数理解析研究所講究録
第 1932 巻 2015 年 42-46

漸近的性質 C について

(On asymptotic property C)

愛媛大学 理工学研究科 山内貴光
Takamitsu Yamauchi
Graduate School of Science and Engineering,
Ehime University

本稿では, coarse 幾何学における無限次元性の一種である漸近的性質 C について解説し, 得られた結果を報告する.

1. 漸近的性質 C

Coarse 幾何学における基本的概念として, 漸近次元 (asymptotic dimension) と性質 A (property A) が挙げられる ([12], [15]). これらは, Yu の研究 [19], [20] によって Novikov 予想や coarse Baum-Connes 予想に深く関わることが分かっており, 与えられた群[1]や距離空間の漸近次元が有限であるか, または, それらが性質 A をみたすかは, 重要な問題となる. 漸近次元と性質 A は以下で定められる[2].

定義 1.1. 距離空間 (X,d) の部分集合 U,U' に対して,

$$\operatorname{diam} U=\sup\{d(x,y):x,y\in U\},\quad d(U,U')=\inf\{d(x,x'):x\in U,x'\in U'\}$$

と表す. X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が **R-disjoint** であるとは, 異なる $U,U'\in\mathcal{U}$ に対して $d(U,U')\geq R$ が成り立つときをいう. また, $\sup\{\operatorname{diam} U:U\in\mathcal{U}\}$ が有限であるとき, $\mathcal{U}$ は**一様有界**であるという.

定義 1.2 (Gromov [7]). 次の条件をみたす最小の n を X の**漸近次元**という.
「任意の正の数 R に対して, 次の (1)–(3) をみたす $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_n$ が存在する.
(1) $\bigcup_{i=0}^{n}\mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は R-disjoint である.
(3) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.」

---

[1] 一般に, 可算群には coarse 同値を除いてただ一つの有界幾何をもち左不変で一様離散な距離が存在する [16]. ここで, 距離空間 (X,d) が**一様離散** (uniformly discrete) であるとは, $\inf\{d(x,y):x,y\in X,\,x\neq y\}>0$ が成り立つときをいう. また, 一様離散距離空間 (X,d) が**有界幾何** (bounded geometry) をもつとは, 任意の $R>0$ に対して自然数 $N(R)$ が存在し, 各 $x\in X$ に対して $\{x'\in X:d(x,x')\leq R\}$ の濃度が $N(R)$ 以下であるときをいう. 一方, 群 G 上の距離 d が**左不変** (left-invariant) であるとは, 任意の $g,h,\gamma\in G$ に対して $d(\gamma g,\gamma h)=d(g,h)$ が成り立つときをいう. 本稿において, 可算群はすべて有界幾何をもち左不変で一様離散な距離をもつ距離空間と考える.

[2] 漸近次元の survey としては [2], [3] がある. 性質 A の基本的性質については [17] が詳しい. 1 の分割を用いた性質 A の研究として [4] がある.

定義 1.3 (Yu [20]). 一様離散[3]な距離空間 (X, d) が**性質 A** をみたすとは, 任意の $\varepsilon > 0$ と $R > 0$ に対して, 次の (1), (2) をみたす $S > 0$ と $X \times \mathbb{N}$ の有限部分集合からなる族 $\{A_x : x \in X\}$ が存在するときをいう.

(1) $d(x, y) \leq R$ ならば $|A_x \triangle A_y| \leq \varepsilon |A_x \cap A_y|$,
(2) 各 $x \in X$ に対して $A_x \subset B(x, S) \times \mathbb{N}$.

ここで, $\mathbb{N}$ は正の整数全体を, $|A|$ は集合 A の濃度を, $B(x, S)$ は集合 $\{y \in X : d(x, y) \leq S\}$ を表す.

Higson and Roe [11] は, 漸近次元が有限で有界幾何[4]をもつ距離空間は性質 A をみたすことを証明した. 従って, 性質 A は coarse 幾何学における無限次元性ととらえることができる. 一方, 次の Ostrand の定理 [13] により, 漸近次元は被覆次元の coarse 幾何学的類似と考えられる.

定理 1.4 (Ostrand [13]). コンパクト距離空間 X に対して, 次の条件をみたす最小の n は X の被覆次元と等しい.「任意の正の数 ε に対して, 次の (1)–(3) をみたす $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在する:

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は互いに素 (disjoint) である.
(3) $\sup\{\operatorname{diam} U : U \in \mathcal{U}\} < \varepsilon$ である.」

この類似に着目し, Dranishnikov [5] は, 次元論や ANR 理論等における定理の coarse 幾何学的対応概念を考えることによる coarse 幾何学の研究を提唱した. その中で, Haver [8] による性質 C (property C)[5] の coarse 幾何学への対応概念として, 漸近的性質 C (asymptotic property C) を導入した.

定義 1.5 (Dranishnikov [5]). 距離空間 X が**漸近的性質 C** をみたすとは, 任意の正の数の列 $R_0 < R_1 < \cdots$ に対して, 次の (1)–(3) をみたす有限個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在することをいう.

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は R_i-disjoint である.
(3) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.

---

[3]脚注 1 を参照.

[4]脚注 1 を参照.

[5]コンパクト距離空間 X が**性質 C** をみたすとは, 任意の正の数の列 $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \cdots > 0$ に対して, 次の (1)–(3) をみたす有限個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在することをいう.

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は互いに素である.
(3) 各 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ について $\sup\{\operatorname{diam} U : U \in \mathcal{U}_i\} < \varepsilon_i$ である.

漸近次元が有限な距離空間は漸近的性質 C をみたす. Dranishnikov [5] は, 有界幾何をもつ距離空間が漸近的性質 C をみたせば, 性質 A をみたすことを証明した. 従って, 有界幾何をもつ一様離散な距離空間において次が成り立つ.

$$\text{漸近次元が有限} \Longrightarrow \text{漸近的性質 C} \Longrightarrow \text{性質 A}$$

注意 1.6. 漸近次元が無限で漸近的性質 C をみたす距離空間の例は Radul [14] によって与えられた. 一方, 性質 A をみたし漸近的性質 C をみたさない距離空間の例は知られていない.

2. Finite decomposition complexity と漸近的性質 C

Guentner, Tessera and Yu は, 多様体の位相的剛性の研究 [9] において, 距離空間に対して次の finite decomposition complexity (FDC) を導入した.

定義 2.1. 距離空間 (X,d) の 2 つの部分集合族 $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ と $R>0$ に対して, $\mathcal{F}$ が $\mathcal{E}$ を R-**分割する** ($\mathcal{E} \xrightarrow{R} \mathcal{F}$) とは, 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して, $E = \bigcup \mathcal{F}_1 \cup \bigcup \mathcal{F}_2$ を満たす R-disjoint な $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ が存在するときをいう.

定義 2.2 (Guentner, Tessera and Yu [9])**.** X を距離空間とする. $\mathcal{F}_0 = \{X\}$ とおき, プレーヤー A, B による次のゲームを考える.

ラウンド i : プレーヤー A は ($\mathcal{F}_{i-1}$ を見て) $R_i > 0$ を与える. プレーヤー B は (R_i を見て) $\mathcal{F}_{i-1}$ を R_i-分割する X の部分集合族 $\mathcal{F}_i$ を与える.

$$\{X\} = \mathcal{F}_0 \xrightarrow{R_1} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{R_2} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{R_3} \cdots \xrightarrow{R_i} \mathcal{F}_i \xrightarrow{R_{i+1}} \cdots.$$

このゲームの勝敗は次で定める. プレーヤー B があるラウンド n で一様有界な $\mathcal{F}_n$ を与えたとき, B の勝利とする. そうでないとき, プレーヤー A の勝利とする.

このゲームにおいてプレーヤー B が必勝法をもつとき, X は **finite decomposition complexity (FDC)** をもつという.

Guentner, Tessera and Yu [10] は, 漸近次元が有限な距離空間が FDC をみたすこと, および, FDC および有界幾何をもつ距離空間が性質 A をみたすことを証明した. 従って, FDC も漸近的性質 C と同様, 漸近次元の有限性と性質 A の間に位置する概念である.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \text{FDC} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{漸近次元が有限} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{性質 A} \\ & \text{漸近的性質 C} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

注意 2.3. FDC は可算群[6]の部分群や (可算) 直和, および拡大をとる操作で閉じており, 従って, 初等従順群[7]は FDC をもつ [10]. 従順群が FDC をもつか, 特に, 初等従順群でない従順群の例である Grigorchuk 群が FDC をもつかは未解決である ([10, Question 5.1.3]).

[6]脚注 1 を参照

[7]有限群と可換群を含み, 直和と拡大をとる操作で閉じる最小の可算群のクラスに属する群.

FDC と漸近的性質 C の関係については分かっていない. 注意 2.3 より, 整数群 $\mathbb{Z}$ の可算直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ は FDC をもつ. ここで, 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ における距離は, 次で与えられる.

$$d((x_i),(y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} i|x_i - y_i|, \quad (x_i),(y_i) \in \bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}.$$

この群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ が漸近的性質 C をみたさなければ, FDC と漸近的性質 C は異なる概念であることが示される. このことから, Dranishnikov and Zarichnyi [6] は次の問題を提起した.

問題 2.4 (Dranishnikov and Zarichnyi [6, Question 4.3]). 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ は漸近的性質 C みたすか.

この問題 2.4 に対して得られた結果は肯定的であった.

定理 2.5 ([18]). 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ は漸近的性質 C をみたす.

注意 2.6. 群 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ の漸近次元は無限である ([12, Example 2.6.1] 参照). 従って, $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ は, 漸近次元が無限で漸近的性質 C をみたす可算群の例である (注意 1.6 参照).

3. 関連する問題

問題 2.4 が肯定的であったので, 次は未解決のままである.

問題 3.1. FDC をもち漸近的性質 C をみたさない可算群 (または距離空間) は存在するか.

次も分かっていないと思われる.

問題 3.2. 漸近的性質 C をみたし FDC をもたない可算群 (または距離空間) は存在するか.

整数群 $\mathbb{Z}$ の漸近次元は 1 であり, 階数 n の自由群 F_n の漸近次元も 1 である. しかし, 次は分からない.

問題 3.3. 階数 2 の自由群からなる可算直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{F}_2$ は漸近的性質 C をみたすか. より一般に, 漸近次元が有限な可算群からなる可算直和は漸近的性質 C をみたすか.

漸近的性質 C をみたす 2 つの距離空間の直積についても分かっていない.

問題 3.4 ([1, Question 1.3]). 2 つの漸近的性質 C をみたす距離空間 X, Y の直積 $X \times Y$ は漸近的性質 C をみたすか.

漸近的性質 C は群の拡大で閉じるか分かっていない. 特に, 次も分からない.

問題 3.5. Wreath 積 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = (\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ は漸近的性質 C をみたすか.

注意 3.6. 注意 2.3 より, $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{F}_2$ と $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ は FDC をもつ. 従って, 問題 3.3 または問題 3.5 が否定的であれば, FDC をもち漸近的性質 C をみたさない可算群の例が構成できたことになる.

注意 3.7. 群 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ の漸近次元は無限なので ([12, Proposition 2.6.3] 参照), 問題 3.5 が肯定的であれば, 漸近次元が無限で漸近的性質 C をみたす有限生成群の例が構成できたことになる.

References

[1] T. Banakh, B. Bokalo, I. Guran, T. Radul and M. Zarichnyi, *Problems from the Lviv topological seminar*, in Open problems in Topology II (E. Pearl ed.), Elseiver, 2007, pp. 655–667.

[2] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, Topology Appl. **155** (2008), 1265–1296.

[3] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension in Będlewo*, Topology Proc. **38** (2011), 209–236.

[4] M. Cencelj, J. Dydak and A. Vavpetič, *Coarse amenability versus paracompactness*, J. Topol. Anal. **6** (2014), 125–152.

[5] A. Dranishnikov *Asymptotic Topology*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 1085–1129.

[6] A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Asymptotic dimension, decomposition complexity, and Havar's property C*, Topology Appl. **169** (2014), 99–107.

[7] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[8] W. E. Haver, *A covering property for metric spaces*, Topology Conference (Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Va., 1973), pp. 108–113, Lecture Notes in Math., Vol. 375, Springer, Berlin, 1974.

[9] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *A notion of geometric complexity and its application to topological rigidity*, Invent. Math. **189** (2012), 315–357.

[10] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *Discrete groups with finite decomposition complexity*, Groups Geom. Dyn. **7** (2013), 377–402.

[11] N. Higson and J. Roe, *Amenable group actions and the Novikov conjecture*, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 143–153.

[12] P. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zürich, 2012.

[13] P. A. Ostrand, *Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 619–622.

[14] T. Radul, *On transfinite extension of asymptotic dimension*, Topology Appl. **157** (2010), 2292–2296.

[15] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, Univ. Lect. Ser., vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[16] J. Smith, *On asymptotic dimension of countable abelian groups*, Topology Appl. **153** (2006), 2047–2054.

[17] R. Willett, *Some notes on property A*, Limits of graphs in group theory and computer science, 191–281, EPFL Press, Lausanne, 2009.

[18] T. Yamauchi, *Asymptotic property C of the countable direct sum of the integers*, preprint.

[19] G. Yu, *The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension*, Ann. of Math. **147** (1998), 325–355.

[20] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), 201–204.