数理解析研究所講究録
第 1927 巻 2014 年 55-65



# パラメータ付き対数的ベクトル場と局所コホモロジーについて

鍋島克輔*
NABESHIMA, KATSUSUKE
徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部
INSTITUTE OF SOCIO-ARTS AND SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKUSHIMA

田島慎一†
TAJIMA, SHINICHI
筑波大学大学院数理物質系数学域
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

## 1 はじめに

$n$ 次元複素空間 $\mathbb{C}^n$ の原点 $O$ の近傍 $X$ において正則な函数の零点集合として定められる超曲面 $S$ があり, 原点を孤立特異点として持つものが与えられたとする. 一般に, 超曲面 $S$ に沿った対数的ベクトル場は, 特異点の持つ複素解析的諸性質と深く係ることが知られており, 様々な研究がなされてきた ([11]).

しかしながら, 孤立特異点を持つ超曲面の場合に限ってもこれら対数的ベクトル場に関しては未知な事柄が多い. 実際, 対数的ベクトル場を明示的に構成する方法は, 擬斉次な場合しか知られていない. また, その構造に関して言えば, 正則ベクトル場という複素解析的な対象である対数的ベクトル場の構造を一般的な syzygy 計算による結果から理解することは困難である.

本稿では, 半擬斉次多項式が定める超曲面に対し, $S$ に沿った対数的ベクトル場の構造を求めさらに具体的に計算する方法を紹介する.

さて一般に, 半擬斉次多項式が定める超曲面はその擬斉次部である多項式が定める超曲面の変形, 所謂 $\mu$-constant deformation と見做すことができる. ここで $\mu$ は超曲面の位相不変量であるミルナー数を意味する. 孤立特異点を持つ超曲面にたいしては, 半擬斉次多項式が定める超曲面はその擬斉次部分が定める超曲面と位相同型であることが知られている. しかしこれらの超曲面族は複素解析的には同型ではなく, その結果として変形パラメータの値により超曲面の複素解析的諸性質が異なるという現象が起きる. 実際, 変形パラメータの状況により特異点の性質はドラスティックに変化する. パラメータのどのような条件の時にどのような状態になるかを解析することは重要なことある.

本稿では, 半擬斉次多項式が変形パラメータを含む場合の計算法を主に紹介する. このとき重要となるのは, polar variety の概念 ([4]) と polar variety に付随する局所コホモロジーである ([15]). polar variety に付随する局所コホモロジーの計算は, 論文 [8] にある代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムと同様な方

*nabeshima@tokushima-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

法で可能である．また，論文 [8] には，効率的なパラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算法，スタンダード基底の計算法が紹介されており，パラメータ付き代数的局所コホモロジー計算も可能である．これらを利用することで，パラメータ付き対数的ベクトル場を構成する．ここで紹介するアルゴリズムは，著者により計算機代数的システム `Risa/Asir` に実装され，現在計算可能となっている．

本稿は次のような構成となっている．第 2 節で局所コホモロジーの復習と本稿で使う記号や定義を紹介し，第 3 節で対数的ベクトル場と局所コホモロジーの関係を論じる．第 4 節では polar variety に付随する局所コホモロジーの計算法を紹介し，第 5 節でパラメータ付き対数的ベクトル場の計算アルゴリズムを紹介する．

# 2 準備

代数的局所コホモロジーについては論文 [6, 13, 14, 16] などによって詳しく述べられている．この節では，簡単に局所コホモロジーを復習すると共に，本稿で使う記号の定義を紹介する．

## 2.1 局所コホモロジー

本稿では，$x$ を $n$ 変数 $x_1,\ldots,x_n$ の省略形として使い，0 を含む自然数の集合を $\mathbb{N}$ として，$\mathbb{C}$ は複素数体を表す．$\mathbb{C}^n$ の原点 $O$ の近傍 $X$ において正則な函数 $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が定める超曲面を $S=\{x\in X|f(x)=0\}$ とする．また，超曲面 $S$ は原点に孤立特異点を持つとする．$X$ 上の正則函数のなす層を $\mathcal{O}_X$ で表し，$\mathcal{O}_X$ の原点における茎を $\mathcal{O}_{X,O}$ で表す．$\mathbb{C}^n$ の原点 $O$ に台を持つ局所コホモロジーを $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ で表す．

$\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ の元は開集合対 $(X,X-\{O\})$ に対する標準的な相対被覆が定める相対 Čech コホモロジーの要素として表現できることが知られている。これより，記号 $\sum c_\lambda\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ を $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ における局所コホモロジー類として使い，この表現を局所コホモロジー類の **Čech 表現**という．本稿で用いる局所コホモロジー類は, 実際にはすべて

$$\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X):=\lim_{k\to\infty}Ext^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle^k,\mathcal{O}_{X,O})$$

に属す代数的局所コホモロジー類であり, Čech 表現も有限和で表される．ただし $\langle x_1,x_2,\ldots,x_m\rangle$ は極大イデアルを表す．このことに注目し, 代数的局所コホモロジー $\sum c_\lambda\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ を多項式 $\sum c_\lambda\xi^\lambda$ で表すことにする．ただし, $n$ 変数 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ はオリジナルの $n$ 変数 $x$ に対応するものとする．この表現を代数的局所コホモロジー類の**多項式表現**という．多項式 $x^\alpha$ と代数的局所コホモロジー類 $\xi^\lambda$ の積は

$$x^\alpha*\xi^\lambda:=\begin{cases}\xi^{\lambda-\alpha}, & \lambda_i\geq\alpha_i, i=1,\ldots,n,\\ & \\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

と定義される．だたし，$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n, \lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{N}^n$, $\lambda-\alpha=(\lambda_1-\alpha_1,\ldots,\lambda_n-\alpha_n)$ である．多項式表現での積には記号“ $*$ ”を使う．本稿では，代数的局所コホモロジー類を多項式表現で表わす．

## 2.2 半擬斉次多項式

**定義 1** 項 $x^\alpha\in\mathbb{C}[x]$ に対し, 重みベクトル $\mathbf{w}=(w_1,w_2,...,w_n)\in\mathbb{N}^n$ に関する $x^\alpha$ の重み $d$ を $d=|x^\alpha|_{\mathbf{w}}:=\sum_{i=1}^n w_i\alpha_i$ により定める。また，$ord_{\mathbf{w}}(f)=\min\{|x^\alpha|_{\mathbf{w}}:x^\alpha$は $f$ を構成する項$\}$ $(ord_{\mathbf{w}}(0):=-1)$ とする。

1. ゼロでない多項式 $f \in \mathbb{C}[x]$ が $(d;\mathbf{w})$ 型の**擬斉次** であるとは, $f$ のすべての項の重みベクトル $\mathbf{w}$ に関する重み付き次数が $d$ に等しいこととする。

2. 多項式 $f$ が $(d;\mathbf{w})$ 型 **半擬斉次**であるとは, 多項式 $f$ が $f = f_0 + g$ なる形に表せることをいう。 ただし, $f_0$ は $(d;w)$ 型の擬斉次多項式であり, $ord_{\mathbf{w}}(g) > d$ または $g = 0$ を満たすとする。 (本稿では, 半擬斉次多項式は擬斉次多項式を含むとした。) ここでは, $f_0$ を $f$ の**擬斉次部**と呼び, $g$ を **upper monomial** からなる多項式と呼ぶ.

例えば, $f_0 = x^3 + y^7 \in \mathbb{C}[x,y]$ において, 重み $\mathbf{w} = (7,3) \in \mathbb{N}^2$ を考えれば, 各項の重み付き次数は 21 であるので, $f_0$ は $(21;(7,3))$ 型の擬斉次多項式である。また, $f = x^3 + y^7 + 2xy^5 \in \mathbb{C}[x,y]$ と重み $\mathbf{w} = (7,3) \in \mathbb{N}^2$ を考えれば, 項 $xy^5$ の重み付き次数は 22 であり, $x^3 + y^7$ は重み付き次数が 21 の擬斉次多項式かつ孤立特異点を持つので $f$ は $(21;(7,3))$ 型の半擬斉次多項式である。

## 3 対数的ベクトル場と代数的局所コホモロジー

本節では, 対数的ベクトル場と polar variety に付随する局所コホモロジーの関係について考える. 次は, 対数的ベクトル場の定義である.

**定義 2** 正則ベクトル場

$$v = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad a_i(x) \in \mathcal{O}_X, \quad i = 1, \ldots, n$$

が $S$ に沿って**対数的**とは, $v(f) \in \langle f \rangle$ を満たすときにいう. ここで, $\langle f \rangle$ は $f$ によって生成される $\mathcal{O}_X$ のイデアルである. $X$ 上で $S$ に沿った対数的ベクトル場のなす層を $\mathcal{D}er_X(-\log S)$ で表す.

原点 $O$ に台を持つ局所コホモロジーを $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ とし, 次の 2 種類の局所コホモロジー類を考える

$$H_{T(f)} = \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, f\psi = \frac{\partial f}{\partial x_1}\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\psi = 0 \right\},$$

$$H_{\Gamma(f)} = \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, f\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}\psi = \frac{\partial f}{\partial x_3}\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\psi = 0 \right\}.$$

ここで, $H_{\Gamma(f)}$ は, 超曲面 $S$ の polar variety

$$\Gamma(f) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \right\}$$

と超曲面 $S$ との交わり方を記述する局所コホモロジー類のなすベクトル空間である. 本稿では, $H_{\Gamma(f)}$ を polar variety $\Gamma(f)$ に付随する局所コホモロジーと呼び, **有限次元ベクトル空間となると仮定する.** $H_{\Gamma(f)}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ 倍した集合を $H_{\Phi(f)} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(H_{\Gamma(f)}\right)$ とすると, $0 \to H_{T(f)} \to H_{\Gamma(f)} \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_1}} H_{\Phi(f)} \to 0$ は完全列となる [15]. また, $H_{T(f)}, H_{\Gamma(f)}, H_{\Phi(f)}$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ における零化イデアルは

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{T(f)}) = \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle, \ \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Gamma(f)}) = \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,$$

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)}) = \left\{ a(x) \in \mathcal{O}_{X,O} \,\middle|\, a(x)\frac{\partial f}{\partial x_1} \in \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \right\}$$

となる.

次の定理は, 局所コホモロジーと対数的ベクトル場の関係を我々に教える.

**定理 3 ([15])** 正則関数 $a(x) \in \mathcal{O}_{X,O}$ に対し, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $a(x) \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$

(ii) $\exists v \in \mathcal{D}er_X(-\log S)$ s.t. $v = a(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\dfrac{\partial}{\partial x_n}$
ただし, $a_2(x), \ldots, a_n(x) \in \mathcal{O}_{X,O}$ である.

ここで, もしイデアル $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底が分かっていれば, $a(x)$ は, そのスタンダード基底で割られる. この事実は計算アルゴリズムを構成するうえで重要となる.

# 4 ベクトル空間 $H_{\Gamma(f)}$ の基底

本節では, 対数的ベクトル場の構造を求める上で重要となるベクトル空間 $H_{\Gamma(f)}$ の基底の計算について考える. ここでは, $f$ を半擬斉次多項式とし, $H_{\Gamma(f)}$ は有限次元ベクトル空間とする. このとき, 論文 [8] の事実と同様に, 対応するポアンカレ多項式を用いることにより $H_{\Gamma(f)}$ の基底の重みは, ただちに得られる. まず, ポアンカレ多項式の定義を与える.

**定義 4 ([1])** $f$ を $(d;\mathbf{w})$ 型の半擬斉次多項式とし, 重みベクトルを $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ とする. $H_{\Gamma(f)}$ に対する $(d;\mathbf{w})$ 型の**ポアンカレ多項式**を次で定める。

$$P_{(d;\mathbf{w})}(t) := \frac{(t^d - 1)(t^{d-w_2})(t^{d-w_3} - 1)\cdots(t^{d-w_n} - 1)}{(t^{w_1} - 1)(t^{w_2} - 1)(t^{w_3} - 1)\cdots(t^{w_n} - 1)}$$

ここで, $t$ は変数を意味する。

このポアンカレ多項式を使うことによって polar variety に付随する代数的局所コホモロジーの計算は格段に効率が良くなる.

$f := f_0 + g$ を $(d;\mathbf{w})$ 型の半擬斉次多項式とし, $f_0$ を $f$ の擬斉次部とする. 定義 4による, $(d;\mathbf{w})$ 型のポアンカレ多項式を $P_{(d;\mathbf{w})}(t) = \sum_{i=1}^{j} b_i t^{a_i}$ とする ( ただし, $b_i \in \mathbb{N}$). ベクトル空間 $H_{\Gamma(f_0)}$ の基底 $Q$ を考える. $Q$ の元と重みベクトル $\mathbf{w}$ から定まる多重集合を $Q_{\mathbf{w}} := \{\deg_{\mathbf{w}}(\psi) | \psi \in Q\}$ とし, **ポアンカレ多項式から決まる多重集合**を $D_{P(d;\mathbf{w})} := \bigcup_{i=1}^{j} \{\underbrace{a_i, \ldots, a_i}_{b_i \text{個}}\}$ とする。このとき, 論文 [8] と同様に次が成り立つ.

**定理 5** 次の条件 (i), (ii) を満たすような, $H_{\Gamma(f_0)}$ の基底 $Q$ が存在する.

(i) $Q$ は擬斉次な代数的局所コホモロジー類からなる.

(ii) $D_{P(d;\mathbf{w})} = Q_{\mathbf{w}}$ となる.

この定理により, 論文 [8] で示されたアルゴリズムにより $H_{\Gamma(f_0)}$ の基底は計算可能である.

$H_{\Gamma(f)}$ の基底の計算も, 論文 [8] の方法と同様に計算可能である. $H_{\Gamma(f_0)}$ と $H_{\Gamma(f)}$ の関係を結びつける定理が次である.

**定理 6** 定理 5を満たす, ベクトル空間 $H_{\Gamma(f_0)}$ の基底を $Q = \{\rho_1, \ldots, \rho_\lambda\}$ とする. このとき, 各 $i \in \{1, \ldots, \lambda\}$ に対し, $\deg_{\mathbf{w}}(\rho_i) > \deg_{\mathbf{w}}(\nu_i)$ であり, $\psi_i := \rho_i + \nu_i$ が $H_{\Gamma(f)}$ の元となるような $\nu_i$ が存在する. このときさらに, $\{\psi_1, \ldots, \psi_\lambda\}$ はベクトル空間 $H_{\Gamma(f)}$ の基底となる.

$H_{\Gamma(f)}$ の基底の計算方法は，論文 [8] で述べられたベクトル空間

$$H_{J(f)} := \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_1}\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\psi = 0 \right\}$$

の基底計算と同じである．違いは，polar variety に対するポアンカレ多項式を扱うかどうかである．アルゴリズムの詳細については，論文 [8] で述べられているのでここでは省略する．

論文 [8] では，$f$ がパラメータを含む場合に対しても研究がされている．もちろん，$f$ がパラメータを含む場合でも，同様なアルゴリズムで $H_{\Gamma(f)}$ の基底の計算は可能である．

次に，本稿で必要となる stratum，特化準同型写像，パラメトリック局所コホモロジーシステムを定義する．

ここでは，$t$ を $m$ 変数 $t_1, \ldots, t_m$ の省略形として使う．多項式 $g_1, \ldots, g_k \in \mathbb{C}[t]$, のアフィン多様体を $\mathbb{V}(g_1, \ldots, g_k) \subseteq \mathbb{C}^m$ とする i.e., $\mathbb{V}(g_1, \ldots, g_k) := \{\bar{a} \in \mathbb{C}^m \mid g_1(\bar{a}) = \cdots = g_k(\bar{a}) = 0\}$ and $\mathbb{V}(0) := \mathbb{C}^m$．本稿では，代数的構成可能集合として $\mathbb{V}(g_1, \ldots, g_k) \setminus \mathbb{V}(g'_1, \ldots, g'_l) \subseteq \mathbb{C}^m$ を使い，これを **stratum** と呼ぶ．ただし，$g_1, \ldots, g_k, g'_1, \ldots, g'_l \in \mathbb{C}[t]$ である．本稿では，$\mathbb{A}, \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_l, \mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_k$ 等を stratum を表す記号として表す．

$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}^m$ に関しての，$\mathbb{C}[t]$ の局所化を $\mathbb{C}[t]_{\mathbb{A}} = \{\frac{c}{b} \mid c, b \in \mathbb{C}[t], b(t) \neq 0 \text{ for } t \in \mathbb{A}\}$ とする．このとき，任意の $\bar{a} \in \mathbb{A}$ において，特化準同型写像 $\sigma_{\bar{a}} : \mathbb{C}[t]_{\mathbb{A}}[x] \to \mathbb{C}[x]$ (or $\sigma_{\bar{a}} : \mathbb{C}[t]_{\mathbb{A}}[\xi] \to \mathbb{C}[\xi]$) を定義する．もし，$h \in \mathbb{C}(t)[x]$ とすると $\sigma_{\bar{a}}(h)$ は $\bar{a} \in \mathbb{A}$ となるある $\mathbb{A}$ が存在し $h \in \mathbb{C}[t]_{\mathbb{A}}[x]$ であることを意味する．

**定義 7 (パラメトリック局所コホモロジーシステム)** パラメータ $t$ を含む半擬斉次多項式を $f = f_0 + g$ とし，$f_0$ を $f$ の擬斉次部とする．また，$\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_l, \mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_k$ を $\mathbb{C}^m$ の stratum とし，$S_1, \ldots, S_l$ を $\mathbb{C}(t)[\xi]$ の部分集合とする．ここで，$\mathcal{S} = \{(\mathbb{A}_1, S_1), \ldots, (\mathbb{A}_l, S_l)\}$，$\mathcal{D} = \{\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_k\}$ とする．このとき，各 $i \in \{1, \ldots, l\}$ と任意の $\bar{a} \in \mathbb{A}_i$ において，$\sigma_{\bar{a}}(S_i)$ がベクトル空間 $H_{\Gamma(\sigma_{\bar{a}}(f))}$ (もしくは $H_{T(\sigma_{\bar{a}}(f))}$，$H_{\Phi(\sigma_{\bar{a}}(f))}$，$H_{J(\sigma_{\bar{a}}(f))}$) の基底になり，各 $j \in \{1, \ldots, k\}$ と 任意の $\bar{b} \in \mathbb{B}_j$ において，$\sigma_{\bar{b}}(f_0)$ は原点で孤立特異点を定義しないとき，ペア $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$ を $H_{\Gamma(f)}$ (もしくは $H_{T(f)}$，$H_{\Phi(f)}$，$H_{J(f)}$) の $\mathbb{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{A}_l \cup \mathbb{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{B}_k$ における**パラメトリック局所コホモロジーシステム** (parametric local cohomology system) と呼ぶ．

**例 8** $(21; (7,3))$ 型の半擬斉次多項式 $f = x_1^3 + x_2^7 + t x_1 x_2^5$ を考える．ここで，$x_1, x_2$ は変数で $t$ はパラメータである．また，$x_1$ に重み 7，$x_2$ に重み 3 とする．このとき，$H_{\Gamma(f)} = \{\psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) | f * \psi = \frac{\partial f}{\partial x_1} * \psi = 0\}$ のパラメトリック局所コホモロジーシステムは次となる．ここでは，重みベクトル $\mathbf{w} = (7,3)$ を持つ重み付き全次数辞書式項順序に基づいたパラメトリック局所コホモロジーシステムであり，$x_1$ は $\xi_1$ と対応し，$x_2$ は $\xi_2$ に対応する。

- パラメータ $t$ がどのような値を取ろうとも (i.e. $\mathbb{C}$ 上で)，$H_{\Gamma(f)}$ の基底は $V = \{1, \xi_1, \xi_2, \xi_2\xi_1, \xi_2^2, \xi_2^2\xi_1, \xi_2^3, \xi_2^3\xi_1, \xi_2^4, \xi_2^4\xi_1, -\frac{1}{3}t\xi_2\xi_1^3 + \frac{2}{9}t^2\xi_2^3\xi_1^2 + \xi_2^6\ xi_1 - \frac{2}{3}t\xi_2^8, -\frac{1}{3}t\xi_1^3 + \frac{2}{9}t^2\xi_2^2\xi_1^2 +\ xi_2^5\xi_1 - \frac{2}{3}t\xi_2^7, -\frac{1}{3}t\xi_2\xi_1^2 + \xi_2^6, -\frac{1}{3}t\xi_1^2 + \xi_2^5\}$ である．

この例には，パラメータ空間 $\mathbb{C}$ の分割は起こらなかった。

半擬斉次多項式の場合，重み付き全次数辞書式項順序を使うことは，パラメータ空間の分割が基底代数的局所コホモロジーの構造による分類と整合しているという利点がある．Polar variety を考えるとき，変数の選び方により $H_{\Gamma(f)}$ が有限次元ベクトル空間とならないことがあるので注意する．このような場合は適宜座標変換し変数を選ぶことになる．

## 5 パラメータ付き対数的ベクトル場の計算

特異点の定義方程式が係数にパラメータを含む場合を考える．このとき，対数的ベクトル場はパラメータの値によって構造が異なり，場合分けが必要である．この場合分けは，第4節で見たパラメトリック局所コホモロジーシステムを計算することで可能となり，その計算アルゴリズムは計算機代数システム Risa/Asir[9] に実装されている．このパラメトリック局所コホモロジーシステムを使うことによりパラメータ付き対数的ベクトル場を求める．

半擬斉次多項式を $f = f_0 + g_t$ と表す．ただし，$f_0$ は擬斉次部であり係数にパラメーは含まず原点に孤立特異点を持つ，$g_t$ は upper monomial からなる多項式で係数にパラメータ $t = (t_1, \ldots, t_m)$ を含むとする。次に，$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底と，対数的ベクトル場 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ を計算するアルゴリズムを紹介する。

---

**アルゴリズム**

---

入力：$f = f_0 + g_t$ は原点に孤立特異点を持ち係数にパラメータを含む半擬斉次多項式，

出力：パラメータ空間の各 stratum に対応する $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底と，対数的ベクトル場 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$.

1. $H_{\Gamma(f)}$ のパラメトリック局所コホモロジーシステム $\mathcal{S} = \{(\mathbb{A}_1, S_1), \ldots, (\mathbb{A}_l, S_l)\}$ を計算する [7, 8]. ただし，$\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_l$ は $\mathbb{C}^m$ の stratum で $\mathbb{C}^m = \mathbb{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{A}_l$ となり，$S_1, \ldots, S_l$ は $\mathbb{C}(t)[\xi]$ の部分集合である．($f_0$ にはパラメータを含まないので，$f$ は常に孤立特異点を持つので，孤立特異点を持たない stratum は空集合なので，ここでは表していない．)
2. 1で得られた各 $i \in \{1, \ldots, l\}$ において，$\frac{\partial f}{\partial x_1}(S_i)$ を計算する．
3. 各 $i \in \{1, \ldots, l\}$ において，ベクトル空間 $H_{\Phi(f)}$ の基底を計算する．すなわち，$\frac{\partial f}{\partial x_1}(S_i)$ の一次独立となる最大個数の組を1組求める．
4. 3で得られた各 stratum での基底から $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底を計算する．[8, 16]
5. 各stratumにおいて，4で得られたスタンダード基底を利用し対数的ベクトル場 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ を計算する．$a(x)$ を4で得られたスタンダード基底の1つの元とする．このとき，$a(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, f$ の syzygy $(b_1(x),\ b_2(x), \ldots, b_n(x), b_{n+1}(x))$ を $\mathcal{O}_X$ 上で計算する．したがって，$b_1(x)a(x)\frac{\partial f}{\partial x_1} + b_2(x)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + b_n(x)\frac{\partial f}{\partial x_n} + b_{n+1}(x)f = 0$ となるので，対数的ベクトル場は対応する stratum 上で $(b_1(x)a(x),\ b_2(x), \ldots, b_n(x))$ となる．スタンダード基底のすべての元に対してこの計算を行うとパラメータ付き対数的ベクトル場を得ることができる．

---

**注意1：** アルゴリズムの手順3において，ベクトル空間 $H_{\Phi(f)}$ の基底を求める必要がある．このとき，$\frac{\partial f}{\partial x_1}(S_i)$ はパラメータ付き代数的局所コホモロジー類の集合なので，パラメータを考慮した計算が必要である．この計算は論文 [12] にあるように可能である．実際，我々の実装ではパラメータ付を考慮した掃出し法を用いてベクトル空間 $H_{\Phi(f)}$ の基底を求めるようにしている．この計算において，stratum $\mathbb{A}_i$ は更に分割される場合がある．

**注意2：** アルゴリズムの手順4において，$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底を計算する．この計算方法は，すでに論文 [8, 16] で述べられているので，$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のパラメータ付きスタンダード基底は計算可能である．定理3より，$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底は，対数的ベクトル場の $\frac{\partial}{\partial x_1}$ の係数項を生成するので，このスタンダード基底を利用することで対数的ベクトル場の計算効率が計れる．ここでのスタンダード基底の項順序は，手順5で用いる項順序と合せる必要がある．

**注意 3：** 手順 4 で得られたある stratum 上でのパラメータ付きスタンダード基底を $\{a_1(x),\dots,a_s(x)\}$ とする．アルゴリズムの手順 5 において，各 $i \in \{1,\dots,s\}$ で，$a_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}, f$ の syzygy を $\mathcal{O}_X$ で計算する必要がある．大域環上での能率的なパラメータ付き syzygy 計算は論文 [5] で述べられているが，局所環上での能率的なパラメータ付き syzygy 計算アルゴリズムは今のところ存在しない．論文 [5] は，グレブナー基底計算に基づいた syzygy 計算であるため，局所環上での計算にその方法を直接利用することはできないが，Lazard の homogenize 法 [3] を介することにより局所環での計算に利用可能となる．我々の実装は現在この方法を用いて局所環上でのパラメータ付き syzygy 計算を行うようにしている．Lazard の homogenize 法で用いた項順序に合わせた項順序のスタンダード基底が手順 4 において必要となる．Lazard の homogenize 法を利用することで不必要な元が結果に表れ，出力が複雑になることが多々あることを注意する．

パラメータの無い場合，局所環上での syzygy 計算アルゴリズムは存在し計算機代数システム `Singular`[2] に実装されている．パラメータの無い場合には，Lazard の homogenize 法は使わず直接局所環上での syzygy 計算をする方が効率的，かつ出力は整理されたものとなる．

紹介したアルゴリズムの手順に従って，対数的ベクトル場の具体的な計算を次の例によって見る．

**例 9** 例 8 と同様の問題を考える．$f = x_1^3 + x_2^7 + tx_1x_2^5$ は $(21;(7,3))$ 型の半擬斉次多項式であり，$x_1, x_2$ は変数，$t$ はパラメータである．以下，$x_1$ は $\xi_1$ と対応し，$x_2$ は $\xi_2$ に対応する。

1: 例 8 によりすでに $H_{\Gamma(f)}$ のパラメトリック局所コホモロジーシステム $V$ は計算されている．

2: $\frac{\partial f}{\partial x_2}(V) = \left\{7, \frac{1}{3}t\xi_2, 7\xi_1 + \frac{1}{3}t\xi_2^2, 5t\right\}$ となる．

3: ベクトル空間 $H_{\Phi(f)}$ の基底を計算する．ここでは,（広域）全次数辞書式順序 $\xi_2 \succ \xi_1$ に基づいて掃出し法を使い簡約なものを計算すると次となる．

- もし，パラメータ $t$ が $\mathbb{V}(t)$ 上の値をとるならば，$H_{\Phi(f)}$ の基底は $\{1, \xi_2\}$ となり，
- もし，パラメータ $t$ が $\mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(t)$ 上の値をとるならば，$\{1, \xi_2, \xi_2^2 + \frac{21}{t}\xi_1\}$ となる．

4: 3 で得られた基底から $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底を計算する．代数的局所コホモロジーからスタンダード基底を計算するアルゴリズムは論文 [8, 16] で述べられいるので直接その方法を利用すると次のようになる．このときの項順序は，3 で利用した項順序の逆順序である．すなわち，局所全次数辞書式順序である．

- もし，パラメータ $t$ が $\mathbb{V}(t)$ 上の値をとるならば，$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底は $\{x_2, x_1^2\}$ となり，
- もし，パラメータ $t$ が $\mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(t)$ 上の値をとるならば，$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底は $\{x_2^3, x_1 - \frac{21}{t}x_2^2\}$ となる．

5: 4 で得られたスタンダード基底を利用し対数的ベクトル場 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ を計算する．このときの syzygy 計算は，Lazard の homogenize 法を介したグレブナー基底を使った方法を利用する．新しい変数 $v$ を使い，多項式 $a(x)\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, f$ を斉次化する ($a(x)$ はスタンダード基底の元の 1 つ)．項順序は，まず新しい変数 $v$ の次数の大きいものを大とする．次に，次数が同じときはその他の変数を全次数辞書式順序で評価するようにする．多項式 $a(x)\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, f$ の斉次化されたものからなるイデアルの包括的グレブナー基底を使いパラメータ付き syzygy を求める．この計算法は論文 [5] で紹介されている．得られた計算結果の変数 $v$ に 1 を代入することで，局所環上でのパラメータ付き syzygy を得ることができる．最後に，$f$ に対応する syzygy の項を削除することで，対数的ベクトル場を得ることができる．この方法を実行すると次のような結果となる．

- もし，パラメータ $t$ が $\mathbb{V}(t)$ 上の値をとるならば，

  • スタンダード基底から $x_1^2$ をとると，対数的ベクトル場は加群 $\left\langle \begin{pmatrix} -3x_2 \\ -7x_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -7x_2^6 \end{pmatrix} \right\rangle$ からなる．ただし，第一成分には $x_1^2$ が常に掛かる．例えば，加群を生成しているベクトルをとると，$-3x_2(x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (-7x_1^3)\frac{\partial}{\partial x_1}$，$3(x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (-7x_2^6)\frac{\partial}{\partial x_1} \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ となる．

  • スタンダード基底から $x_2$ をとると，対数的ベクトル場は加群 $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3x_1^2 \\ 7x_2^7 \end{pmatrix} \right\rangle$ からなる．ただし，第一成分には $x_2$ が常に掛かる．例えば，加群を生成しているベクトルをとると，$3(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (7x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}$，$-3x_1^2(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (7x_2^7)\frac{\partial}{\partial x_1} \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ となる．

  ここで今, $v_1 = 3(x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (-7x_2^6)\frac{\partial}{\partial x_1}, v_2 = 3(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (7x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}$ とおくと, 例えば

$$-3x_2(x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (-7x_1^3)\frac{\partial}{\partial x_1} = -x_2v_1 - 7f\frac{\partial}{\partial x_1}, -3x_1^2(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (7x_2^7)\frac{\partial}{\partial x_1} = -x_1v_2 + 7f\frac{\partial}{\partial x_1}$$

  となり, 自明な対数的ベクトル場 ([15]) を除くと, 対数的ベクトル場は $\mathcal{O}_{X,O}$ 上 $v_1, v_2$ で生成されることが分かる．

- 同様に，もし，パラメータ $t$ が $\mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(t)$ 上の値をとるならば，次のようになる．ここで，リスト $[v_1, v_2]$ はベクトル $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ を意味する，

  • $x_2^3$ をとると，対数的ベクトル場は次のベクトルからなる加群からなる．
  $[-4t^3x_2 - 27, -3tx_1^2 + (-10t^3x_2^3 - 63x_2^2)x_1 - 2t^2x_2^5]$,
  $[-3tx_1 + 10t^3x_2^3 + 63x_2^2, (25t^3x_2^5 + 147x_2^4)x_1 + 5t^2x_2^7]$,
  $[-2tx_1 - 3x_2^2, -5tx_2^2x_1^2 - 7x_2^4x_1]$,
  $[15t^2x_1^2 + (-50t^4x_2^3 - 21tx_2^2)x_1 + 441x_2^4, -125t^4x_2^5x_1^2 + (-25t^3x_2^7 + 1029x_2^6)x_1]$,
  $[3x_1^2 + tx_2^5, -5tx_2^7x_1 - 7x_2^9]$.
  ただし，第一成分には $x_2^3$ が常に掛かる．

  • $tx_1 - 21x_2^2$(分母を払った) のとき，対数的ベクトル場は次のベクトルからなる加群からなる．
  $[10t^4x_1 + 211t^3x_2^2 + 1323x_2, (-25t^6x_2^4 - 11074t^3x_2^3 - 64827x_2^2)x_1 - 25t^5x_2^6 - 2205t^2x_2^5]$,
  $[100t^5x_1^2 + 2110t^4x_2^2x_1 + 44296t^3x_2^4 + 279153x_2^3, -250t^7x_2^4x_1^2 + (-250t^6x_2^6 - 2325589t^3x_2^5 - 13678497x_2^4)x_1 - 465255t^2x_2^7]$,
  $[4t^3x_2 + 27, 10t^4x_1^2 + (-211t^3x_2^2 - 1323x_2)x_1 - 45t^2x_2^4]$,
  $[-50t^6x_1^3 + (-1055t^5x_2^2 + 6615t^2x_2)x_1^2 - 22148t^4x_2^4x_1 + 194481x_2^5, 125t^8x_2^4x_1^3 + (125t^7x_2^6 + 1146257t^4x_2^5)x_1^2 + (216090t^3x_2^7 - 9529569x_2^6)x_1]$,
  $[3x_1^2 + tx_2^5, -5t^2x_2^4x_1^2 + 98tx_2^6x_1 + 147x_2^8]$.
  ただし，第一成分には $tx_1 - 21x_2^2$ が常に掛かる．

この場合,

$$v_1 = x_2^3\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{-3tx_1^2 + (-10t^3x_2^3 - 63x_2^2)x_1 - 2t^2x_2^5}{-4t^3x_2 - 27}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$v_2 = (tx_1 - 21x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{10t^4x_1^2 + (-211t^3x_2^2 - 1323x_2)x_1 - 45t^2x_2^4}{4t^3x_2 + 27}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

が（自明でない）対数的ベクトル場の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元となる．

紹介したアルゴリズムは，著者により計算機代数システム `Risa/Asir` に実装された．次の例では，我々の実装の出力をみる．

**例 10** $(30;(3,10))$ 型の半擬斉次多項式 $f = x^3 + y^{10} + txy^7 \in \mathbb{C}(t)[y,x]$ を考える．$t$ はパラメータであり変数 $y$ は重み 3，$x$ は 10 とする．このとき，我々の実装は次のように対数的ベクトル場を出力する．出力にある `standard basis` とは，局所全次数辞書式項順序での $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_{\Phi(f)})$ のスタンダード基底である．`[[t],[1]]` は stratum $\mathbb{V}(t)$ を表し，`[[0],[t]]` は stratum $\mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(t)$ を表す．出力されたベクトルの第一成分に指定されたスタンダード基底の元が常に掛かる．ベクトルの第一成分は $\frac{\partial f}{\partial y}$ の係数項，第二成分は $\frac{\partial f}{\partial x}$ の係数項を意味する．

```
[868] p_logvec1(x^3+y^10,t*x*y^7,[3,10],[t],[y,x],1);
[dy, dx]
==============================================================
standard basis
[[[t],[1]],[x^2,y]]
x^2
[[-3*y,-10*x^3],[3,-10*y^9]]

y
[[3,10*x],[-3*x^2,10*y^10]]
==============================================================
standard basis
[[[0],[t]],[y^4,(t*x-30*y^3)/(t)]]
y^4
[[-4*t^3*y-27,-3*t*x^2+(-14*t^3*y^4-90*y^3)*x-2*t^2*y^7],
[-2*t*x-3*y^3,-7*t*y^3*x^2-10*y^6*x],
[3*t*x-14*t^3*y^4-90*y^3,(-49*t^3*y^7-300*y^6)*x-7*t^2*y^10],
[(1029*t^5*y-6300*t^2)*x^2+(-4802*t^7*y^5-1470*t^4*y^4+9000*t*y^3)*x-270000*y^6,-16807
*t^7*y^8*x^2+(-2401*t^6*y^11+14700*t^3*y^10-900000*y^9)*x],
[3*x^2+t*y^7,-7*t*y^10*x-10*y^13]]

t*x-30*y^3
[[14*t^4*x+421*t^3*y^3+2700*y^2,(-49*t^6*y^6-44200*t^3*y^5-270000*y^4)*x-49*t^5*y^9-63
00*t^2*y^8],
[4*t^3*y+27,14*t^4*x^2+(-421*t^3*y^3-2700*y^2)*x-63*t^2*y^6],
[(-4802*t^8*y+12994800*t^5)*x^2+(-144403*t^7*y^4+389846100*t^4*y^3)*x+11695380000*t^3*
y^6+75184605000*y^5,(16807*t^10*y^7-30321200*t^7*y^6)*x^2+(16807*t^9*y^10-43320900*t^6
*y^9-1228014915000*t^3*y^8-7518460500000*y^7)*x-175430745000*t^2*y^11],
[98*t^8*x^2+(2947*t^7*y^3+18900*t^4*y^2)*x+540000*t^3*y^5+3645000*y^4,(-343*t^10*y^6-3
09400*t^7*y^5)*x^2+(-343*t^9*y^9-44100*t^6*y^8-56835000*t^3*y^7-364500000*y^6)*x-85050
00*t^2*y^10],
[(-4802*t^12*y+12994800*t^9)*x^3+(-144403*t^11*y^4+389846100*t^8*y^3-2387070000*t^5*y^
2+15309000000*t^2*y)*x^2+(11695380000*t^7*y^6+3402000000*t^4*y^5)*x+656100000000*y^7,(
16807*t^14*y^7-30321200*t^11*y^6)*x^3+(16807*t^13*y^10-43320900*t^10*y^9-1219660170000
*t^7*y^8-35721000000*t^4*y^7)*x^2+(-167076000000*t^6*y^11+1020600000000*t^3*y^10-65610
000000000*y^9)*x],
[3*x^2+t*y^7,-7*t^2*y^6*x^2+200*t*y^9*x+300*y^12]]
```

我々の実装は，Lazard の homogenize 法を利用していることから，例 10 で見たように出力は複雑になる場合が多々ある．これは，冗長なものや簡約できるものが出力に表れているからである．しかしながら，出力は加群のスタンダード基底となっている．

パラメータ付き syzygy 計算を局所環上でいかに効率良く計算するか，また出力をきれいな形に整理すること等は今後の課題である．

# 参考文献


[1] V.I. Arnold, Normal forms of functions in neighbourhoods of degenerate critical points. *Russian Math. Survey*, **29**, pp.10–50, (1974).

[2] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister and H. Schönemann, SINGULAR 3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations. `http://www.singular.uni-kl.de` (2012).

[3] D. Lazard, Gröbner bases, Gaussian elimination, and resolution of systems of algebraic equations. *Proc. EUROCAL '83, Lecture Note in Computer Science*, **162**, pp.146–156, Springer, (1983).

[4] Lê Dũng Tráng et B. Teissier, Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, *Annals of Mathematics*, **114**, pp.457–491, (1981).

[5] K. Nabeshima, On the computation of parametric Gröbner baes for modules and syzygies. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **27**, No.2, pp.217–238, (2010).

[6] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを利用したスタンダード基底・グレブナー基底の実装について．数理解析研究所講究録 **1764**, pp.102–125, (2011).

[7] 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について–半擬斉次孤立特異点の場合–. 数理解析研究所講究録 **1784**, pp. 111–122, (2012).

[8] K. Nabeshima and S. Tajima, On efficient algorithms for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pp.351–358, ACM-Press, (2014). associated with semi-quasihomogeneous singularities,

[9] M. Noro and T. Takeshima, Risa/Asir- A computer algebra system. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pp.387–396, ACM-Press, (1992).

[10] J.J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice and J.N. Tomazella, The Bruce-Roberts Number of a function on a weighted homogeneous hypersurface. *The Quarterly Journal of Mathematics* **64**, pp.269–280, (2013).

[11] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math* **27**, pp. 265–291, (1980).

[12] W. Y. Sit, An algorithm for solving parametric linear systems. *Journal of Symbolic Computation*, **13**, pp. 353–394, (1992).

[13] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について．数理解析研究所講究録 **1456**, pp.126–132, (2005).

[14] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II. 数理解析研究所講究録 **1568**, pp.74–80, (2007).

[15] S. Tajima, On polar varieties, logarithmic vector fields and holonomic D-modules. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B40**, pp. 41–51, (2013).

[16] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals. *Advanced Studies in Pure Mathematics* **56**, pp. 341–361, (2009).