数理解析研究所講究録
第 1932 巻 2015 年 36-41

Insertion theorems for maps to ordered vector spaces

高崎経済大学・経済学部　山崎 薫里

Kaori Yamazaki

Faculty of Economics,
Takasaki City University of Economics

1　準備

本稿を通して, 空間はすべてハウスドルフ位相空間であることを仮定する. $\mathbb{R}$ を実数全体の集合, λ, κ を無限基数とする. また, 線形空間は常に実線形空間とする. 関数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ が, すべての $x \in X$ について $f(x) \leq g(x)$ であるとき, $f \leq g$ と表す. また, すべての $x \in X$ について $f(x) < g(x)$ であるとき, $f < g$ と表す.

定理 1.1. (**Katetŏv-Tong の挿入定理** [7], [10]) 位相空間 X が正規であるための必要十分条件は, 任意の下半連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と $g \leq f$ である任意の上半連続関数 $g : X \to \mathbb{R}$ に対し, $g \leq h \leq f$ となる連続関数 $h : X \to \mathbb{R}$ が存在することである.

定理 1.2. (**Dowker-Katětov の挿入定理** [3], [7]) 位相空間 X が正規かつ可算パラコンパクトであるための必要十分条件は, 任意の下半連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と $g < f$ である任意の上半連続関数 $g : X \to \mathbb{R}$ に対し, $g < h < f$ となる連続関数 $h : X \to \mathbb{R}$ が存在することである.

定理 1.1 及び 1.2 の関数の終域 $\mathbb{R}$ をバナッハ束に拡張する研究は, これまで [5], [8], [11], [12] 等でなされてきた.

ここで, 別のタイプの挿入定理のために, いくつかの用語を紹介する. 半順序線形空間 $(Y, \leq)$ は, 次の $(i), (ii)$ の条件を満たすとき, <u>順序線形空間</u> (ordered vector space) と呼ばれる.

(i) $x, y, z \in Y$ について, $x \leq y$ であるならば $x + z \leq y + z$ である.

(ii) $x, y \in Y$ と $r \geq 0$ となる $r \in \mathbb{R}$ について, $x \leq y$ であるならば $rx \leq ry$ である.

線形空間 Y において, $Y^+ = \{y \in Y : y \geq \mathbf{0}\}$ は <u>正錘</u> (positive cone) と呼ばれる. 線形位相空間 Y が <u>順序位相線形空間</u> (ordered topological vector space) であるとは, Y が順序線形空間で正錘 Y^+ が閉集合であるときをいう.

Y を順序位相線形空間, $y_1, y_2 \in Y$ とする. $y_1 \leq y_2$ かつ $y_1 \neq y_2$ であるとき, $y_1 < y_2$ と表す. また, $y_2 - y_1$ が Y における Y^+ の内点であるとき, $y_1 \ll y_2$ と表す. 関数 $f, g : X \to Y$ について, すべての $x \in X$ について $f(x) < g(x)$ (resp. $f(x) \ll g(x)$) であるとき, $f < g$ (resp. $f \ll g$) と表す.

Borwein-Théra [2] は, 拡張実数 (extended real) を一般化する'拡張' 順序位相線形空間を次のように導入した. 順序位相線形空間 $(Y,\leq)$ に対し, Y に含まれない 2 点 $\infty, -\infty$ をとり, $Y^\bullet_\bullet = Y \cup \{\infty, -\infty\}$, $Y^\bullet = Y \cup \{\infty\}$, $Y_\bullet = Y \cup \{-\infty\}$ とおく. Y の順序 $\leq$ を, $-\infty \leq \infty$ かつ $-\infty \leq y \leq \infty$ $(\forall y \in Y)$ となるように $Y^\bullet_\bullet$ 上に拡張する. [2] では, $-\infty \ll y \ll \infty$ $(\forall y \in Y)$ であると仮定し, $\ll$ も $Y^\bullet_\bullet$ 上に拡張して用いていると思われる. また, [2] では, 関数 $f : X \to Y^\bullet$ に対し, $\phi_f(x) = \{y \in Y : y \leq f(x)\}$ (resp. $\phi_f(x) = \{y \in Y : y \geq f(x)\}$) と定められる集合関数 $\phi_f : X \to 2^Y$ が下半連続であるとき, f を <u>下半連続</u> (lower semi-continuous) (resp. <u>上半連続</u> (upper semi-continuous)) であると定義している.

定理 1.3. **(Borwein-Théra の挿入定理** [2]**)** X をパラコンパクト空間, Y を順序位相線形空間で正錐が内点をもつとする. このとき, 任意の下半連続関数 $f : X \to Y^\bullet$ と $g \ll f$ である任意の上半連続関数 $g : X \to Y_\bullet$ に対し, $g \ll h \ll f$ となるような連続関数 $h : X \to Y$ が存在する.

本稿では, [2] において与えられた $Y^\bullet_\bullet$ への半連続関数の定義を $Y^\bullet_\bullet$ の位相を用いた扱いやすい形で与えることにより, 定理 1.3 のような形の挿入定理を与える。これは, 定理 1.2 および 1.3 を拡張するものである. $A \subset Y$ について, $A^\bullet = A \cup \{\infty\}$, $A_\bullet = A \cup \{-\infty\}$ と表す.

Y が上に有向であるとき (すなわち, Y の 2 点集合 $\{y_1, y_2\}$ が上界 $y_3 \in Y$ をもつとき), $Y^\bullet_\bullet$ 上の位相を次の 1〜3 を満たすように定める:

1. Y は $Y^\bullet_\bullet$ の開集合;
2. $\{(V + Y^+)^\bullet : V$ は Y の空でない開集合$\}$ は ∞ における $Y^\bullet_\bullet$ の開基;
3. $\{(V - Y^+)^\bullet : V$ は Y の空でない開集合$\}$ は $-\infty$ における $Y^\bullet_\bullet$ の開基;

正錐が内点をもつような順序位相線形空間は, 上に有向である. また, $Y^\bullet$ 及び $Y_\bullet$ は $Y^\bullet_\bullet$ の部分空間である. $Y^\bullet_\bullet$ 上の $<$ や $\ll$ は, より一般的に, 半順序集合である位相空間 Z (ここで, 位相は順序との関係は特に要求しない) において定義する.

$(Z, \leq)$ を半順序集合である位相空間, $y_1, y_2 \in Z$ とする. $y_1 \leq y_2$ かつ $y_1 \neq y_2$ のとき, $y_1 < y_2$ と表す. また, $y_1 \ll y_2$ とは, $Z = \{y_1\} = \{y_2\}$ のとき, または, y_1 の Z における開近傍 V_1 と y_2 の Z における開近傍 V_2 が $V_1 < V_2$ となるようにとれるときをいう. ここで, $V_1 < V_2$ とは, すべての $v \in V_1$ と $v' \in V_2$ について $v < v'$ であることをいう. この定義は, 順序位相線形空間の場合の拡張である.

命題 1.4. 自明でない上に有向な順序位相線形空間 Y に対し, 次が成り立つ.

(1) Y の正錘が内点をもつとき, $-\infty \ll \infty$ は常に成立する.

(2) Y の正錘が内点をもつとき, $(Y^+)^\bullet$ および $(Y^-)_\bullet$ は $Y^\bullet_\bullet$ の閉集合である.

(3) 正則 $(= T_3 + T_1)$ 空間 Y の正錘が内点をもつとき, $Y^\bullet_\bullet$ は正則である.

(4) 次の 7 つの条件は同値 : (a) Y の正錘は内点をもつ; (b) 任意の $y \in Y$ について $y \ll \infty$; (c) $\mathbf{0} \ll \infty$; (d) ある $y \in Y$ について $y \ll \infty$; (e) 任意の $y \in Y$ について $-\infty \ll y$; (f) $-\infty \ll \mathbf{0}$; (g) ある $y \in Y$ について $-\infty \ll y$.

(5) $y_1, y_2 \in Y^\bullet_\bullet$ について，もし $y_1 \ll y_2$ ならば $y_1 < y_2$ である．

X を位相空間，Z を半順序集合である位相空間とする．本稿では，関数 $f : X \to Z$ が下半連続 (lower semi-continuous)（resp. 上半連続 (upper semi-continuous)）であるとは，任意の Z の開集合 V に対し $\{x \in X : \exists v \in V \text{ s.t. } v \leq f(x)\}$ (resp. $\{x \in X : \exists v \in V \text{ s.t. } v \geq f(x)\}$) が開集合であることと定義する．この定義は，$Z = Y^\bullet_\bullet$ のときには [2] のものと一致する．

2　挿入定理

Dowker-Katětov の挿入定理は，次のように拡張される．

定理 2.1. X を位相空間，Y を自明でない可分な順序位相線形空間で正錘が内点をもつとする．このとき，次の条件は同値である．

(1) X は正規かつ可算パラコンパクト;

(2) 任意の下半連続関数 $f : X \to Y^\bullet$ と $g \ll f$ となる任意の上半連続関数 $g : X \to Y_\bullet$ に対し，$g \ll h \ll f$ となる連続関数 $h : X \to Y$ が存在する;

(3) 任意の下半連続関数 $f : X \to Y$ と $g \ll f$ となる任意の上半連続関数 $g : X \to Y$ に対し，$g \ll h \ll f$ となる連続関数 $h : X \to Y$ が存在する

よく知られたバナッハ束 c や $C([0,1])$ などの他，有限個の x_n 以外は定値になるような $(x_n) \in c$ 全体からなる (完備ではない) 空間も正錘が内点をもつ空間の例である．

注 2.2. Katětov-Tong の挿入定理では，終域 $\mathbb{R}$ を c_0 や l_p $(1 \leqq p < \infty)$ に置き換えられるが，c には置き換えられないことが知られている ([5], [8], [13])．このことは，自明でない可分なバナッハ束が Katětov-Tong の挿入定理の終域のテスト空間となるとは限らないということを示している．一方，Dowker-Katětov の挿入定理の終域 $\mathbb{R}$ は，自明でない可分なバナッハ束に置き換えられることが知られている ([13])．定理 2.1 は，自明でない任意の可分な順序位相線形空間で正錘が内点をもつものは，Borwein-Théra の挿入定理の可算版における終域のテスト空間になるということを示している．

順序位相線形空間 $(Y, \leq)$ において，$a_\alpha \leq a_\beta \leq \cdots \leq b_\beta \leq b_\alpha$ $(\alpha \leq \beta < \lambda)$ かつ $a_\alpha \ll b_\alpha$ $(\alpha < \lambda)$ であるような Y の部分集合 $\{a_\alpha, b_\alpha : \alpha < \lambda\}$ は常に $\bigcap_{\alpha<\lambda}[a_\alpha, b_\alpha] \neq \emptyset$ であるとき，Y は <u>単調 λ 順序区間交叉性</u> (monotone λ-order-interval intersection property) をもつという．

注 2.3. 無限基数 λ について，Z_λ を $(\lambda+1) \times \{0,1\}$ から 2 点 $(\lambda, 0)$ と $(\lambda, 1)$ を同一視してできる商空間をとする．$C(Z_\lambda)$ は Z_λ 上の実数値連続関数全体からなる sup ノルムをもつバナッハ空間である．この空間は，大田により [8, Theorem 2] で導入された．$C(Z_\lambda)$ は，単調 λ 順序区間交叉性をもたない．

次の定理において, (1) $\Rightarrow$ (2) は本質的には [2, Theorem 3.3] による.

定理 2.4. 位相空間 X について, 次は同値である:

(1) X は正規かつ κ-パラコンパクト;

(2) 任意の自明でない順序位相線形空間 Y で $d(Y) \leq \kappa$ であり正錘が内点をもつものに対し, 任意の下半連続関数 $f : X \to Y^{\bullet}$ と $g \ll f$ となる任意の上半連続関数 $g : X \to Y_{\bullet}$ に対し, $g \ll h \ll f$ となる連続関数 $h : X \to Y$ が存在する;

(3) 任意の $\lambda \leq \kappa$ について, 自明でないようなパラコンパクト順序位相線形空間 Y で正錘が内点をもち, Y は単調 λ 順序区間交叉性をもたないもので次の性質を満たすものが存在する : 任意の下半連続関数 $f : X \to Y$ と $g \ll f$ となる任意の上半連続関数 $g : X \to Y$ に対し, $g \ll h \ll f$ となる連続関数 $h : X \to Y$ が存在する.

位相空間 X が cb-空間 ([6]) であるとは, 局所有界な関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し, $|f| \leq g$ となるような連続関数 $g : X \to \mathbb{R}$ がとれるときをいう.

定理 2.5. X を位相空間, Y を自明でない順序位相線形空間で正錘が内点をもつとする. このとき, 次は同値である.

(1) X は cb-空間;

(2) 任意の上半連続関数 $g : X \to Y_{\bullet}$ に対し, $g \ll h$ となる連続関数 $h : X \to Y$ が存在する;

(3) 任意の上半連続関数 $g : X \to Y$ に対し, $g \ll h$ となる連続関数 $h : X \to Y$ が存在する.

定理 2.6. 位相空間 X について, 次は同値である.

(1) X は完全正規;

(2) 任意の自明でない可分な順序位相線形空間で正錘が内点をもつようなバナッハ空間 Y について, 任意の下半連続関数 $f : X \to Y^{\bullet}$ と $g \leq f$ である任意の上半連続関数 $g : X \to Y_{\bullet}$ に対し, $g \leq h \leq f$ となるような連続関数 $h : X \to Y$ で次の条件 (i) と (ii) を満たすものが存在する :

　(i) $g(x) < f(x)$ となるような $x \in X$ について, $g(x) < h(x) < f(x)$ が成立,

　(ii) $g(x) \ll f(x)$ となるような $x \in X$ について, $g(x) \ll h(x) \ll f(x)$ が成立;

(3) 自明でない順序位相線形空間で正錘が内点をもつような Y で次の性質を満たすものが存在する : 任意の下半連続関数 $f : X \to Y$ と $g \leq f$ となる任意の上半連続関数 $g : X \to Y$ で $f(x) \neq g(x)$ となる $x \in X$ に関しては $g(x) \ll f(x)$ となるものに対し, $g \leq h \leq f$ となるような連続関数 $h : X \to Y$ で次をみたすものが存在する :

(i) $f(x) \neq g(x)$ となる $x \in X$ について, $g(x) \ll h(x) \ll f(x)$ が成立.

注 2.7. '拡張' 順序位相線形空間を挿入定理の終域に用いると, ある部分集合上の挿入の上界を ∞ としたり下界を $-\infty$ とすることが可能になる. すなわち, 求めたい連続関数の存在範囲に上界や下界が無い場合にも応用ができることになる. 例えば, 定理2.1から次のような結果が得られる: 正規な可算パラコンパクト空間 X とその閉集合 A, 正錐が内点をもつような自明でない可分順序位相線形空間 Y について, 任意の下半連続関数 $f : A \to Y^{\bullet}$ と $g \ll f$ となるような任意の上半連続関数 $g : A \to Y_{\bullet}$ について, $g \ll h|A \ll f$ となるような連続関数 $h : X \to Y$ が存在する.

3 追：挿入定理

順序線形空間 $(Y, \leq)$ の任意の $x, y \in Y$ が上限 $x \vee y$, 下限 $x \wedge y$ をもつとき, Y は Riesz 空間 (Riesz space, vector lattice) と呼ばれる. バナッハ空間が Riesz 空間でさらに, $x \vee (-x) \leq y \vee (-y)$ ならば $\|x\| \leq \|y\|$ であるとき, バナッハ束 (Banach lattice) と呼ばれる.

デデキント σ 完備性を用いて, 以下のような挿入定理が与えられる. Riesz 空間 Y が デデキント σ 完備 (Dedekind σ-complete) であるとは, Y の上に有界な可算部分集合は上限をもつときをいう. Riesz 空間 Y の部分ベクトル空間 K が 部分 Riesz 空間 (Riesz subspace) であるとは, 任意の $u, v \in K$ について $u \vee v \in K$ となることである. Riesz 空間 Y の部分 Riesz 空間 K が Y で 超順序稠密 (super order dense) であるとは, $u > \mathbf{0}$ となる任意の $u \in Y$ に対し, Y での上限が u となるような増大点列 $\{u_n\} \subset K \cap Y^+$ が存在するときをいう. Riesz 空間 L, M の1対1対応 $\pi : L \to M$ が Riesz 同型 (Riesz isomorphism) であるとは, $u \wedge v = \mathbf{0}$ ならば $\pi(u) \wedge \pi(v) = \mathbf{0}$ のときをいう. Riesz 空間 Y が 準デデキント σ 完備 (almost Dedekind σ-complete) であるとは, Y はあるデデキント σ 完備 Riesz 空間の超順序稠密部分 Riesz 空間と Riesz 同型であるときをいう.

命題 3.1. 位相空間 X について, 次の条件は同値である.

(1) X は正規かつ可算パラコンパクト;

(2) 任意の可分バナッハ束 Y に対し, 任意の下半連続関数 $f : X \to Y^{\bullet}$ と $g \leq f$ となる任意の上半連続関数 $g : X \to Y_{\bullet}$ に対し, $g \leq h \leq f$ となる連続関数 $h : X \to Y$ が存在する;

(3) 可分な準デデキント σ 完備バナッハ束 Y でデデキント σ 完備ではないもので, 次の条件をみたすものが存在する：任意の下半連続関数 $f : X \to Y$ と $g \leq f$ となる任意の上半連続関数 $g : X \to Y$ に対し, $g \leq h \leq f$ となる連続関数 $h : X \to Y$ が存在する.

References

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, Locally solid Riesz Spaces with Applications to Economics, Second Edition, SURV 105, AMS, 2003.

[2] J. M. Borwein and M. Théra, *Sandwich theorems for semicontinuous operators*, Canad. Math. Bull. 35 (1992), 463–474.

[3] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math. 3 (1951), 219–224.

[4] R. Engelking, General Topology, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] V. Gutev, H. Ohta and K. Yamazaki, *Selections and sandwich-like properties via semi-continuous Banach-valued functions*, J. Math. Soc. Japan 55 (2003), 499–521.

[6] J. G. Horne Jr, *Countable paracompactness and cb-spaces*, Not. Am. Math. Soc. 6 (1959), 629-630.

[7] M. Katětov, *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math. 38 (1951), 85–91. Correction: Fund. Math. 40 (1953), 203-205.

[8] H. Ohta, *An insertion theorem characterizing paracompactness*, Topology Proc. 30 (2006), 557–564.

[9] H. H. Schaefer with M. P. Wolff, Topological Vector Spaces, Second edition, GTM 3, Springer, 1999.

[10] H. Tong, *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces*, Duke Math. J. 19 (1952), 289–292.

[11] T. Yamauchi, *Continuous selections avoiding extreme points*, Topology and its Appl. 155 (2008), 916-922.

[12] K. Yamazaki, *Insertion theorems for maps to Banach lattices*, Topology and its Appl. 157 (2010), 1955–1965.

[13] K. Yamazaki, *The range of maps on classical insertion theorems*, Acta. Math. Hungar. 132 (2011), 42–48.

[14] K. Yamazaki, *Monotone countable paracompactness and maps to ordered topological vector spaces*, Topology and its Appl. 169 (2014), 51–70.