数理解析研究所講究録
第 1932 巻 2015 年 82-93

積空間の D-空間性と今後の展望

神奈川大学 工学部　矢島 幸信 (Yukinobu Yajima)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

概 要

今世紀に入ってから，集合論的位相幾何学で最も研究されてきた課題のひとつが D-空間である。ここではなぜ D-空間の研究が重要かを述べるとともに，最新の研究成果である平田康史氏との共著論文 [14] に至るまでを述べる。最後に著者のこれまでの研究に対する考え方や方法についても，今後の展望のために述べておきたい。

1 D-空間の研究はなぜ重要か

すべての空間は正則 T_1-空間 ($= T_3$-空間) として，ω は非負整数全体の集合を表す。

空間 X に対して，$\tau(X)$ は X の topology を表す。対応 $\varphi : X \to \tau(X)$ が開近傍対応とは，各 $x \in X$ について $x \in \varphi(x)$ となるとき。

定義 A (Douwen-Peffer [10]). 空間 X が D-空間とは，X の任意の開近傍対応 φ に対して，X のある closed discrete subset D が存在して，$\bigcup\{\varphi(x) : x \in D\} = X$ を満たすとき。

S を Sorgenfrey line とすると，彼らはこの概念を導入して，「任意の $n \in \omega$ に対して，S^n が D-空間である」ことを示した。ちなみに，S^ω が D-空間かどうかは，まだ知られていない（[6] 参照)。

D-空間は covering property の一種であり，その定義は極めて簡単である。それゆえ，一見既に研究尽くされているように思えるが，後述するように最も基本的な問題がまだ未解決である。

D-空間に関係したまとめや問題集が最近相次いで発表されてきた（例えば，[11, 13, 23] 等参照)。特に，これまでの D-空間研究の経緯全体を見渡すには，2011 年に発表された Gruenhage のまとめ [13] が秀逸である。それをもとに我々の最近の研究論文 [14] に至るまでを述べてみたい。述べられている結果に引用が無いのは，この論文における結果である。

1975年のD-空間の概念の導入以来，1990年代までには多くの結果は得られていない。距離空間（さらにはσ-空間）がD-空間であることは，容易に分かる。それをさらに一般化して，次の結果が1991年に得られた。

定理 1.1 (Borges-Wehrly [3]). 任意のsemi-stratifiable空間はD-空間となる。

さらに，1997年に次の重要な結果が証明された。

定理 1.2 (Douwen-Lutzer [9]). 任意のGO-空間がXがD-空間となるための必要十分条件は，Xがパラコンパクトとなることである。

2000年代になって，D-空間研究は急に活気を帯びるようになる。その先陣を切ったのは，2002年に同時に発表された次の2つの結果と思われる。

定理 1.3 (Buzyakova [5]). もし空間Xがstrong Σ-空間ならば，XはD-空間となる。

定理 1.4 (Arhangel'skii-Buzyakova [2]). もし空間Xがある点可算ベースをもつならば，XはD-空間となる。

特に，定理1.4は素数が無限個あることを用いて証明されており，証明方法としてはとても面白い。その他2000年代にD-空間になるための十分条件が，いろいろな一般距離空間の形で与えられた（その一覧として[13, Theorem 4.1]参照)。

空間Xが**Menger**であるとは，Xの任意の開被覆列$\{\mathcal{U}_n\}$に対して，各$n \in \omega$について$\mathcal{U}_n$のある有限部分族$\mathcal{V}_n$が存在して，$\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$が$X$を被覆するとき。明らかに，リンデレーフ空間はMengerである。

空間Xが**totally** パラコンパクトであるとは，任意のXのベースがある局所有限の部分被覆をもつとき。1973年にCurtis [8]は「任意のMenger空間はtotally パラコンパクトとなる」ことを示した。また，次の事実は定義から容易に示せる。

命題 1.5 (folklore). 任意のtotally パラコンパクト空間はD-空間となる。

以上のことから，D-空間と他の空間との位置関係は次のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
\text{距離空間} \arrow[r] \arrow[d] & \sigma\text{-空間} \arrow[r] & \text{semi-stratifiable} \arrow[d] & & \text{点可算ベース} \arrow[dll] & \\
\text{パラコンパクト } p\text{-空間} \arrow[r] & \text{strong } \Sigma\text{-空間} \arrow[r] & D\text{-空間} & & & \text{距離空間} \arrow[ul] \\
\text{コンパクト} \arrow[r] \arrow[u] & \text{Menger} \arrow[r] \arrow[d] & \text{totally パラコンパクト} \arrow[u] \arrow[d] & & & \\
& \text{リンデレーフ} \arrow[r] & \text{パラコンパクト} \arrow[r] & \cdots & &
\end{tikzcd}
$$

上の関係図から，次の問題が自然に生じてくるのが分かるであろう。

基本問題 (Douwen, 1975 頃). 任意のリンデレーフ空間は D-空間となるか?

この問題が先に述べた最も基本的な問題であり，多くの論文が D-空間に関する Douwen の未解決問題として取り上げている。しかし，この問題について，最近では次のような部分解までが得られている。

例 1.6 (Soucup-Szeptycki [22]). 公理 $\diamondsuit$ のもとで，あるリンデレーフ空間 X で，D-空間でないものが存在する。しかし，この X はハウスドルフ $(= T_2)$ ではあるが，正則 $(= T_3)$ ではない。

以上に述べたように，Douwen の問題がいまだ未解決のみならず，D-空間と他の covering property（例えば，パラコンパクト性，サブパラコンパクト性，サブメタコンパクト性など）との関係も知られていない。

2 Telgársky 流位相ゲーム

空間 X に対して，2^X は X の閉集合全体を表すとする。以下断ることなしに，$\mathbb{K}$ はある種の空間からなるクラスで，$X \in \mathbb{K}$ ならば $2^X \subset \mathbb{K}$ とする。

先ずは 1975 年に導入された Telgársky 流位相ゲームを思い出そう。

定義 B (Telgársky [27]). 空間 X と空間のクラス $\mathbb{K}$ に対して，ゲーム $G(\mathbb{K}, X)$ を次のように定義する。プレーヤー I と II が各 $n \in \omega$ について X の閉集合 E_n と F_n を交互に選んでいく。プレーヤー I は $E_n \in \mathbb{K}$ で $E_n \subset F_{n-1}$ となるように選ぶ。ただし，$E_0 = \emptyset, F_{-1} = F_0 = X$ とする。プレーヤー II は F_n を $F_n \subset F_{n-1} \setminus E_n$ となるように選ぶ。このとき，もし $\bigcap_{n\in\omega} F_n = \emptyset$ ならばプレーヤー I の勝ち，そうでなければプレーヤー II の勝ちと定義する。

空間 X が **$\mathbb{K}$-like** とは，ゲーム $G(\mathbb{K}, X)$ においてプレーヤー I が必勝戦略をもつとき。しかし，$\mathbb{K}$-like 空間を考えるときには，次の定理の必要十分条件を $\mathbb{K}$-like 空間の定義として利用した方が考えやすい。

定理 2.1 (Galvin-Telgársky [12]). 空間 X が $\mathbb{K}$-like であるための必要十分条件は，ある対応 $s : 2^X \to 2^X \cap \mathbb{K}$ が存在して，次の 2 つの条件を満たすとき：

(1) $\forall F \in 2^X$ に対して，$s(F) \subset F$.

(2) もし $\{F_n\}$ が X の閉集合からなる単調減少列で

$$s(F_{n-1}) \cap F_n = \emptyset \quad (\forall n \in \omega)$$

ならば，$\bigcap_{n\in\omega} F_n = \emptyset$ となる。ただし，$F_{-1} = X$ とする。

ここで扱う空間のクラス $\mathbb{K}$ として，次のものをおもに考えていく。位相ゲームの研究を見渡すには，まとめ [32] がよく用いられる。

- $\mathbb{C}$ はコンパクト空間全体からなるクラスとする。
- $\mathbb{D}$ は D-空間全体からなるクラスとする。
- $\mathbf{Dim(n)} = \{X : X$ は完全正則空間で, $\dim X \leqq n\}$ とする。
- $\mathcal{D}\mathbb{K} = \{X : X$ は $\mathbb{K}$ のメンバーからなる discrete cover をもつ $\}$ とする。

このとき, $\mathcal{D}\mathbb{C} \subset \mathcal{D}\mathbb{D} = \mathbb{D}$ および $\mathcal{D}\mathbf{Dim(n)} = \mathbf{Dim(n)}$ は明らかである。

命題 2.2 ([17]). もし空間 X が $\mathbb{D}$-like ならば, X は D-空間となる。

上の証明は [13, Theorem 3.3] にも述べられているが, それは容易である。同様の結果が, 次のように $\mathbf{Dim(n)}$ についても成り立つことが分かっている。

命題 2.3 ([28]). もし正規空間 X が $\mathbf{Dim(n)}$-like ならば, $\dim X \leqq n$ となる。

この証明も比較的容易であるが, この結果は位相ゲームの次元論への応用を可能にしたという意味では, 大きな役割を演じたと言える。

3 有限積空間の D-空間性

D-空間が covering property であることから, 積空間を長い間の研究対象にしてきた我々にとって, 積空間において D-空間性が保存されるかどうかを考えることは自然である。ところが, 次の反例が ZFC において示されていた。

例 3.1 (Alas-Junqueira-Wilson [1]). あるリンデレーフ D-空間 X と可分距離空間 M で, $X \times M$ が D-空間でないものが存在する。

これによって, 距離空間をファクターにもつ積空間の D-空間性を考えることは無意味となった (最初この結果は 1998 年に Borges-Wehrly [4] により証明されたが, 証明にギャップがあった)。それならばと, コンパクト空間をファクターにもつ積空間の D-空間性はどうかと考えたいが…。

事実 3.2 ([3]). もし K がコンパクト空間かつ Y が D-空間ならば, $K \times Y$ は D-空間となる。

残念ながら, この事実はほとんど明らかである。それでは「コンパクト空間をその一般化である $\mathcal{D}\mathbb{C}$-like 空間で置き換えたらどうか」と考えるのも自然であろう。ここですぐに思い出すのは, 積空間のパラコンパクト性の保存に関する次の Telgársky の結果である。著者の知る限りこの種の結果では, 今のところ最も一般的である。

定理 3.3 ([27], [29]). もし X がパラコンパクト $\mathcal{D}\mathbb{C}$-like 空間かつ Y がパラコンパクト空間ならば，$X \times Y$ はパラコンパクトかつ長方形的となる。

ここで，積空間の長方形性について説明する。

積空間 $X \times Y$ における $A \times B$ の形の部分集合を長方形という。特に，A と B がそれぞれ X と Y のコゼロ集合（閉集合）のとき，$A \times B$ を $X \times Y$ のコゼロ長方形（閉長方形）という。

積空間 $X \times Y$ が長方形的であるとは，任意の $X \times Y$ の有限コゼロ被覆がコゼロ長方形からなるある σ-局所有限細分をもつとき。この概念は 1975 年に Pasynkov により導入されたものであり，彼は次の結果を証明した。

定理 3.4 (Pasynkov [16]). 完全正則空間 X, Y に対して，もしその積空間 $X \times Y$ が長方形的ならば，$\dim(X \times Y) \leqq \dim X + \dim Y$ が成り立つ。

上記の次元の不等式に関する以前のほとんどの結果は，この定理 3.4 に含まれてしまう。その意味でこの定理は極めて重要である。

空間がサブパラコンパクトであるとは，任意の X の開被覆がある σ-局所有限閉細分をもつとき。もちろん，任意のパラコンパクト空間はサブパラコンパクトである。

積空間 $X \times Y$ が $\mathcal{D}$-積空間であるとは，任意の $X \times Y$ の交わらない閉集合 E と F に対して，閉長方形からなるある σ-discrete な族 $\mathcal{F}$ で，$E \subset \bigcup \mathcal{F} \subset (X \times Y) \setminus F$ となるものが存在するとき。

2つのクラス $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ に対して，$\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 = \{X \times Y : X \in \mathbb{K}_1, Y \in \mathbb{K}_2\}$ とおく。

定理 3.5 ([30]). 積空間 $X \times Y$ が $\mathcal{D}$-積空間とする。もし X が $\mathbb{K}_1$-like かつ Y が $\mathbb{K}_2$-like ならば，$X \times Y$ は $\mathcal{D}(\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2)$-like となる。

定理 3.5 を用いて，次のことが証明された。

定理 3.6 ([31]). もし X がサブパラコンパクト $\mathcal{D}\mathbb{C}$-like 空間かつ Y がサブパラコンパクト空間ならば，$X \times Y$ はサブパラコンパクト $\mathcal{D}$-積空間となる。さらに $X \times Y$ が正規ならば，$\dim(X \times Y) \leqq \dim X + \dim Y$ が成り立つ。

ここで注目すべきは，定理 3.6 における積空間は必ずしも長方形的とならないことである（[15] 参照）。従って，定理 3.6 は定理 3.4 から従うことは無い。

しかし，定理 3.5 と 3.6 の結果は，残念ながらあまり知られてはいない。実際，数年前に定理 3.5 から直接従う簡単な結果が主定理として証明された論文が，（ここでは敢えて引用しないが）よく知られた外国雑誌に掲載されたくらいである。

命題 2.3 から始まり，定理 3.3, 3.5 および 3.6 は，位相ゲームの次元論への応用である。そこで命題 2.2 と 2.3 の類似性に着目すれば，位相ゲームは D-空間研究の有効な手段となりうると感じることは自然である。こうして，定理 3.5 と 3.6 の結果を 30 年以上の時を経て，D-空間研究のために登場させることになる。

実際，命題 2.2，定理 3.5 と 3.6 の組み合わせから，次の結果が簡単に分かる。

系 3.7. もし X がサブパラコンパクト $\mathcal{D}\mathbb{C}$-like 空間かつ Y がサブパラコンパクト D-空間ならば，$X \times Y$ は D-空間となる。

系 3.7 は形としてはすっきりしているが，残念なことに定理と言えるほどのものではない。しかし，次の段階へ至るための重要なことを暗示している。

4 無限積空間の D-空間性

D-空間に関する積空間についてのおもな肯定的結果は，これまでに次の Peng の結果が唯一のものと言える。それに関連する H. Tanaka の結果とともに述べると，

定理 4.1 (H. Tanaka [24, 25], Peng [18]). 任意のパラコンパクト（サブパラコンパクト）$\mathcal{D}\mathbb{C}$-like 空間 X_n による可算積 $\prod_{n\in\omega} X_n$ は，パラコンパクト D-空間（サブパラコンパクト）となる。

前のセクションのサブパラコンパクトの議論から考えて，上の定理の括弧内に D-空間を加えられるだろうと考えることは極めて自然である。むしろ成り立たない方が意外である。実際，次の結果を証明できた。

定理 4.2. 任意のサブパラコンパクト $\mathcal{D}\mathbb{C}$-like 空間 X_n による可算積 $\prod_{n\in\omega} X_n$ は D-空間となる。

2通りの証明について: $X = \prod_{n\in\omega} X_n$ とする。φ を任意の X の開近傍対応とする。このとき，X のある closed discrete subset D で，$\bigcup\{\varphi(x) : x \in D\} = X$ となるものを構成すればよい。この証明は２通りある。どちらも一長一短である。

ひとつは定理 4.1 における Tanaka-Peng の証明法に，定理 3.5 の証明で用いたアイディアを組み合わせて，帰納法によりこの D を構成していく方法である。この方法の良い点は，定理 3.5 と 4.1 の証明を理解すれば，その複雑な構成のアイディアが分かりやすいことである。逆にその難点は，定理 4.1 の長い証明（Peng の証明の方が分かりやすい）を読む必要があり面倒と言える。

もうひとつの方法は，elementary submodel を適用することにより得られる。この方法では D の構成は簡単で直観的である。端的に言えば，構成できるならば，これしかあるまいというほど自然である。ところがその一方で，$\bigcup\{\varphi(x) : x \in D\} = X$ の証明はかなり複雑であり，elementary submodel に慣れていない人にはとても理解しにくい。

それでも，論文 [14] では後者の証明が採用されている。その理由は，covering property に関するまとめ [23] の中で，その著者たちは「今後この方面の研究には elementary submodel の応用が益々重要になる」と予想している。そこで，後者の証明をその例証として提示した次第である（これで予想した責任は果たせたかも…）。□

ここで終わってしまうと，定理 4.2 は定理 4.1 の一般化として得られただけになってしまう。さらに次の段階として，非可算の場合の積空間を考える必要がある。

$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を無限可算 discrete 空間とする。

非可算無限積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を考えるときに，N^{ω_1} の考察は大変有効である。そして，N^{ω_1} の covering property については古くから研究されており，次のように全くと言ってよいほど良い性質をもたない。

定理 4.3. N^{ω_1} は正規ではなく（Stone [21]），オーソコンパクトでもなく（Scott [20]），さらに weakly $\delta\theta$-refinable ですらない（Chaber-Gruenhage-R.Pol [7]）。

そして D-空間についても，同様に次が証明できる。

定理 4.4. N の非可算積 N^{ω_1} は D-空間でない。

それゆえに，定理 4.2 と 4.4 を用いて，可算積空間の場合から非可算積空間への拡張として次も得られる。

系 4.5. 任意のサブパラコンパクト $\mathcal{D}\mathbb{C}$-like 空間 X_λ による非可算積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が D-空間であるための必要十分条件は，可算個を除くすべての X_λ がコンパクトとなることである。

5 D-空間の関連する問題

空間 X がサブメタコンパクトであるとは，任意の X の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，$\mathcal{U}$ のある開細分の列 $\{\mathcal{V}_n\}_{n\in\omega}$ が存在して，任意の $x \in X$ についてある $n_x \in \omega$ がとれて $\mathcal{V}_{n_x}$ が x で点有限となるとき。任意のサブパラコンパクト空間がサブメタコンパクトとなることは，よく知られている。

積空間の D-空間性の議論は，全体的にサブパラコンパクトに関しての結果が得られてきた。そこで，そのサブパラコンパクトがどこまでサブメタコンパクトに一般化できるかが，次の段階の問題となる。例えば系 3.6 に関しては，次の問題が自然に提起される。

問題 5.1. 空間 X を $\mathcal{D}\mathbb{C}$-like とし，空間 Y を D-空間とする。

(1) もし X がサブパラコンパクトかつ Y がサブメタコンパクトならば，$X \times Y$ は D-空間となるか？

(2) もし X がサブメタコンパクトかつ Y がサブパラコンパクトならば，$X \times Y$ は D-空間となるか？

(3) 空間 X が $\mathcal{D}\mathbb{C}$-like かつ空間 Y が D-空間で，$X \times Y$ が D-空間でないものは存在するか？

H. Tanaka [26] は，その後に定理 4.1 の類似がサブメタコンパクトにも成り立つことを証明した。そこで，定理 4.2 のサブパラコンパクトもサブメタコンパクトに拡張できるかどうかは，当然興味あるところである。

問題 5.2. 任意のサブメタコンパクト $\mathcal{D}\mathbb{C}$-like 空間 X_n による可算積 $\prod_{n\in\omega} X_n$ は D-空間となるか？

空間 X が **dually discrete** [1] であるとは，X の任意の開近傍対応 φ に対して，X のある discrete subset D が存在して，$\bigcup\{\varphi(x) : x \in D\} = X$ を満たすとき。

明らかに，任意の D-空間は dually discrete である。Peng [19] は「すべての GO-空間は dually discrete である」ことを示した。それゆえ，任意の順序数空間 μ に対して，その任意の部分空間 X は dually discrete となる。もしその部分空間 X が μ において stationary ならば（それはパラコンパクトでないから定理 1.2 より），X は D-空間とならない。この辺りに D-空間と dually discrete 空間の大きな相違が見られる。そして，定理 4.4 から次の問題が自然に提起される。

問題 5.3. N の非可算積 N^{ω_1} は dually discrete となるか？

この問題は具体的であり，肯定的と否定的のどちらであっても面白いと思われる。

6 ひとつの研究方法：KKSS 法

D-空間の研究に関しては，近年多くの論文が発表されてきたのみならず，多くの一流数学者たちがこの研究に手を染めている。ざっと彼らの名前を挙げると：

Arhangel'ski, Buzuyakova, Burke, van Douwen, Fleissner, Gruenhage, Junnila, Lutzer, van Mill, Peng, Soucup, Szeptycki, Tall, Tkachuk 等の錚々たるメンバーである。

集合論的位相幾何学の中でも最も競争の厳しい分野のひとつであることは，間違いないであろう。しかも盛んに研究されだしてから，既に 12 年以上の歳月が流れている。今更この研究に参入しても，結果が出るとは思えないのが普通である。実際，世界的にはこれだけ D-空間に関する研究が進んでいるにも関わらず，日本では D-空間の論文は今まで発表されなかったように思う。にもかかわらず，なぜ D-空間の研究に手を染めたのか，その理由について述べてみたいと思う。

振り返ってみれば，集合論的位相幾何学における位相空間論の研究を 40 年間もやってきたことになる。そのためか最近は研究結果そのものよりも，どうすれば新しい研究結果が得られるかという研究方法に興味を持ってきた。そして端的に言えば，そのためにはまず

(1)　新しい観点

という要素が必要であるとの考えに至った。研究である以上は，ある意味で当たり前のことかもしれないが，それをはっきり意識することは案外忘れられているように思える。そして，年齢を重ねてきた今日この頃では，満足できるレベルまでは発展させたいという思いが以前よりも強くなってきた。そうすると，諸事情を考えれば，自分ひとりの力では限界があることが感じられる。それ故に，

(2)　別の観点をもつ研究協力者

のような存在が必要となってくる。逆に言えば，この2つの要素 (1) と (2) さえあれば,「*D*-空間研究のような競争の激しい分野でも満足できる研究結果が出せる」という事実が，著者にとっては必要だった次第である。実際，その意味でこの考えにかなりの自信をもつことができた。上で述べたように著者の *D*-空間研究における新しい観点とは「位相ゲーム」であり，言うまでもなく別分野の協力者とは論文 [14] の共著者の平田康史氏である。彼とは3年くらい前から共同研究を始めたが，共著論文だけでも多分100ページ近くになるであろう。著者にとっても今までに無いくらいの豊饒な研究成果といえるので，彼には大いに感謝している。

では，(1) の新しい観点とはどのようにして思いつくのだろうか？　著者はKKSS法と名付けたひとつの研究方法を用いている。即ち，「**K**：基礎知識，**K**：書くこと，**S**：シンプル化，**S**：相談する」という一連の手順である。「K：基礎知識」は *D*-空間のまとめなどを読むことにより，全体的な今までの研究状況をつかむことである。その際に細部にとらわれず，あまり時間をかけずに一気にやることが大切である。次に「S：シンプル化」は，全体を簡略化して大まかに捉えることである。それによって，自分がどの方向で研究していけば良いかを何となく感じることが出来る。そして，その方向の論文だけは十分に読みこなす必要があり，それは「K：書くこと」により自分自身に論文の著者たちのアイデアをしみ込ませる。ここまでやると大抵は何らかの「新しい観点」が自然と生まれてくるものである。最後の「S：相談する」は，言うまでもなく研究協力者への相談を意味する。新しい観点の上に協力者の新しい力や別の観点がさらに加わるのだから，当然満足できる結果が生まれてくるはずである。

数学研究の成果を上げるには，数学以外の他の分野に比べて長い時間がかかる。また，かけた時間の割りには何の成果も無しという場合は往々にしてある。しかし、数学の研究には「流れ」のようなものも往々にしてある。その流れを掴めないときは、精神的にも辛い時間になる。そんな時は、考えるよりも体力に任せてどんどん書いていく。書くこと「2番目のK」だけに集中するのも、ひとつの打開の方法ではないだろうか。そして,「このKKSS法は研究のためのアルゴリズム（必勝法）に近い一定の手順である」と信じさえすれば，その手順に従っている限り成果は保証されているような感覚（それとも錯覚？）さえ覚える。通常は成果なしの時間が長くなれば精神的な不安感は増していくが，KKSS法はそんな精神状態を安定させるために役立ってくれる。

7 数学の研究方法の現実問題への応用

集合論的位相幾何学の研究結果が現実的に役に立つことは，普通に考えてあり得ないことである。実際，自分の研究結果が現実の役に立つなどとは，長い間考えたことさえもなかった。しかし，ひとは長い人生において（学問とは無関係な）重要な問題を強いられる。一般にひとは幸せを求めつつも，なかなか幸せにはなれない。その理由のひとつは，人生の重要問題を克服できないからだとは言えないだろうか。

そんな問題に対して，著者は数学研究から生まれたKKSS法がひとつの解決を与えてくれることを経験した。それによって，現実的に役に立つのは「数学的な結果」でなく「数学的な考え方」であることに気付いた。現実問題は数学の問題と異なり，完全に都合良く解決することは極めて稀である。それでも、完全に解決できないにしても，それなりの部分解で乗り越えるしかない場合が往々にしてある。それ故に，現実的な問題に対処する際には，数学研究と異なりもうひとつの要素が必要であることが分かってくる。それは「S：スマイル」である。即ち、問題が引き起こす最終的な結果を，スマイルで受入れる姿勢が大切であり必要である。

こうして，KKSS法に新たなSを加えた「KKSSS+S法」は，人生の重要問題を対処するためのひとつの「数学的な考える技術」として捉えることが出来るだろう。このような観点から考えるとき，下は中学生から上は社会人に至るまで「数学」はもっと広い視野で捉えるべきものであり，もっと興味深い教育上の科目として考えるべきではないだろうか。

実は，本タイトルにある「今後の展望」とは，D-空間研究に関してのそれだけではない。むしろD-空間の研究によって得られたKKSS+S法への確信と，それについての今後の展望を意味している。つまり，KKSS+S法という新たな方法によって，数学の啓蒙活動のための「新しい流れ」を作っていきたいというのが，タイトルでいうところの「今後の展望」である。ここでは，

(1*)　新しい観点=**KKSS+S**法

として，新しい流れが始まるためのひとつの要素を見つけたと思える。しかし残念ながら，これだけではさほど面白い話でもなく、若い人たちに受入れられるとは思えない。それ故に流れと呼ぶにはあまりに不十分である。若者たちを引きつけて十分な成果を上げていくためには，上の(2)で述べたように

(2*)　別の能力をもつ協力者

がもうひとつの不可欠な要素とならざるを得ない。そして逆に言うと，そんな協力者が見つかった時こそが，著者が40年間歩んできた数学研究の道から大きく舵を切る時と考えている。

参考文献

[1] O. T. Alas, L. R. Junqueira and G. Wilson, *Dually discrete spaces*, Topology and Appl. **155** (2008), 1420–1425.

[2] A. V. Arhangel'skiǐ and R. Buzyakova, *Addition theorems and D-spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **43** (2002), 653–663.

[3] C. R. Borges and A. C. Wehrly, *A study of D-spaces*, Topology Proc. **16** (1991), 7–15.

[4] C. R. Borges and A. C. Wehrly, *Correction: Anothere study of D-spaces*, Q and A in General Topology. **16** (1998), 77–78.

[5] R. Buzyakova, *On D-property of strong Σ-spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **43** (2002), 493–495.

[6] P. D. Caux, *Yet another property of the Sorgenfrey plane*, Topology Proc. **6** (1981), 31–43.

[7] J. Chaber, G. Gruenhage and R. Pol, *On Souslin sets and embeddings in integer-valued function spaces on ω_1*, Topology and Appl. **82** (1998), 71–104.

[8] D. W. Curtis, *Total and absolute pracomapctness*, Fund. Math. **77** (1973), 277–283.

[9] E. K. van Douwen and D. J. Lutzer, *A note on paracompactness in generalized ordered spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1237–1245.

[10] E. K. van Douwen and W. F. Pfeffer, *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Pacific J. Math. **81** (1979), 371–377.

[11] T. Eisworth, *On D-spaces*, Open Problems in Topology II (E. Pearl, ed.), Elsevier, Amsterdam 129–134 (2007).

[12] F. Galvin and R. Telgársky, *Stationary strategies in topological games*, Topology and Appl. **22** (1986), 51-69.

[13] G. Gruenhage, *A survey of D-spaces*, Contemporary Mathematics, **533** (2011), 13–28.

[14] Y. Hirata and Y. Yajima, *On the D-property of certain products*, Topology and Appl. (M. E. Rudin 追悼特別号に掲載予定).

[15] H. Ohta, *On normal, non-rectangular products*, Quart. J. Math. **32** (1981), 339–344.

[16] B. A. Pasynkov, *On the dimension of rectangular products*, Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 344–347.

[17] L.-Xue Peng, *On some sufficiencies of D-spaces*, J. Beijing Inst. Tech. **16** (1996), 229–233.

[18] L.-Xue Peng, *On products of certain D-spaces*, Houston J. Math. **34** (2008), 165–179.

[19] L.-Xue Peng, *On linear neighborhood assignments and dually discrete spaces*, Topology and Appl. **155** (2008), 1867-1874.

[20] B. M. Scott, *More about orthocompactness*, Topology Proc. **5** (1980), 155–184.

[21] A. H. Stone, *paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977–982.

[22] D. T. Soukup and P. J. Szeptycki, *A counterexample in the theory of D-spaces*, Topology and Appl. **159** (2012), 2669–2678.

[23] P. Szeptycki and Y. Yajima, *Covering properties*, Recent Progress in General Topology III (K. P. Hart, J. van Mill and P. Simon, ed), Atlantis Press. 801–824 (2014).

[24] H. Tanaka, *A class of spaces whose countable product with a perfect paracompact space is paracompact*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 503–512.

[25] H. Tanaka, *Covering properties in Cartesian products*, Tsukuba J. Math. **17** (1993), 565–587.

[26] H. Tanaka, *Submetacompactness and weak submetacompactness in coutable products*, Topology and Appl. **67** (1995), 29–41.

[27] R. Telgársky, *Spaces defined by topological games*, Fund. Math. **88** (1975), 193–223.

[28] R. Telgársky and Y. Yajima, *On order locally finite and closure-preserving covers*, Fund. Math. **109** (1980), 211–216.

[29] Y. Yajima, *Topological games and products I*, Fund. Math. **113** (1981), 141–153.

[30] Y. Yajima, *Topological games and products II*, Fund. Math. **117** (1983), 47–60.

[31] Y. Yajima, *Topological games and products III*, Fund. Math. **117** (1983), 223–238.

[32] Y. Yajima, *Topological games and products*, Topics in General Topology (K. Morita and J. Nagata, eds) North-Holland, 523–562 (1989).