閉領域になる例**

**補題 10**

族

$$(b-2)' \hat{S} = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = -s(z - 1 - ir) + 1 + ir\} \tag{2}$$

が定めるアトラクタは  $2r^2s > 1$  のとき閉領域である。



証明 (2) に対して

$$S_1(L) \cup S_2(L) = S_1 \circ S_1(L) \cup S_1 \circ S_2(L) \cup S_2 \circ S_1(L) \cup S_2 \circ S_2(L)$$

が成り立つ。したがって、アトラクタは  $S_1(L) \cup S_2(L)$  自身である。 ■

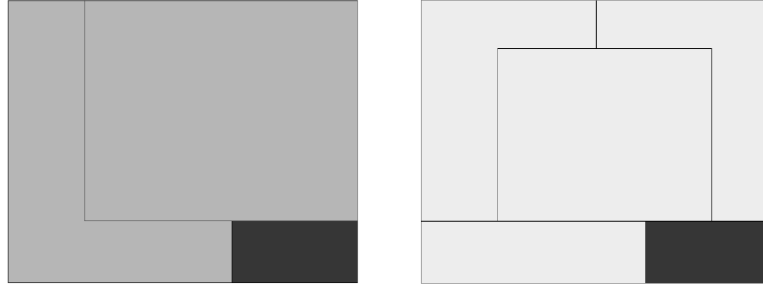


図 12:  $(r, s) = (\frac{4}{5}, \frac{25}{32})$  のときの 2 回反復後 (左) と 3 回反復後 (右)。

2.4.2 アトラクタが樹状集合になる例

補題 11  
族

$$(b-2)' \hat{S} = \{S_1(z) = irz, S_2(z) = -s(z - 1 - ir) + 1 + ir\}$$

が定めるアトラクタは  $r^2s = 1$  のとき樹状集合となる。

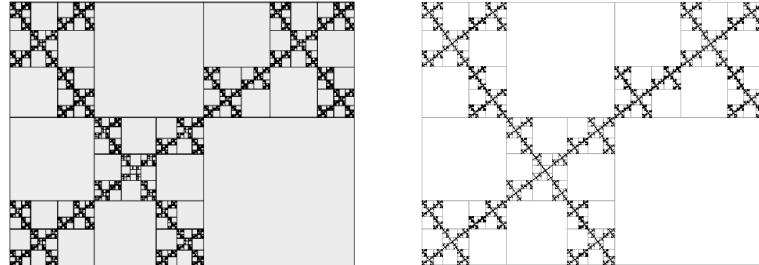


図 13:  $(r, s) = (\frac{3}{4}, \frac{7}{16})$  のとき, 領域を縮小して描画 (左)、対角線によるジェネレータを利用 (右)。

2.4.3 アトラクタが単連結でない例

補題 12  
族

$$(b-2)' \hat{S} = \{S_1(z) = \frac{i}{2}z, S_2(z) = \frac{4}{5}(z - 1 - \frac{i}{2}) + 1 + \frac{i}{2}\}$$

が定めるアトラクタは単連結でない。

証明 5 回反復後に図 14 の  $A$  の領域が穴として生じる。構成方法から、この穴はその後の反復でも消滅しないことがわかる。

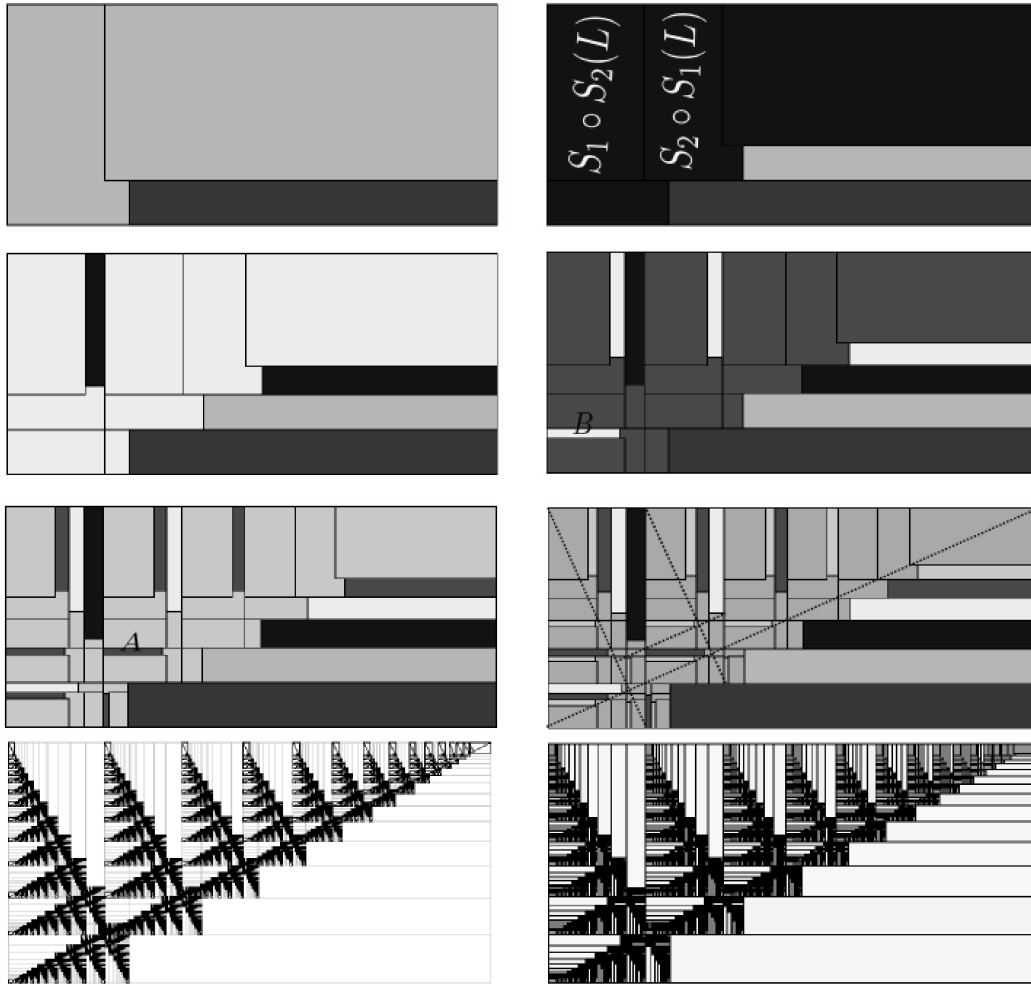


図 14: 6 回反復までの図と、対角線の 15 回反復 (左下)、初期集合の 15 回反復 (右下)。

一方、 $A$  は対角線の像に囲まれることも分かるので、 $A$  はアトラクタの一部に囲まれたアトラクタではない領域である。したがって、 $A$  はアトラクタの“穴”となる (図 14 参照)。 ■

以上のように、 $S$  は非常に簡単な関数からなる族だが、対応する反復関数系は豊かな力学的性質を持つことが分かる。

## 参 考 文 献

- [1] M. Aoki, M. Fujimura, and M. Taniguchi, The shape of the dust-likeness locus of self-similar sets, *Journal of Fractal Geometry*, to appear.
- [2] C. Bandt, On the Mandelbrot set for pairs of linear maps, *Nonlinearity*, **15** (2002), 1127-1147.
- [3] M. F. Barnsley and A. N. Harrington, A Mandelbrot set for pairs of linear maps, *Phys. D*, **15** (1985), 421-432.
- [4] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry*, John Wiley, 1997.
- [5] K. Falconer, *Fractal Geometry, 3rd Edition*, John Wiley, 2014.