数理解析研究所講究録
第1932巻 2015年 12-20

オーソコンパクトとΔ-パラコンパクトの間

神奈川大学 工学部　平田 康史 (Yasushi Hirata)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

概 要

Buzyakovaによって定義されたΔ-パラコンパクト性は空間の2つの積$X\times X$の対角線の分離に関する性質であり、これをΔ^2-パラコンパクトともよぶことにすれば, 空間の3つの積$X\times X\times X$の対角線の分離に関するΔ^3-パラコンパクトという性質も自然に定義することができる. 単調正規空間がオーソコンパクトならば, Δ-パラコンパクトになることが知られているが, 両者の間に位置するΔ^3-パラコンパクトなどの性質について論じる.

1 Δ-パラコンパクト

空間Xと$n\in\omega$に対して, X^nにおける対角線をΔ_X^nで表す. 以下, 空間はすべてハウスドルフと仮定する. なので, Δ_X^nはX^nにおける閉集合である.

$$\begin{aligned}
\Delta_X^2 &= \{\langle x,x\rangle : x\in X\}\subseteq X\times X\\
\Delta_X^3 &= \{\langle x,x,x\rangle : x\in X\}\subseteq X\times X\times X\\
\Delta_X^n &= \{\langle x,x,\cdots,x\rangle : x\in X\}\subseteq X^n.
\end{aligned}$$

Buzyakovaは[3]において, 対角線の分離に関するいくつかの性質に統一的な名前を与えて, それらの間のimplicationを調べた. Δ-パラコンパクト性は, その中の1つの性質である. よく知られているように, 空間はパラコンパクトならば族正規であるが, 正規性を仮定すると, Δ-paracompact性はその間に位置する[6],[2],[3].

パラコンパクト$\rightarrow$正規かつΔ-パラコンパクト$\rightarrow$族正規

定義 1. 空間Xが**Δ-パラコンパクト**であるとは, $X\times X$における閉集合CでΔ_X^2と交わらないものに対して, Xの局所有限な開被覆$\mathcal{U}$で, $\bigcup\{U\times U : U\in\mathcal{U}\}$が$C$と交わらないようなものがとれることである.

簡単にわかるように, X が Δ-パラコンパクトであるためには, X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して, X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ で,

各 $U \in \mathcal{U}$ と $x_0, x_1 \in U$ に対して, $x_0, x_1 \in G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在する

という条件をみたすものが存在することが必要十分である.

2 Δ^n-パラコンパクト

Δ-パラコンパクト性は, X^2 の対角線の分離に関する性質なので, これを Δ^2-パラコンパクトともよぶことにする. 同様に, X^3 の対角線の分離に関する Δ^3-パラコンパクトという性質も自然に定義することができる.

定義 2. 空間 X が **Δ^3-パラコンパクト**であるとは, $X \times X \times X$ における閉集合 C で Δ_X^3 と交わらないものに対して, X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ で, $\bigcup\{U \times U \times U : U \in \mathcal{U}\}$ が C と交わらないようなものがとれることである.

これもまた簡単にわかるように, X が Δ^3-パラコンパクトであるためには, X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して, X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ で,

各 $U \in \mathcal{U}$ と $x_0, x_1, x_2 \in U$ に対して, $x_0, x_1, x_2 \in G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在する

という条件をみたすものが存在することが必要十分である.

明らかに, パラコンパクトな空間は Δ^3-パラコンパクトであり, Δ^3-パラコンパクトな空間は Δ-パラコンパクトである.

問題 1. Δ-パラコンパクトであるが Δ^3-パラコンパクトではないような空間は存在するか?

この問題について, 一般的な解決には至ってないが, ある条件下で否定的な結果を得た. (後述の定理 1).

空間の開集合族 $\mathcal{U}$ の任意の部分族 $\mathcal{U}'$ に対して $\bigcap \mathcal{U}'$ が開集合になるとき, $\mathcal{U}$ は**内部保存**であるという. 空間が**オーソコンパクト**であるとは, その任意の開被覆が内部保存な開細分をもつことである.

線型順序集合にすべての開区間を基とする位相を入れた空間を **LOTS** といい, その部分位相空間に同相な空間を **GO-空間**という. よく知られているように, GO-空間はオーソコンパクトな単調正規空間である.

定義 3. $n \in \omega$ とする. 空間 X が **Δ^n-パラコンパクト**であるとは, X^n における閉集合 C で Δ_X^n と交わらないものに対して, X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ で, $\bigcup\{U^n : U \in \mathcal{U}\}$ が C と交わらないものがとれることである.

つまり, X が $\varDelta^n$-パラコンパクトであるためには, X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して, X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ で,

各 $U \in \mathcal{U}$ と U の部分集合 J に対して, $|J| \leq n$ ならば, $J \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在する

という条件をみたすものが存在することが必要十分である.

定義 4. 空間 X が $\boldsymbol{\varDelta}^{<\omega}$**-パラコンパクト**であるとは, X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して, X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ で,

各 $U \in \mathcal{U}$ と U の部分集合 J に対して, $|J| < \omega$ ならば, $J \subseteq G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在する

という条件をみたすものが存在することである.

	パラコンパクト	
	$\downarrow$	
	$\varDelta^{<\omega}$-パラコンパクト	
$\to$	$\cdots$	
$\to$	$\varDelta^{n+1}$-パラコンパクト	
$\to$	$\varDelta^{n}$-パラコンパクト	
$\to$	$\cdots$	
$\to$	$\varDelta^{4}$-パラコンパクト	
$\to$	$\varDelta^{3}$-パラコンパクト	
$\to$	$\varDelta^{2}$-パラコンパクト	($\leftrightarrow$ $\varDelta$-パラコンパクト)
$\to$	$\varDelta^{1}$-パラコンパクト	($\leftrightarrow 0 = 0$)

$\varDelta$-パラコンパクトだが $\varDelta^3$-パラコンパクトではない空間があるか, というのが問題 1 であったが, 正規でオーソコンパクトな空間にはそのようなものは存在しないことが, 最近の研究でわかった.

定理 1. オーソコンパクトな正規空間においては, それが $\varDelta$-パラコンパクトであれば, 任意の $n \in \omega$ に対して $\varDelta^n$-パラコンパクトである.

定理 1 において, 正規性は必要であろうか?

問題 2. オーソコンパクトな空間で, $\varDelta$-パラコンパクトであるが, $\varDelta^3$-パラコンパクトではないものが存在するか?

また, 定理 1 において, オーソコンパクト性は必要であろうか? 仮定の正規性を単調正規性に強めたらどうか?

問題 3. (単調) 正規空間で, $\varDelta$-パラコンパクトであるが, $\varDelta^3$-パラコンパクトではないものが存在するか?

「すべての$n \in \omega$に対してΔ^n-パラコンパクト」であることよりも, $\Delta^{<\omega}$-パラコンパクトの方が強い条件に見えるが, 筆者はその差を示す例を発見するには至っていない.

問題 4. Δ-パラコンパクトであるが, $\Delta^{<\omega}$-パラコンパクトでない空間は存在するか? 特に次のような空間ではどうか?

- オーソコンパクトな空間.
- (単調) 正規空間.
- オーソコンパクトな正規空間.

問題2, 3, 4はいずれも自然な問いであるが, 特に, 問題2は, Δ-パラコンパクト空間とコンパクト空間の積において, オーソコンパクト性からΔ-パラコンパクト性を導くことができるか, ということにも関係する (後述の系3参照) ので, その意味でも興味深い.

3　単調正規空間におけるオーソコンパクト性とΔ-パラコンパクト性の間の性質

定義 5. 空間の部分集合族$\mathcal{H}$について,

- $\mathcal{H}$が**monotone**であるとは, 各$H_0, H_1 \in \mathcal{H}$について, $H_0 \subset H_1$か$H_1 \subset H_0$となっていること,
- $\mathcal{H}$が**directed**であるとは, 各$H_0, H_1 \in \mathcal{H}$に対して, $H_0 \subset H$かつ$H_1 \subset H$となる$H \in \mathcal{H}$が存在すること,

とする. 空間Xについて,

- Xが性質 **(Mo)** をもつとは, Xの任意の開被覆$\mathcal{G}$に対して,
$$\{\bigcup \mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ は } \mathcal{G} \text{ の } \textit{monotone} \text{ な開部分細分}\}$$
が局所有限な開細分をもつこと,
- Xが性質 **(Di)** をもつとは, Xの任意の開被覆$\mathcal{G}$に対して,
$$\{\bigcup \mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ は } \mathcal{G} \text{ の } \textit{directed} \text{ な開部分細分}\}$$
が局所有限な開細分をもつこと,

とする.

空間の部分集合族が monotone ならば, それは明らかに directed でもある. よって, 性質 (Mo) をもつ空間は性質 (Di) をもつ. パラコンパクトな空間が性質 (Mo) をもつことや, 性質 (Di) をもつ空間が $\Delta^{<\omega}$-パラコンパクトであることも容易にわかる. 性質 (Mo) からオーソコンパクト性が導かれることを示すのも難しくはない.

Buzyakova は GO-空間が Δ-パラコンパクトであることを示した [3]. Hirata と Yajima はオーソコンパクトな単調正規空間が Δ-パラコンパクトであることを示したが [5], よく知られているように, GO-空間はオーソコンパクトな単調正規空間なので, これは Buzyakova の結果の一般化になっている. その証明をみれば, 更に次のような一般化ができることがわかる.

系 1. オーソコンパクトな単調正規空間は, 性質 (Mo) をもつ.

問題4において, オーソコンパクトな単調正規空間について問わなかったのは, その場合には求められている例が存在しないことが上の系からわかるからである.

既知の implication を下図に示す.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{GO-空間} & \text{パラコンパクト} & \\
\downarrow & \downarrow & \\
\begin{array}{c}\text{オーソコンパクト}\\ \text{かつ単調正規}\end{array} & \rightarrow\ (\mathrm{Mo})\ \rightarrow & \text{オーソコンパクト} \\
 & \downarrow & \\
 & (\mathrm{Di}) & \\
 & \downarrow & \\
 & \Delta^{<\omega}\text{-パラコンパクト} & \\
 & \downarrow & \\
 & \vdots & \\
 & \downarrow & \\
 & \Delta^{n+1}\text{-パラコンパクト} & \\
 & \downarrow & \\
 & \Delta^{n}\text{-パラコンパクト} & \\
 & \downarrow & \\
 & \vdots & \\
 & \downarrow & \\
 & \Delta^{3}\text{-パラコンパクト} & \\
 & \downarrow & \\
 & \Delta^{2}\text{-パラコンパクト} & (\leftrightarrow \Delta\text{-paracompact}) \\
 & \downarrow & \\
 & \Delta^{1}\text{-パラコンパクト} & (\leftrightarrow 0 = 0)
\end{array}
$$

単調正規空間においては，すでに述べたように，オーソコンパクトならば Δ-パラコンパクトである．しかし，その逆は成り立たない．筆者の知る反例では，その差は $\Delta^{<\omega}$-パラコンパクト性と性質 (Di) の間に生じている．

事実 1. 単調正規空間で，$\Delta^{<\omega}$-パラコンパクトであるが，性質 (Di) をもたないものが存在する．

4 積空間のオーソコンパクト性と Δ-パラコンパクト性

定義 6. コンパクト部分集合からなる疎な被覆をもつ空間の全体のクラスを $\mathbb{DC}$ で表すこととする．Telgársky [7] の位相ゲーム $G(\mathbb{DC}, Y)$ において，Player I が必勝法をもつとき，空間 Y は **$\mathbb{DC}$-like** であるという．言い換えれば，空間 Y が $\mathbb{DC}$-*like* であるとは，Y の各閉集合 F に対して，その部分集合 $s(F)$ で $\mathbb{DC}$ に属するものを対応付けて，次の条件を満たすようにできることである．[4]

> Y の閉集合からなる減少列 $\{F_n : n \in \omega\}$ で，$F_0 = Y$ からはじまって，各 $n \in \omega$ に対して $F_{n+1} \cap s(F_n) = \emptyset$ となるようなものについては，$\bigcap_{n\in\omega} F_n = \emptyset$ となる．

明らかに，コンパクト空間は $\mathbb{DC}$-like なパラコンパクト空間であるし，非孤立点を高々 1 つしかもたないような空間も，$\mathbb{DC}$-like なパラコンパクト空間である．

定義 7. 積空間 $X \times Y$ の部分集合で，X の部分集合 U と Y の部分集合 V の積 $U \times V$ の形をしているものを，$X \times Y$ の**長方形**とよぶ．特に，U, V がそれぞれ X, Y のコゼロ集合ならば，$U \times V$ を $X \times Y$ における**コゼロ長方形**とよぶ．$X \times Y$ の有限個のコゼロ集合からなる被覆が，コゼロ長方形からなる σ-局所有限な細分をもつとき，$X \times Y$ は**長方形的積空間**であるという．

族正規性や**可縮**性は，正規性を強めた概念であり，単調正規空間やパラコンパクト空間はそのどちらの性質ももっている．単調正規空間 X とパラコンパクト空間 Y の積 $X \times Y$ が正規であるとき，$X \times Y$ が族正規 (可縮) であるかどうかを問うことは自然であるが，この問題は一般には難解なようである．正規性に長方形的積空間という条件を付加して，Yajima は次の定理を示した．

定理 2 ([8]). X は単調正規空間，Y は $\mathbb{DC}$-*like* なパラコンパクト空間とする．

(1) $X \times Y$ がオーソコンパクトならば，$X \times Y$ は正規で，長方形的積空間である．

(2) $X \times Y$ が正規で，長方形的積空間ならば，$X \times Y$ は族正規で可縮である．

Hirata と Yajima は，$X \times Y$ の Δ-パラコンパクト性が，上の定理の (1) の implication の間に位置することを示した．

定理 3 ([5])**.** *X は単調正規空間, Y は $\mathbb{DC}$-like なパラコンパクト空間とする.*

(1) $X \times Y$ がオーソコンパクトならば, $X \times Y$ は Δ-パラコンパクトである.

(2) $X \times Y$ が Δ-パラコンパクトで, X がオーソコンパクトならば, $X \times Y$ は正規で, 長方形的積空間である.

次の *(3)* は, *(1)*, *(2)* から直ちに得られる.

(3) $X \times Y$ がオーソコンパクトならば, $X \times Y$ は Δ-パラコンパクトで正規な長方形的積空間である.

$X \times Y$ はオーソコンパクト
→ **$\boldsymbol{X \times Y}$ は $\boldsymbol{\Delta}$-パラコンパクト かつ $\boldsymbol{X}$ はオーソコンパクト**
→ $X \times Y$ は正規, かつ長方形的積空間
→ $X \times Y$ は族正規で可縮

X が単調正規空間で, $X \times Y$ がオーソコンパクトだとすると, (Y が空でなければ) X もオーソコンパクトになるので, 特に X は Δ-パラコンパクトな正規空間である (系 1 の直前の段落参照). 定理 3 (3) は, 次のように一般化できることが最近の研究でわかった.

定理 4. *X は Δ-パラコンパクトな正規空間, Y は $\mathbb{DC}$-like なパラコンパクト空間とする. $X \times Y$ がオーソコンパクトならば, $X \times Y$ は Δ-パラコンパクトで正規な長方形的積空間である.*

定理 3 においては, X が Δ-パラコンパクトであるということは, 他の仮定から導かれるので, 仮定に明示して付加する必要はない. 一方, 定理 4 においては, X が Δ-パラコンパクトであるという仮定を省略することはできない. 単調正規な場合と異なり, 一般の正規空間では, オーソコンパクトであるからといって, Δ-パラコンパクトであるとはかぎらないからである.

メタコンパクトな正規空間 X で, パラコンパクトではないものが存在することが知られている [1]. そのような空間は, 族正規ではない. 一方, Δ-パラコンパクトな正規空間は, 族正規であることが知られている [6], [2], [3]. よって, X は, オーソコンパクトな正規空間であるが, Δ-パラコンパクトではない. この空間 X と, 1 点だけからなる空間 Y について, 定理 4 の仮定は, 「X が Δ-パラコンパクトである」ということ以外はすべて満たされているが, $X \times Y$ は Δ-パラコンパクトではない. このことから, 定理 4 においては, X が Δ-パラコンパクトであるという仮定を省略することはできない.

定理 1 より, オーソコンパクトな正規空間においては, Δ-パラコンパクト性から Δ^3-パラコンパクト性が導かれる. そして, 定理 4 の証明において, X が正規であるという仮定が使われる主要なところは, この X が Δ^3-パラコンパクトであるという

ことを導くところである. 実際, $X \times Y$ が可算パラコンパクトの場合や, Y がコンパクトな場合には, X に正規性を仮定する代わりに, X の $\Delta^{2+\frac{1}{2}}$-パラコンパクト性を仮定することで, 定理4と同様の結果を得ることができる. ここで, $\Delta^{n+\frac{1}{2}}$-パラコンパクトは, Δ^{n+1} パラコンパクトよりは弱くて, Δ^{n}-パラコンパクトよりは強い性質である (定義は後述).

系 2. X は $\Delta^{2+\frac{1}{2}}$-パラコンパクトな空間, Y は $\mathbb{DC}$-*like* なパラコンパクト空間とする. $X \times Y$ がオーソコンパクトで, 可算パラコンパクトならば, $X \times Y$ は Δ-パラコンパクトである.

系 3. X は $\Delta^{2+\frac{1}{2}}$-パラコンパクトな空間で, K はコンパクト空間とする. $X \times K$ がオーソコンパクトならば, $X \times K$ は Δ-パラコンパクトである.

上の2つの系において, 仮定の $\Delta^{2+\frac{1}{2}}$-パラコンパクトを, Δ-パラコンパクトにできるかどうかを問うのは自然である. 問題2においては, オーソコンパクトな空間で, Δ-パラコンパクトだが, Δ^{3}-パラコンパクトではないようなものが存在するかどうかを問うたが, もしそのような空間が存在しないのであれば, 系2, 3の仮定における $\Delta^{2+\frac{1}{2}}$-パラコンパクトを Δ-パラコンパクトにすることができる.

定義 8. X が $\boldsymbol{\Delta^{n+\frac{1}{2}}}$**-パラコンパクト**であるとは, X の任意の開被覆 $\mathcal{G}$ に対して, X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}$ で,

> 各 $U \in \mathcal{U}$ に対して, 点 $x(U) \in \mathcal{U}$ をとることができて, U の任意の部分集合 J について, $|J| \leq n$ ならば, $x(U) \in G$ かつ $J \subset G$ となる $G \in \mathcal{G}$ が存在する

という条件を満たすものが存在することである.

参考文献

[1] R. H. Bing, *Metrization of topological space*, Canad. J. Math., **3** (1951), 175–186.

[2] D. K. Burke and R. Z. Buzyakova, *More on separation of a diagonal*, Topology and Appl. **157** (2010), 2261–2270.

[3] R. Z. Buzyakova, *Separation of a diagonal*, Topology and Appl. **157** (2010), 352–358.

[4] F. Galvin and R. Telgársky, *Stationary strategies in topological games*, Topology and Appl. **22** (1986), 51-69.

[5] Y. Hirata and Y. Yajima, *Separation of diagonal in monotonically normal spaces and their products*, Topology and Appl., to appear.

[6] L.-X. Peng and J. Li, *A note on separation of diagonal*, Topology Proc. **39** (2012), 141-148.

[7] R. Telgársky, *Spaces defined by topological games*, Fund. Math. **88** (1975), 193–223.

[8] Y. Yajima, *Products of monotonically normal spaces with factors defined by topological games*, Topology and Appl. **159** (2012), 1223–1235.