数理解析研究所講究録
第 1931 巻 2015 年 89-93

ノルム錐計画問題の双対性

小崎敏寛 (Toshihiro Kosaki)*
ステラリンク株式会社 (Stera Link, Co.,Ltd.)

概 要

二次錐計画問題 [1] に表れる二次錐に似たノルム錐を導入する．この錐を使った数理計画問題を導入する．その問題に対して双対問題を考える．そして主問題と双対問題の間に弱双対定理がなりたつことを示す．

1 はじめに

二次錐は，ベクトルの 2 ノルムが非負実数で抑えられるという

$$t \geq \|x\|_2 \tag{1}$$

という形式で記述される．アイデアは，ノルムとしてより一般のノルムを考えることである．2 ノルムとは限らないノルムを用いて錐制約を $x_0 \geq \|x_{1:n}\|$ とする．この時，弱双対定理がなりたつことを示す．

2 1ノルムの場合

ノルムとして 1 ノルムを考える．すると次の問題を考えることになる．

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &\text{s.t. } Ax = b \\ &\qquad x_0 \geq |x_1| + \cdots + |x_n|. \end{aligned} \tag{P$_1$}$$

双対問題は,

$$\begin{aligned} &\max\ b^T y \\ &\text{s.t. } A^T y + z = c \\ &\qquad z_0 \geq \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\} \end{aligned} \tag{D$_1$}$$

となる．主問題と双対問題の目的関数値について,

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\ &= x^T z \\ &= x_0 z_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \\ &\geq x_0 z_0 - \|x_{1:n}\|_1 \|z_{1:n}\|_\infty \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

がなりたつことより，弱双対定理がなりたつ．

*toshihirokosaki@gmail.com

3　2ノルムの場合

ノルムとして2ノルムを考える．すると次の問題を考えることになる．

$$\begin{aligned}&\min\ c^T x\\&\text{s.t. } Ax = b\\&\quad x_0 \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.\end{aligned} \tag{P$_2$}$$

双対問題は，

$$\begin{aligned}&\max\ b^T y\\&\text{s.t. } A^T y + z = c\\&\quad z_0 \geq \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_n^2}.\end{aligned} \tag{D$_2$}$$

となる．主問題と双対問題の目的関数値について，

$$\begin{aligned}c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y\\&= x^T z\\&= x_0 z_0 + x_{1:n}^T z_{1:n}\\&\geq x_0 z_0 - \|x_{1:n}\|_2 \|z_{1:n}\|_2\\&\geq 0\end{aligned} \tag{3}$$

がなりたつことより，弱双対定理がなりたつ．

4　∞ノルムの場合

ノルムとして∞ノルムを考える．すると次の問題を考えることになる．

$$\begin{aligned}&\min\ c^T x\\&\text{s.t. } Ax = b\\&\quad x_0 \geq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.\end{aligned} \tag{P$_\infty$}$$

双対問題は，

$$\begin{aligned}&\max\ b^T y\\&\text{s.t. } A^T y + z = c\\&\quad z_0 \geq |z_1| + \cdots + |z_n|\end{aligned} \tag{D$_\infty$}$$

となる．主問題と双対問題の目的関数値について，

$$\begin{aligned}c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y\\&= x^T z\\&= x_0 z_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n\\&\geq x_0 z_0 - \|x_{1:n}\|_\infty \|z_{1:n}\|_1\\&\geq 0\end{aligned} \tag{4}$$

がなりたつことより，弱双対定理がなりたつ．

5 pノルムの場合

ノルムとしてpノルムを考える．$p \geq 1$として，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$をみたす$q$について，

$$x^T y \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{5}$$

がなりたつ (Hölder の不等式 [2])．次の問題を考える．

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.t.}\ & Ax = b \\ & x_0 \geq \|x_{1:n}\|_p. \end{aligned} \tag{P$_p$}$$

双対問題は，

$$\begin{aligned} \max\ & b^T y \\ \text{s.t.}\ & A^T y + z = c \\ & z_0 \geq \|z_{1:n}\|_q \end{aligned} \tag{D$_p$}$$

となる．主問題と双対問題の目的関数値について，

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\ &= x^T z \\ &= x_0 z_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \\ &\geq x_0 z_0 - \|x_{1:n}\|_p \|z_{1:n}\|_q \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

がなりたつことより，弱双対定理がなりたつ．

6 フロベニウスノルムの場合

行列のノルムとしてフロベニウスノルムを考える．行列$X \in \Re^{m \times n}$に対して，フロベニウスノルム

$$\|X\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2} \tag{7}$$

を考える．行列X_1とX_2の内積$X_1 \bullet X_2$を

$$X_1 \bullet X_2 := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{1_{ij}} X_{2_{ij}} \tag{8}$$

と定義する．次の問題を考える．

$$\begin{aligned} \min\ & d x_0 + C \bullet X \\ \text{s.t.}\ & a x_0 + \mathcal{A} X = b \\ & \|X\|_F \leq x_0 \end{aligned} \tag{P$_F$}$$

双対問題は,

$$\begin{aligned} &\max\ b^T y \\ &\text{s.t. } \mathcal{A}^* y + Z = C \\ &\quad\ a^T y + z_0 = d \\ &\quad\ \|Z\|_F \le z_0 \end{aligned} \tag{D$_F$}$$

となる. $\mathcal{A}$ は $\Re^{m\times n} \to \Re^l$ の線形作用素. $\mathcal{A}^*$ は

$$(\mathcal{A}X)^T y = X \bullet \mathcal{A}^*(y) \tag{9}$$

をみたす随伴作用素. 主問題と双対問題の目的関数値について,

$$\begin{aligned} dx_0 + C \bullet X - b^T y &= (a^T y + z_0)x_0 + (\mathcal{A}^*(y) + Z) \bullet X - (ax_0 + \mathcal{A}X)^T y \\ &= x_0 z_0 + X \bullet Z \\ &\ge x_0 z_0 - \|X\|_F \|Z\|_F \\ &\ge 0 \end{aligned} \tag{10}$$

がなりたつことより, 弱双対定理がなりたつ.

7 証明に使用した不等式

補題 1 実数 $a \ge b \ge 0$, $c \ge d \ge 0$ に対して,

$$ac - bd \ge 0 \tag{11}$$

がなりたつ.

(証明)

$$\begin{aligned} 0 \le (a-b)(c-d) &= ac + bd - ad - bc \\ &= ac - bd + d(b-a) + b(d-c) \end{aligned} \tag{12}$$

となる. $d \ge 0$, $a - b \ge 0$, $b \ge 0$, $c - d \ge 0$ より,

$$\begin{aligned} ac - bd &\ge d(a-b) + b(c-d) \\ &\ge 0 \end{aligned} \tag{13}$$

がなりたつ.

■

8 まとめと今後の課題

この論文では, 2 次錐計画問題を一般化したノルム錐計画問題を提案した. ノルム錐計画問題に対して, 弱双対性がなりたつことを示した.

今後の課題として次のようなものがある. 強双対性がなりたつかどうか調べる. ノルム錐計画問題を解く主双対内点法を考える. ベクトル変数だけでなく, 行列変数を考える.

参考文献

[1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second-Order Cone Programming, Mathematical Programming, 95, 3-51, 2003.

[2] R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 2007.