数理解析研究所講究録
第 1932 巻 2015 年 50-59

辞書式順序積と普通のチコノフ積

THE LEXICOGRAPHIC ORDERED PRODUCTS AND THE USUAL TYCHONOFF PRODUCTS

大分大学・教育福祉科学部
家本宣幸

FACULTY OF EDUCATION AND WELFARE SCIENCE
OITA UNIVERSITEY

1. 序章

この報告書は [3] の要約である。空間は少なくとも 2 点を含む正則 T_1-空間とする。ω、ω_1 はそれぞれ最小無限順序数、最小非可算順序数とする。

集合 X 上の線形順序 (以下、順序と言う) $<$ が与えられている時、組 $\langle X, <\rangle$ を順序集合と言う。$\lambda(<)$ で $\{(a, \rightarrow) : a \in X\} \cup \{(\leftarrow, b) : b \in X\}$ を subbase とする位相を表す。ただし、$(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\}$, $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$ である。*LOTS* X (順序位相空間の略) と言えば、組 $\langle X, <, \lambda(<)\rangle$ のことを言うことにする。このように順序集合 $\langle X, <\rangle$ が与えられていれば、それは自然に位相空間と考えることができる。この意味で ω、ω_1 などの順序数も LOTS と考えることができ、実数 $\mathbb{R}$ や 閉区間 $\mathbb{I} = [0, 1]$ 等も自然な意味で LOTS である。特に $\mathbb{R}$ は リンデレーフで $\mathbb{I}$ はコンパクトである。LOTS X がコンパクトであることの必要十分条件は X の任意の部分集合 A が上限 $\sup A$ (下限 $\inf A$) を持つことと同値であることが知られている ([1, Problem 3.12.3(a)])。

一般に位相空間の列 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ が与えられると、その直積 $X = \Pi_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ に、自然な積位相 ([1] 参照) を入れることができる。この積位相をチコノフ積位相と言い、その空間を単にチコノフ積空間と言うことにする。一方、γ を順序数とする時、LOTS の列 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ が与えられれば、次のようにその直積 $X = \Pi_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ に辞書式順序と呼ばれる順序が定義できる。

定義 1.1. γ を順序数、$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ を LOTS の列とし、各 X_α の順序を $<_\alpha$ とする。次のように与えられた $X = \Pi_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ 上の順序 $<$ を辞書式順序と言う。

$$x < y \Leftrightarrow x \restriction \alpha = y \restriction \alpha \text{ かつ } x(\alpha) <_\alpha y(\alpha)$$
$$\text{が成立するような } \alpha < \gamma \text{ が存在する、}$$

ただし $x, y \in X$ で $x \restriction \alpha$ は $x = \langle x(\beta) : \beta < \gamma \rangle$ の α への制限 $\langle x(\beta) : \beta < \alpha \rangle$ を意味する。γ は順序数であるので辞書式順序がうまく定義されている事に注意されたい。辞書式順序による位相が導入された LOTS $\Pi_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ を $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ の辞書式順序積と言う。特に $X_\alpha = Y$ がすべての $\alpha < \gamma$ について成り立つ時、$\Pi_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ を Y^γ と表すことにする。

ここでは、チコノフ積と辞書式順序積の違いに着目していきたい。任意個数のコンパクト (ω-bounded) 空間のチコノフ積はコンパクト (ω-bounded) 空間となることが良く知られている。ここで空間が ω-bounded とは任意の可算部分集合がコンパクトな閉包を持つことである。また、空間が 可算コンパクトとは任意の可算部分集合が集積点を持つことである。コンパクトなら ω-bounded、ω-bounded なら可算コンパクトとなる。一方、二つの可算コンパクト空間のチコノフ積でも可算コンパクトになるとは限らない。辞書式順序空間 $\mathbb{I}^2$ はコンパクトであることはよく知られている、[1, Problem 3.12.3(d)]。

まず、次を注意しよう。

補題 1.2. X を離散でない（$= X$ は少なくとも一つ集積点を持つ）*LOTS* とすると X^2 上の辞書式順序位相 $\lambda = \lambda(<)$ は、X^2 上のチコノフ位相 τ とは一致しない。

更に次に注意しよう

- X が最小限を持つが最大限を持たないような離散な LOTS なら、その辞書式順序積 X^2 は離散にはならない。従ってこの場合、X^2 のチコノフ位相と辞書式順序位相は一致しない。
- X が最小限も最大限も持たないような離散な LOTS なら、その辞書式順序積 X^2 は離散になる。従ってこの場合、X^2 のチコノフ位相と辞書式順序位相は一致する。

最小限と最大限の存在、非存在が、X^2 のチコノフ位相と辞書式順序位相の違いに大きく影響することがこの考察からわかる。

次にも注意しておこう。

注意 1.3. 辞書式順序積 $2 \times \mathbb{R}$ と $\mathbb{R} \times 2$ は同相ではない、ここで $2 = \{0, 1\}$ である。なぜなら $2 \times \mathbb{R}$ は位相和 $\mathbb{R} \bigoplus \mathbb{R}$ に同相であるが、$\mathbb{R} \times 2$ ソルゲンフライ直線と同相な部分空間 $\mathbb{R} \times \{0\}$ を持つからである。

また、ここまで見たように殆どの位相的性質 (離散性までも) は辞書式順序積に保存されない。$\mathbb{R}$ はリンデレーフであるが辞書式順序積 $\mathbb{R}^2$ は非可算閉離散部分空間 $\mathbb{R} \times \{0\}$ を含むのでリンデレーフにはならないことなどもそのような一例である。

チコノフ積 $X \times Y$ を考えよう。X は閉部分空間 $X \times \{y\}$ ($y \in Y$) と同相である。しかし、一般にこれは辞書式順序積では正しくない。それを見るため、辞書式順序積 ω_1^2 を考えよう。この時、部分空間 $\omega_1 \times \{1\}$ は離散であるので ω_1 と同相にはならない。ところが $\omega_1 \times \{0\}$ は ω_1 と同相な閉部分空間である。$\omega_1 \times \{1\}$ は閉ではないことにも注意したい。

2. 可算コンパクト性

この節では辞書式順序積の可算コンパクト性について考察する。次は、ずっと昔に知られていて良いと思われる結果であるが、そのような文献を見つけ出すことができなかったので、念のためコメントをしておく。

補題 2.1. $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ をコンパクト *LOTS* X_α 達の列とすると、辞書式順序積 $X = \Pi_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ もまたコンパクトである。

上の補題でコンパクトを可算コンパクトに変えられないことは次の例からわかる。

例 2.2. 可算コンパクト LOTS Z でその辞書式順序平方 Z^2 が可算コンパクトにならない例がある。

これを見るため $\{x_\alpha : 0 < \alpha < \omega_1\}$ を異なる点からなる ω_1 と交わらない集合とする。求めたい LOTS は 次の順序 $<_Z$ を入れた $Z = \omega_1 \cup \{x_\alpha : 0 < \alpha < \omega_1\}$ である。ω_1 上の順序 $<_Z$ は ω_1 の元の順序と一致、$\{x_\alpha : 0 < \alpha < \omega_1\}$ 上の順序 $<_Z$ は $x_\alpha <_Z x_\beta \Leftrightarrow \beta < \alpha.$ によって与える。最後に $\alpha, \beta \in \omega_1 \setminus \{0\}$ について $x_\alpha <_Z 0 <_Z \beta$ と決める。すると明らかに LOTS Z は可算コンパクトであるが、辞書式順序積 Z^2 は離散閉部分空間 $Z \times \{0\}$ を含むので, Z^2 は可算コンパクトにはならない。

ところが、LOTS の可算コンパクト性と ω-bounded 性は一致する ([2, Theorem 3]) ので明らかに次がわかる。

命題 2.3. 任意個数の可算コンパクト *LOTS* 達のチコノフ積は可算コンパクトである。

次が示される。

定理 2.4. 各 $n<\omega$ について $\alpha(n)$ と γ_n は順序数で $\alpha(n)<\gamma_n$ を満たしているとすると、$\Pi_{n<\omega}[0,\alpha(n)]$ の辞書式順序位相は $\Pi_{n<\omega}\gamma_n$ の辞書式順序位相の部分空間位相になる。

これから次がわかる。

(1) 順序数 α と β は $\beta<\alpha$ を満たしているとすると、$[0,\beta]^\omega$ の辞書式順序位相は α^ω の辞書式順序位相の部分空間位相になる。

(2) 各 $n<\omega$ について、順序数 γ_n は $\mathrm{cf}\gamma_n \neq \omega$ を満たしているとすると辞書式順序積 $X=\Pi_{n<\omega}\gamma_n$ は可算コンパクトである。従って、辞書式順序積 ω_1^ω や ω_1^2 も可算コンパクトである。

(3) $Y=2^\omega$ の辞書式順序位相は $X=3^\omega$ の辞書式順序位相の部分空間位相になる。ここで $3=\{0,1,2\}$ である。

(3) に関し次の例は興味深い。

例 2.5. $Y=2^{\omega+1}$ の辞書式順序位相は $X=3^{\omega+1}$ の辞書式順序位相の部分空間位相にならない。

なぜなら、$x\in Y$ と $z\in X$ を次のように定義しよう。

$$x(n)=\begin{cases}0 & \text{if } n<\omega,\\ 1 & \text{if } n=\omega,\end{cases}$$

$$z(n)=\begin{cases}0 & \text{if } n<\omega,\\ 2 & \text{if } n=\omega.\end{cases}$$

すると z は X における x の直後であるから $(\leftarrow,z)_X\cap Y=(\leftarrow,x]_Y$ は X の辞書式順序位相の Y への部分空間位相についての開集合である。ここで $(\leftarrow,x]_Y$ は Y における区間を表す。一方、x は Y における直後を持たないので $(\leftarrow,x]_Y$ は Y の辞書式順序位相について開でない。これから Y の辞書式順序位相は X の辞書式順序位相の部分空間位相にならないことがわかる。また、$(x,\rightarrow)_Y$ は X の辞書式順序位相

の Y への部分空間位相についての閉集合であるが、x は Y における直後を持たないので、辞書式順序位相の Y への部分空間位相はコンパクトにならないことがわかる。一方、 Y の辞書式順序位相は明らかにコンパクトである。

(2) に関し、次の例も興味深い。

例 2.6. 辞書式順序積 $X = \omega_1^{\omega+1}$ は可算コンパクトではない。

これを示すため、まず次に注意しておこう。

補題 2.7. $\{x_n : n \in \omega\}$ が異なる点からなる *LOTS* L の減少列なら、辞書式順序積 $L \times \omega_1$ において $\{\langle x_n, 0\rangle : n \in \omega\}$ は離散閉集合となる。

そこで、$X = \omega_1^{\omega+1}$、$L = \omega_1^{\omega}$ とおくと $X = L \times \omega_1$ であるから、$x_n \in L$ を

$$x_n(m) = \begin{cases} m & \text{if } m \neq n, \\ m+1 & \text{if } m = n. \end{cases}$$

によって定義すれば上の補題が適用でき、X が可算コンパクトではないことがわかる。

3. 辞書式順序位相とチコノフ位相の比較

まず $X = (\omega+1) \times \omega$ の辞書式順序位相 λ とチコノフ位相 τ は比較できないことが、$\langle 1,0\rangle \in \mathrm{Cl}_\lambda\{0\} \times \omega$, $\langle 1,0\rangle \notin \mathrm{Cl}_\tau\{0\} \times \omega$, $\langle \omega,1\rangle \notin \mathrm{Cl}_\lambda \omega \times \{1\}$ and $\langle \omega,1\rangle \in \mathrm{Cl}_\tau \omega \times \{1\}$ からすぐわかることに注意しておこう。一方、$\omega \times (\omega+1)$ の辞書式順序位相とチコノフ位相は一致することにも注意しておく。ここでは、順序数の積の辞書式順序位相とチコノフ位相の比較可能性について述べたい。最初に長さ ω の辞書式順序積について考察する。まず、次に注意する。

補題 3.1. 各 $n < \omega$ について X_n は離散 *LOTS* とすると、$X = \Pi_{n<\omega} X_n$ の辞書式順序位相 λ はそのチコノフ位相 τ より弱い、すなわち $\lambda \subset \tau$。

これを利用すると次がわかる。

系 3.2. *LOTS* X が離散であることの必要十分条件は X^2 の辞書式順序位相がチコノフ位相より弱いことである。

順序数達の無限の長さの積の辞書式順序位相とチコノフ位相の強弱の特徴付けが次の形で得られる。

定理 3.3. γ を無限順序数、各 $\alpha < \gamma$ について β_α は 2 以上の順序数とする時、$X = \Pi_{\alpha<\gamma}\beta_\alpha$ の辞書式順序位相 λ がそのチコノフ位相 τ より弱いことの必要十分条件は $\gamma = \omega$ で、各 $\alpha < \gamma$ について $\beta_\alpha \leq \omega$ が成り立つことである。

ここでは証明の一部「 X の辞書式順序位相がそのチコノフ位相より弱いことを仮定して $\gamma = \omega$ を示す」を紹介しよう。そのため、X の辞書式順序位相がそのチコノフ位相より弱いが $\omega < \gamma$ が成立していると仮定して矛盾を導く。$Y =$

$$\{x \in X : \forall\alpha \leq \omega(x(\alpha) \in 2), \forall\alpha < \gamma(\omega < \alpha \to x(\alpha) = 0)\}.$$

とおこう。x を X の最小限とする、すなわち $x(\alpha) = 0$ $(\alpha < \gamma)$。$x \in Y$ であることに注意しよう。次に各 $m < \omega$ について、$x_m \in Y$ を次のように定義する。各 $\alpha < \gamma$ について、

$$x_m(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq \alpha, \\ 1 & \text{if } m = \alpha. \end{cases}$$

すると明らかに $x \in \mathrm{Cl}_\tau\{x_m : m < \omega\}$ が成立する。一方 $b \in Y$ を次のように定義する。各 $\alpha < \gamma$ について、

$$b(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \neq \omega, \\ 1 & \text{if } \alpha = \omega. \end{cases}$$

すると、各 $m<\omega$ について $x<b<x_m$ が成立する。従って $x \notin \mathrm{Cl}_\lambda\{x_m : m<\omega\}$ が成り立つ。これより $\lambda \not\subset \tau$ がわかり矛盾が生じる。

順序数達の無限の長さの積の辞書式順序位相とチコノフ位相が等しいことの特徴付けも得られる。

定理 3.4. γ を無限順序数、各 $\alpha<\gamma$ について β_α は 2 以上の順序数とする時、$X=\Pi_{\alpha<\gamma}\beta_\alpha$ の辞書式順序位相 λ がそのチコノフ位相 τ と一致することの必要十分条件は $\gamma=\omega$、$\beta_0 \leq \omega$ で、$1 \leq \alpha$ となる各 $\alpha<\gamma$ について $\beta_\alpha<\omega$ が成り立つことである。

これらを適用すれば次がわかる。

系 3.5. $\omega \times 2^\omega = \omega \times 2 \times 2 \times \cdots$ の辞書式順序位相とチコノフ位相は一致する。また ω^ω の辞書式順序位相はチコノフ位相より真に弱い。

系 3.6. 各 $n<\omega$ について β_n は $2 \leq \beta_n < \omega$ を満たす順序数とする時、辞書式順序積 $X=\Pi_{n<\omega}\beta_n$ は *Cantor set* $\mathbb{C}$、すなわち $\mathbb{C}$ は チコノフ積 2^ω、と同相である。特に 2^ω と 3^ω は同相で距離付け可能である。

これを示すには Cantor set の特徴付け「孤立点を持たないコンパクト、ゼロ次元、第二可算空間は Cantor set と同相である ([4])」を用いる。ここで、空間がゼロ次元であるとは各点が開かつ閉集合からなる基本近傍系を持つことである。この系と次の二つの例を比べると面白い。

例 3.7. 辞書式順序積 $2^{\omega+1}$ と $3^{\omega+1}$ は同相でない。

これを示してみよう。まず、辞書式順序積 $2^{\omega+1}$ の孤立点は最小元と最大元のみであることに注意しよう。ところが、 $A=\{x \in 3^{\omega+1} : x(\omega)=1\}$ のすべての点は辞書式順序積 $3^{\omega+1}$ の孤立点である。なぜな

ら、各 $x \in A$ に対して、 $x^-, x^+ \in 3^{\omega+1}$ を次のように定義する。

$$x^-(n) = \begin{cases} x(n) & \text{if } n < \omega, \\ 0 & \text{if } n = \omega, \end{cases}$$

$$x^+(n) = \begin{cases} x(n) & \text{if } n < \omega, \\ 2 & \text{if } n = \omega, \end{cases}$$

ここで $n \leq \omega$ である。すると 各 $x \in A$ について $\{x\} = (x^-, x^+)_{3^{\omega+1}}$ と表され、x は孤立点であることがわかる。従って、$2^{\omega+1}$ と $3^{\omega+1}$ は同相でない。

例 3.8. 辞書式順序積 $X = 2^{\omega+1}$ は距離化可能でない。

これを示すため X が距離化可能であると仮定してみよう。すると X はコンパクトであるから、第二可算である。可算基 $\{B_n : n < \omega\}$ を一つ固定しよう。$A = \{x \in X : x(\omega) = 0\}$ とおけば、A の濃度は 2^ω であり、各 $x \in A$ は次のように定義される直後 x^+ in X を持つ。

$$x^+(n) = \begin{cases} x(n) & \text{if } n < \omega, \\ 1 & \text{if } n = \omega, \end{cases}$$

ここで $n \leq \omega$ である。これから各 $x \in A$ について $(\leftarrow, x]_X$ は X の開集合であることがわかる。従って、各 $x \in A$ について、 $x \in B_{n(x)} \subset (\leftarrow, x]_X$ を満たす $n(x) < \omega$ を取ることができる。$\mathrm{cf}2^\omega > \omega$ であるから、$n(x) = n$ が各 $x \in A'$ に対して成立するような $|A'| = 2^\omega$ を満たす A の部分集合 A' と $n < \omega$ が存在する。$x < y$ を満たす $x, y \in A'$ を取ると、 $x \in B_n \subset (\leftarrow, x]_X \not\ni y$ が成立し矛盾が導かれた。従って X は距離化可能でない。

順序数達の有限の長さの積は、無限の長さの積と様子が異なる。

定理 3.9. $2 \leq n_0 < \omega$ とし、各 $n \leq n_0$ について順序数 β_n は $2 \leq \beta_n$ を満たしているとする。この時、 $X = \Pi_{n \leq n_0} \beta_n$ の辞書式順序位相がチコ

ノフ位相より弱いことの必要十分条件は、各 $n < n_0$ について $\beta_n \leq \omega$ が成立することである。

定理 3.10. $2 \leq n_0 < \omega$ とし、各 $n \leq n_0$ について順序数 β_n は $2 \leq \beta_n$ を満たしているとする。この時、 $X = \Pi_{n \leq n_0} \beta_n$ の辞書式順序位相がチコノフ位相と一致することの必要十分条件は、$\beta_0 \leq \omega$ で $1 \leq n$ を満たす各 $n < n_0$ について $\beta_n < \omega$ が成立し、更に β_{n_0} は孤立順序数（= 極限順序数ではない）であることである。

これらの定理から、例えば次のようなことがわかる。ここで、λ と τ はそれぞれ X の辞書式順序位相とチコノフ位相を表す。

- X が $\omega_1 \times 2$ か $\omega \times \omega_1 \times \omega$ のどちらかなら、$\lambda \not\subset \tau$ が成り立つ。
- X が $\omega \times \omega \times \omega_1$ か $\omega \times \omega \times (\omega_1 + 1)$ のどちらかなら、 $\lambda \subsetneq \tau$ が成り立つ。
- X が $\omega \times (\omega + 1), \omega \times (\omega_1 + 1)$ か $\omega \times 2 \times 3 \times 4 \times (\omega_1 + 1)$ のどれかなら、$\lambda = \tau$ が成り立つ。

References

[1] R. Engelking, *General Topology.* Herdermann Verlag, Berlin (1989).

[2] S. L. Gulden, W. M. Fleischman and J. H. Weston, *Linearly ordered topological spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970),197-203.

[3] N. Kemoto, *The lexicographic ordered products and the usual Tychonoff products*, Top. Appl. **164** (2014), 45–86.

[4] Jan van Mill, *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North-Holland Mathematical Library, 64. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (2001).