

## 部分観測マルコフ決定過程による償還条項付有価証券の評価

秋田県立大学システム科学技術学部

佐藤 公俊

青山学院大学社会情報学研究科

澤木 勝茂

### 1 はじめに

条件付請求権の評価理論において対象たる原金融資産の価格過程をどのような確率過程として記述すべきかは重要なテーマであった。過去 10 年以上に亘って価格形成過程の中にレジーム・スイッチを組み込み、オプション等の金融商品の評価モデルが提案されてきた。(例えば, Naik 1993, Guo 2001, Elliott et al. 2005, Guo and Zhang 2004, Le and Wang 2010, Ching et al. 2007 など)。価格の確率分布が経済の状態変化に応じて別の確率分布にシフトする枠組みの下でレジーム・スイッチを組み込んだ条件付請求権としての派生証券の評価を行なうことを先行研究 Sato and Sawaki (2014) において提案した。しかし、このアプローチには 1 つの大きな問題点がある。それは、価格形成のレジーム・スイッチが直接観測できないことである。多くの先行研究はこの問題点を克服するために各レジームの占有時間を確率変数とする部分観測セミ・マルコフ過程として定式化し、その同時分布を用いて期待値をとることでオプション価格を評価している。

本研究では、これらの先行研究とは異なるアプローチを採用する。すなわち、資産価格を規定する実体経済のレジームを直接観測することは出来ないが、実体経済から発せられるシグナル(例えば、鉱工業生産指数や日銀短観等)を観察することによって資産価格の推定を行なう。すなわち、部分観測可能なマルコフ決定過程の枠組みの下で償還型条件付請求権の資産評価モデルを考察する。まず初めに利得関数を可能な限り一般型の関数を仮定して償還型証券の評価モデルを考察する。その後、この利得関数をコールタイプとプットタイプの利得関数に分け、各タイプの問題における売り手と買い手の最適行使戦略を明らかにする。

### 2 部分観測可能なレジーム・スイッチを観察可能な確率過程への変換

時刻  $t$  における無リスク証券の価格を  $B_t = B_0 e^{rt}$  とする。ここで、 $B_0$  を所与とする。離散時間の下では割引因子を  $\beta = e^{-r} \approx 1/(1+r)$  とする。リスク資産価格のダイナミックスを

$$S_{t+1} = S_t X_t^{Z_t} \tag{2.1}$$

とする。 $Z_t$  は経済の状態を記述する確率変数であり、推移確率  $P_{i,j} = \Pr\{Z_{t+1} = j \mid Z_t = i\}$  をもつ有限状態マルコフ連鎖とする。 $X_t^{Z_t}$  は  $Z_t$  の各実現値に対して独立同一で且つ、 $X_t^i$  と  $Z_t$  は条件付独立と仮定する。各  $S_t$  はスポット市場にて観察可能であるが  $Z_t$  は直接に観察することは不可能で、 $Z_t$  と確率的関係のあるシグナル  $\theta$ ,  $\theta = 1, \dots, \Theta$ , を観察することで、 $Z_t$  の確率分

布を推測することは可能であると仮定する。さらに、状態  $Z_t$  は観測できないが、その推移確率  $P_{i,j} = \Pr\{Z_{t+1} = j \mid Z_t = i\}$  は既知とする。このとき、次の条件付確率が与えられていると仮定する。すなわち、

$$\begin{aligned}\gamma_{i,\theta} &\equiv \Pr\{Y_t = \theta \mid Z_t = i, (Z_k, Y_k), k \leq t-1\} \\ &= \Pr\{Y_t = \theta \mid Z_t = i\}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

$Y_t$  はそれ以前の  $Z_t, Y_t$  から独立とする。期首  $t=0$  においては、 $\Pr\{Z_0 = i\} = \pi_0(i), i = 1, \dots, N$ , は既知（所与）である。観測可能な全てのデータは  $\mathcal{H}_t = \{\pi_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_t\}$  である。したがって、時刻  $t$  から時刻  $t+1$  に推移したとき、状態  $i$  となる確率は

$$\begin{aligned}\pi_{t+1}(i) &\equiv \Pr\{Z_{t+1} = i \mid \mathcal{H}_{t+1}\} \\ &= \Pr\{Z_{t+1} = i \mid \pi_t, \theta_{t+1}\}\end{aligned}\quad (2.3)$$

により与えられる。ここで、 $\pi_t = (\pi_t(1), \pi_t(2), \dots, \pi_t(N))$  は時刻  $t$  において意思決定をおこなうのに必要な全ての情報を反映した確率ベクトルである。即ち、 $\pi_t$  は  $\mathcal{H}_t$  に対する十分統計量である。また、確率ベクトル  $\pi_t$  の集合である確率シンプレックスを

$$\Pi \equiv \left\{ \pi \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^N \pi(i) = 1, \pi(i) \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}.\quad (2.4)$$

とすれば、集合  $\Pi$  は有界閉集合である。

ベイズの公式より、時刻  $t$  から時刻  $t+1$  に推移したとき状態  $j$  となる推移確率は

$$\pi_{t+1}(j) = \frac{\sum_{i=1}^N \Gamma_{i,j}(\theta) \pi_t(i)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{i,j}(\theta) \pi_t(i)} \equiv T_j(\pi_t \mid \theta)\quad (2.5)$$

となる。ここで、 $\Gamma_{i,j}(\theta) \equiv P_{i,j} \gamma_{j,\theta}$  とする。これより、資産価格の形成に依存する  $Z_t$  は観察不可能であったが、 $Z_t$  からのシグナルを観察することにより、 $S_t$  と  $\pi_t$  が観察可能な状態変数となった。各時点（期首）において  $S_t$  とレジームの確率を計算（ベイズの公式）することによって多期間償還付条件付請求権の評価が可能となる。図1は  $t$  期におけるイベントの流れを示している。

### 3 レジーム・スイッチのある償還型条件付請求権の評価

発行人は契約の解消権を有し、投資家は条件付請求権に付与された権利を行使することができる。発行人の停止時刻を  $\sigma$ 、投資家の停止時刻を  $\tau$  とする。時刻  $t$  の状態が  $i$ 、資産価格が  $s$  であるとき、発行人が権利を行使したときのペイオフ関数を  $f_t(s, i)$ 、投資家のペイオフ関数を  $g_t(s, i)$  とする。ここで、 $i$  は経済状態を表す値であり、 $i$  が大きいほど良い状態を表すものとする。つまり、 $i=1$  が最悪の状態、 $i=N$  が最良の状態である。状態の集合は有限であるから、関数  $f(\cdot, \cdot)$  は有界である。両プレーヤーが満期  $T$  まで権利を行使しない場合はペイオフ関数を  $h_T(s, i) = g_T(s, i)$  とする。このとき、ペイオフ関数の大小関係を以下のように仮定する。

$$0 \leq g_t(s, i) \leq h_t(s, i) \leq f_t(s, i) \leq M_i < M, \quad 0 \leq t \leq T.\quad (3.1)$$

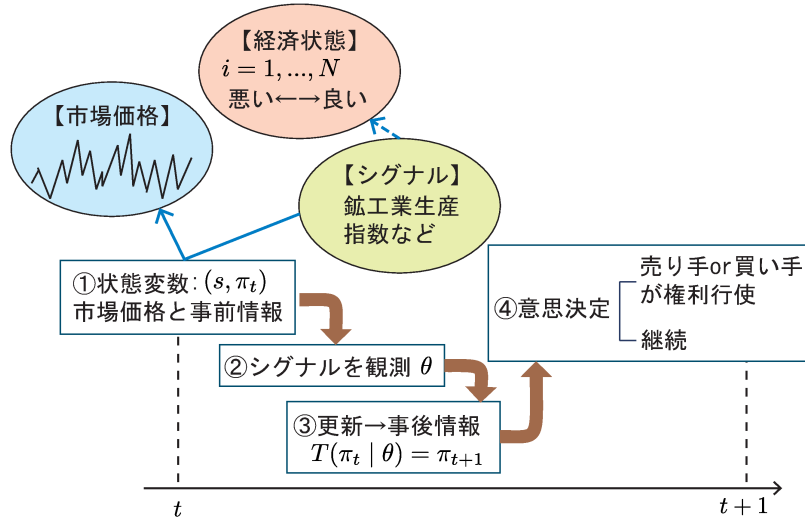


図 1:  $t$  期から  $t+1$  期への意思決定の流れ

ここで,  $t = T$  では, 等号が成立すると仮定する. また,  $M_i$  および  $M$  を定数とし, 関数  $f_t(s, i)$  は有界である. 各プレーヤーがそれぞれ時刻  $\sigma$  と  $\tau$  で権利を行使したときの利得関数を

$$R(\sigma, \tau) = f_\sigma 1_{\{\sigma < \tau \leq T\}} + g_\tau 1_{\{\tau < \sigma \leq T\}} + h_T 1_{\{\sigma \wedge \tau = T\}} \quad (3.2)$$

とする. 時刻 0 において資産価格が  $s$ , 状態ベクトルが  $\pi$  のとき, 償還型条件付請求権の価値は

$$v_0(s, \pi) = \min_{\sigma \in \mathcal{J}_{0,T}} \max_{\tau \in \mathcal{J}_{0,T}} \tilde{E}_{s,\pi}[\beta^{\sigma \wedge \tau} R(\sigma, \tau) | S_0 = s, \pi_0 = \pi] \quad (3.3)$$

で与えられる.  $\mathcal{J}_{0,T}$  は  $\{0, 1, \dots, T\}$  における停止時刻の有限集合,  $\tilde{E}_{s,\pi}$  はリスク中立測度  $\tilde{P}$  の下での期待値を表す. 市場が非完備であるためエッシャー変換を用いて得られるリスク中立測度を  $\tilde{P}$  とする (Ching et al. 2007). 本研究では, (3.3) 式で与えられる最適停止問題を部分観測可能なマルコフ決定問題として定式化する. 逆向きに時間をとり,  $n = T$  を取引開始時刻,  $n = 0$  を満期とする. このとき, 売り手と買い手のペイオフ関数をそれぞれ  $f_n(s, \pi) = \sum_i f_n(s, i) \pi(i) < M$ ,  $g_n(s, \pi) = \sum_i g_n(s, i) \pi(i)$  とする.

満期までの残存時間  $n$  のときの資産価格が  $s$ , 状態ベクトルが  $\pi$  であるとき, 償還型条件付請求権の価値を  $v_n(s, \pi)$  とする. 時刻  $n+1$  の期首において,  $S_{n+1} = s$  と  $\theta_{n+1}$  を観測し,  $\pi_{n+1} = \pi$  を所与として, 償還型条件付請求権の価値  $v_{n+1}$  は動的計画法の「最適性の原理」より,

$$\begin{aligned} v_{n+1}(s, \pi) &= (\mathcal{U}v_n)(s, \pi) \\ &= \min\{f_{n+1}(s, \pi), \max[g_{n+1}(s, \pi), \beta \tilde{E}[v_n(S_{n+1} X_{n+1}^{Z_{n+1}}, \pi_n) | S_{n+1} = s, \pi_{n+1} = \pi]]\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

で与えられる. ここで, (3.4) 式の期待値の部分は

$$\tilde{E}[v_n(S_{n+1} X_{n+1}^{Z_{n+1}}, \pi_n) | S_{n+1} = s, \pi_{n+1} = \pi] = \sum_{i=1}^N \pi(i) \int_0^\infty \sum_{\theta=1}^\Theta v_n(sx, T(\pi | \theta)) \gamma_{i,\theta} dF_i(x) \quad (3.5)$$

となる。  $F_i(x)$  は  $X^i$  の確率分布関数である。また、作用素  $\mathcal{A}$  を以下のように定義する：

$$(\mathcal{A}v)(s, \pi) = \beta \sum_{i=1}^N \pi(i) \int_0^\infty \sum_{\theta=1}^{\Theta} v(sx, T(\pi | \theta)) \gamma_{i, \theta} dF_i(x). \quad (3.6)$$

次に、写像  $\mathcal{U}$  が縮退写像であることを利用して、ベルマン方程式 (3.4) の解の存在および収束条件を与える。  $V$  をノルム  $\|v\| = \sup_{s, \pi} |v(s, \pi)| < \infty$  もつ有界な可測関数の集合とする。

**補題 1** (i) 写像  $\mathcal{U}$  は縮退写像である。すなわち、  $v, u \in V$  に対して、  $\|\mathcal{U}u - \mathcal{U}v\| \leq \beta \|u - v\|$ ,  $0 < \beta < 1$ .

(ii) 任意の  $v_0(s, \pi) = g_0(s, \pi)$  に対して、  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}^n v_0 = v^*$  とすれば、  $\mathcal{U}v^* = v^*$  となる不動点が一意的に存在する。

**命題 1** (i) 任意の  $\epsilon > 0$  に対し、もし  $\|v - \mathcal{U}v\| \leq (1 - \beta)\epsilon$  ならば、  $\|v^* - v\| < \epsilon$  である。

(ii) 任意の  $\epsilon > 0$  に対し、もし  $\beta^n \|v_0 - \mathcal{U}v_0\| \leq (1 - \beta)\epsilon$  ならば、  $\|v^* - v\| < \epsilon$  である。

**注 1** 状態変数である市場価格  $s$  と情報ベクトル  $\pi$  は連続体であるので、(3.4) 式のベルマン方程式に対し、 $\epsilon$ -最適としてのアルゴリズム計算上の停止則が必要である。命題 1(i) はその数値計算における停止条件を与えている。また、命題 1(ii) の条件を書き換えると、  $0 < \beta < 1$  より、

$$n \geq \frac{1}{\log \beta} \log \frac{(1 - \beta)\epsilon}{\|v_0 - \mathcal{U}v_0\|} \equiv \hat{n} \quad (3.7)$$

となるため、任意の関数  $v_0$  に対して写像  $\mathcal{U}$  を  $\hat{n}$  回適用することで  $\epsilon$ -最適が得られることを保証している。

次に、価値関数および各プレイヤーの権利行使戦略に関する定性的な性質を示すために、確率的な順序関係を定義する。

**定義 1 (尤度比順序)** 任意の確率分布  $\pi^1, \pi^2 \in \Pi$  に対し、

$$\left| \begin{array}{cc} \pi^2(j) & \pi^1(j) \\ \pi^2(i) & \pi^1(i) \end{array} \right| \geq 0, \quad \text{for any } i \leq j, i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.8)$$

のとき、  $\pi^2 \geq_l \pi^1$  と表す。

経済状態  $i$  が大きいほどよい状態を表すため、尤度比順序  $\pi^1 \leq_l \pi^2$  は確率ベクトル  $\pi^1$  よりも確率ベクトル  $\pi^2$  の方が経済状態に関する情報はよい情報を多く含むことを意味する。

**定義 2**  $\pi^2 \geq_l \pi^1$  を満たす  $\pi^1, \pi^2$  に対し、  $g(\pi^2) \geq g(\pi^1)$  のとき、  $g(\pi)$  は  $\pi$ -増加関数と呼ぶ。

**補題 2 (Nakai 1995, Lemma 5)**  $\pi^1, \pi^2 \in \Pi$  に対し、  $\pi^2 \geq_l \pi^1$  ならば、任意の  $\theta \in \mathbb{R}$  について  $T(\pi^2 | \theta) \geq_l T(\pi^1 | \theta)$  となる。

**補題 3** (Porteus 2002, Theorem D.1 (a))  $\pi^2 \succeq_l \pi^1$  のとき,  $x$  に関する任意の増加関数  $g$  に対し,

$$\int_0^\infty g(x) dF_{\pi^2}(x) \geq \int_0^\infty g(x) dF_{\pi^1}(x). \quad (3.9)$$

ここで,  $F_\pi(x) \equiv \sum_{i=1}^N \pi(i) F_i(x)$  とし,  $F_\pi(x)$  もまた確率分布である.

**仮定 1** (i) 任意の  $i$  に対し,  $f_n(s, i), g_n(s, i), h_n(s, i)$  は  $s$  について単調関数である.

(ii) 任意の  $i$  に対し,  $f_n(s, i), g_n(s, i), h_n(s, i)$  は  $n$  について増加関数である.

(iii)  $\pi^2 \succeq_l \pi^1$  を満たす任意の  $\pi^1, \pi^2 \in \Pi$  に対し,  $\Delta\pi^1(i) \leq \Delta\pi^2(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . ただし,  $\Delta\pi^k(i) \equiv \pi^k(i) - \pi^k(i-1)$ ,  $k = 1, 2$ , とする. また,  $\pi^1(0) = \pi^2(0) \equiv 0$  とする.

仮定 1(i) により, 各プレーヤーのペイオフは資産価格について単調である. 本研究では,  $f_n(s, i), g_n(s, i), h_n(s, i)$  が  $s$  の増加関数である場合を「コールタイプ」問題,  $f_n(s, i), g_n(s, i), h_n(s, i)$  が  $s$  の減少関数である場合を「プットタイプ」問題と呼ぶ. 仮定 1(ii) は満期に近づくにつれて権利行使時のペイオフの値が低くなることを表す. 仮定 1(iii) は経済状態がよいという情報を多く含むほど, 経済状態がよくなる確率の増分が高いことを表す.

**命題 2** 仮定 1(iii) の下で,  $\tilde{E}[\log(S_{n-1}^1/S_n^1)] \leq \tilde{E}[\log(S_{n-1}^2/S_n^2)]$  となる.

命題 2 より, 景気が良くなる確率の増分が増加するならば, 資産の期待収益率も増加することがわかる.

**補題 4** (i) 仮定 1(i) の下で,  $f_n(s, \pi), g_n(s, \pi), h_n(s, \pi)$  は  $s$  の単調関数である.

(ii) 仮定 1(ii) の下で,  $f_n(s, \pi), g_n(s, \pi), h_n(s, \pi)$  は  $n$  の増加関数である.

(iii) 仮定 1(iii) の下で,  $f_n(s, \pi), g_n(s, \pi), h_n(s, \pi)$  は各  $s$  に対して  $\pi$ -増加関数である.

**補題 5** 仮定 1 の下で, 以下が成り立つ.

(i)  $v_n(s, \pi)$  は  $s$  について単調関数である.

(ii)  $v_n(s, \pi)$  が  $s$  について増加関数であるならば,  $v_n(s, \pi)$  は  $\pi$ -増加関数である.

(iii)  $v_n(s, \pi)$  は  $n$  について増加関数である.

## 4 最適行使戦略とその性質

本節では, プットタイプ問題とコールタイプ問題のそれぞれに対し, 売り手と買い手の最適行使戦略を明らかにし, その定性的な性質を示す. まず, 各プレーヤーの停止領域および継続領域を以下のように定義する.

- 買い手 (buyer) の停止領域:

$$\begin{aligned} D_n^B &= \{(s, \pi) \in \mathbb{R}^+ \times \Pi \mid \mathcal{A}v_{n-1}(s, \pi) \leq g_n(s, \pi)\} \\ &= \{(s, \pi) \in \mathbb{R}^+ \times \Pi \mid v_n(s, \pi) = g_n(s, \pi)\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

- 売り手 (seller) の停止領域:

$$\begin{aligned} D_n^S &= \{(s, \pi) \in \mathbb{R}^+ \times \Pi \mid \mathcal{A}v_{n-1}(s, \pi) \geq f_n(s, \pi)\} \\ &= \{(s, \pi) \in \mathbb{R}^+ \times \Pi \mid v_n(s, \pi) = f_n(s, \pi)\} \cup \{s_n^M\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

売り手のペイオフが上限  $M$  に達した場合は売り手は必ず権利行使しなければならないものとする。このときの市場価格を  $s_n^M \equiv \inf\{s \mid f_n(s, \pi) \geq M\}$  とする。

- 継続領域:

$$\begin{aligned} D_n^C &= \{(s, \pi) \in \mathbb{R}^+ \times \Pi \mid g_n(s, \pi) \leq \mathcal{A}v_{n-1}(s, \pi) \leq f_n(s, \pi)\} \\ &= \{(s, \pi) \in \mathbb{R}^+ \times \Pi \mid v_n(s, \pi) = \mathcal{A}v_{n-1}(s, \pi)\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

残存期間  $n$  のとき、任意の確率ベクトル  $\pi$  に対する市場価格  $s$  の領域を  $D_n^a(\pi)$ ,  $a = \{B, S, C\}$ , 任意の市場価格  $s$  に対する確率ベクトル  $\pi$  の領域を  $D_n^a(s)$ ,  $a = \{B, S, C\}$  とする。すなわち,  $D_n^a(s)$  は (4.1), (4.2), (4.3) の  $s$  に関する切断 (Truncated set) 面である。

各プレイヤーの停止領域に関する性質を示すために、以下を仮定する。

## 仮定 2

(i) ある  $s \in \mathbb{R}^+$ ,  $\pi \in \Pi$  に対し,  $f_n(s, \pi) \equiv g_n(s, \pi) + \alpha$  とする。ここで,  $\alpha \geq 0$  とする。

(ii) 任意の  $s, \pi, n$  に対し,  $f_n(s, \pi) \leq \max\{\alpha, \sum_i M_i \pi(i)\} < M$  とする。

(iii) [コールタイプ問題]  $f_n(s, \pi), g_n(s, \pi)$  が  $s$  について増加関数ならば,

$$\Delta_n^B(s, \pi) \equiv \beta \tilde{E}[g_{n-1}(sX_{n-1}^{Z_{n-1}}, T(\pi_n \mid \theta))] - g_n(s, \pi) \quad (4.4)$$

は  $s(\geq \hat{s}_n(\pi))$  について減少関数である。ただし,  $\hat{s}_n(\pi) \equiv \sup\{s \mid g_n(s, \pi) = 0\}$ 。

(iv) [プットタイプ問題]  $f_n(s, \pi), g_n(s, \pi)$  が  $s$  について減少関数ならば,

$$\Delta_n^S(s, \pi) \equiv \beta \tilde{E}[f_{n-1}(sX_{n-1}^{Z_{n-1}}, T(\pi_n \mid \theta))] - f_n(s, \pi) \quad (4.5)$$

は  $s(\leq \bar{s}_n(\pi))$  について増加関数である。ただし,  $\bar{s}_n(\pi) \equiv \inf\{s \mid g_n(s, \pi) = 0\}$ 。

ここで,  $\Delta_n^B(s, \pi), \Delta_n^S(s, \pi)$  は各プレイヤーの権利行使を延期することによる限界利得を表す。仮定 2(i) は  $\alpha = f_n(s, \pi) - g_n(s, \pi)$  を売り手から買い手に支払われる契約解消費費用と見做すことができるので, 契約解消費費用は資産価格  $s$  に依存しないことを仮定している。仮定 2(ii) はペイオフ関数の上限が契約解消費費用よりも高いことを意味する。仮定 2(iii) はコールタイプ問題における限

界利得に関する仮定である。現在の市場価格が高いほど、買い手が権利行使を延期することによる利得は減少する。すなわち、市場価格が高い場合は権利を行使すべきであり、これはコールタイプの特徴である。仮定 2(iv) はプットタイプ問題における限界利得に関する仮定である。コールタイプ問題とは逆に、市場価格が低い場合に権利行使すべきであることを意味している。

**注 2** コールタイプ問題において、市場価格が  $s \in [0, \hat{s}_n(\pi)]$  のとき、買い手の利得は負であるため、買い手は権利行使を行わない。このため、 $s \in [0, \hat{s}_n(\pi)]$  のとき、任意の  $n, \pi$  に対し、 $g_n(s, \pi) \equiv 0$  とする。また、 $s \in [0, \hat{s}_n(\pi)]$  のとき、売り手の利得関数は  $f_n(s, \pi) = g_n(s, \pi) = \alpha$  なる。同様に、プットタイプ問題については  $s \in [\bar{s}_n(\pi), \infty)$  のとき、 $g_n(s, \pi) \equiv 0, f_n(s, \pi) \equiv \alpha$  とする。

次の命題は、利得関数がアメリカン・コールとアメリカン・プットであるとき、仮定 2(iii) と (iv) のそれぞれが成立することを示している。

**命題 3**  $\mu_N \leq 1/\beta, i = 1, \dots, N$ , とする。

(i) アメリカンコールオプションの場合、買い手と売り手の利得関数をそれぞれ  $g_n(s, \pi) = \sum_{i=1}^N (s - K^i)^+ \pi_n(i)$ ,  $f_n(s, \pi) = \sum_{i=1}^N \{(s - K^i)^+ + \alpha\} \pi_n(i)$  とする。このとき、 $\Delta_n^B(s, \pi)$  および  $\Delta_n^S(s, \pi)$  は  $s \geq \hat{s}_n(\pi) = \bar{K}$  の減少関数である。ただし、 $\bar{K} \equiv \max_{1 \leq i \leq N} K_i$ 。

(ii) アメリカンプットオプションの場合、買い手と売り手の利得関数をそれぞれ  $g_n(s, \pi) = \sum_{i=1}^N (K^i - s)^+ \pi_n(i)$ ,  $f_n(s, \pi) = \sum_{i=1}^N \{(K^i - s)^+ + \alpha\} \pi_n(i)$  とする。このとき、 $\Delta_n^B(s, \pi)$  および  $\Delta_n^S(s, \pi)$  は  $s \leq \bar{s}_n(\pi) = \underline{K}$  の増加関数である。ただし、 $\underline{K} \equiv \min_{1 \leq i \leq N} K_i$ 。

#### 4.1 プットタイプ問題の権利行使領域に関する性質

本節では、プットタイプ問題における各プレイヤーの権利行使領域に関する性質を示す。

**仮定 3**  $\pi^2 \geq_l \pi^1$  に対して、

$$\beta \tilde{E}_{\pi^1} [g_{n-1}(sX_{n-1}^{Z_{n-1}}, T(\pi^2 | \theta)) - g_{n-1}(sX_{n-1}^{Z_{n-1}}, T(\pi^1 | \theta))] \leq g_n(s, \pi^2) - g_n(s, \pi^1). \quad (4.6)$$

仮定 3 は経済状況を表す情報の変化が利得に与える影響を 1 期間先と比較している。すなわち、経済状況が良くなるという情報は 1 期間先よりも現在の方が価値が高いことを意味する。プットタイプの請求権は市場価格が低いほど、ペイオフの価値が増加するため、経済状況が将来良くなるという情報は現在の方が価値が高い。

**定理 1** 仮定 1, 2, 3 の下で、以下が成り立つ。 $\pi^2 \geq_l \pi^1, s_1 \leq s_2$  のとき、

(i) 売り手の停止領域:

$$\begin{cases} D_n^S(\pi) = \{\bar{s}_n(\pi)\}, & n^*(\pi) \leq n \leq T \text{ のとき,} \\ D_n^S = \phi, & 0 \leq n < n^*(\pi) \text{ のとき.} \end{cases}$$

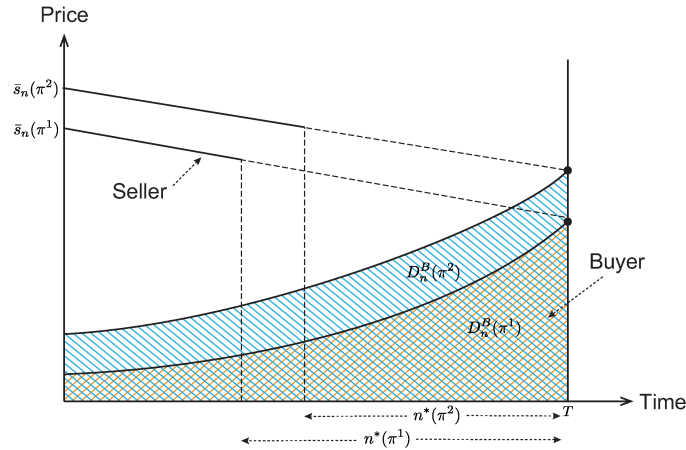


図 2: プットタイプ問題の権利行使領域. ( $\pi^2 \geq \pi^1$ ).

ここで,  $\bar{s}_n(\pi)$  は  $\pi$ -増加関数,  $n$  について増加関数. また,  $n^*(\pi) \equiv \inf\{n \mid \alpha \leq v_n^\alpha(\bar{s}_n(\pi), \pi)\}$  とし,  $n^*(\pi)$  は  $\pi$ -減少関数. ここで,  $v_n^\alpha(s, \pi) = \max\{g_n(s, \pi), \mathcal{A}v_{n-1}(s, \pi)\}$ .

(ii) 買い手の停止領域:  $D_n^B(\pi^1) \subseteq D_n^B(\pi^2)$ ,  $D_n^B(s_2) \subseteq D_n^B(s_1)$

$$\begin{cases} D_n^B(\pi) = [0, s_n^{**}(\pi)], & n > 0 \text{ のとき,} \\ D_0^B(\pi) = \{\bar{s}_0(\pi)\}, & n = 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

ここで,  $s_n^{**}(\pi)$  は  $\pi$ -増加関数,  $n$  について減少関数.

図 2 は定理 1 で得られたプットタイプ問題の最適行使領域を示している. 各時刻における売り手の権利行使領域は 1 点  $\bar{s}_n(\pi)$  で与えられる. 経済状態がよいという情報が多いほど将来の市場価格の上昇が予想されるため, 売り手の将来の支払額は小さくなる. このため, 売り手の閾値は上昇し, 権利行使が遅くなる. また,  $n^*(\cdot)$  が減少することから, 将来の価格上昇が予想される場合には権利行使期間は長くなる. 一方, 市場価格が上昇するほど買い手の権利行使時の利益は減少するため, 経済状態がよいという情報が多いほど, 行使領域が上昇し, 権利行使の時期が早くなる.

#### 4.2 コールタイプ問題の権利行使領域に関する性質

本節では, コールタイプ問題における各プレイヤーの権利行使領域に関する性質を示す.

仮定 4  $\pi^2 \geq \pi^1$  に対して,

$$\beta \tilde{E}_{\pi^1} [g_{n-1}(sX_{n-1}^{Z_{n-1}}, T(\pi^2 \mid \theta)) - g_{n-1}(sX_{n-1}^{Z_{n-1}}, T(\pi^1 \mid \theta))] \geq g_n(s, \pi^2) - g_n(s, \pi^1). \quad (4.7)$$



プットタイプ問題と逆に、仮定 4 は経済状況が良くなるという情報は現在よりも 1 期間先の方が価値があることを意味する。コールタイプの請求権は市場価格が高いほど、ペイオフの価値が増加するため、経済状況が将来良くなるという情報は将来の方が価値がある。

**定理 2** 仮定 1, 2, 4 の下で、以下が成り立つ。  $\pi^2 \geq_l \pi^1$  のとき、

(i) 売り手の停止領域:

$$\begin{cases} D_n^S(\pi) = \{\hat{s}_n(\pi)\}, & n^*(\pi) \leq n \leq T \text{ のとき,} \\ D_n^S(\pi) = \{s_n^M\}, & 0 \leq n < n^*(\pi) \text{ のとき.} \end{cases}$$

$\hat{s}_n(\pi)$  は  $\pi$ -減少関数。  $s_n^M \equiv \{s \mid \max_i f_n(s, i) = M\}$  および  $\hat{s}_n(\pi)$  は  $n$  について減少関数。  
 $n^*(\pi) \equiv \inf\{n \mid \alpha \leq v_n^a(\hat{s}_n(\pi), \pi)\}$  とし、  $n^*(\pi)$  は  $\pi$ -減少関数。ここで、  $v_n^a(\bar{s}_n(\pi), \pi) = \max\{g_n(s, \pi), \mathcal{A}v_{n-1}(s, \pi)\}$ 。

(ii) 買い手の停止領域:  $g_n(s, \pi)$  が  $s$  について凸関数ならば、

$$\begin{cases} D_n^B = \phi, & n > 0 \text{ のとき,} \\ D_0^B(\pi) = \{\hat{s}_0(\pi)\}, & n = 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

図 3 は定理 2 で得られたコールタイプ問題の最適行使領域を示している。プットタイプ問題の場合と同様に、各時刻における売り手の権利行使領域は 1 点  $\hat{s}_n(\pi)$  で与えられる。経済状態がよいという情報が多いほど市場価格が値上がりする可能性が高いため、売り手の支払額が高くなる可能性がある。そのため、売り手の閾値は減少し、早い時期に権利行使を行なう。また、残存期間が  $n^*(\cdot)$  となるまで、売り手は権利行使を行なう可能性がある。残存期間が  $n^*(\cdot)$  以下のときは支払額が上限に達する場合のみ、権利行使を行なう。この残存期間は情報  $\pi$  に応じて変化し、経済状態がよいという情報が多いほど  $n^*(\cdot)$  は小さくなる。すなわち、売り手の支払額が高くなる可能性があるほど、権利行使期間は長くなることがわかる。一方、買い手の権利行使領域は満期のみとなる。すなわち、コールタイプ問題はヨーロピアン型に退化する。

## 5 今後の課題

本研究では、部分観測可能なマルコフ決定過程により償還型条件付請求権の評価を行なった。利得関数をコール型とプット型に分け、ある仮定の下で、それぞれのタイプにおける売り手と買い手の最適な権利行使戦略を示した。特に、実体経済から発せられる資産価格に関する情報の質が最適戦略に与える影響を明らかにした。今後の課題として、利得関数をアメリカン・コールやアメリカン・プットに限定し、数値的により厳密な請求権の価値と最適戦略の分析を行ないたい。

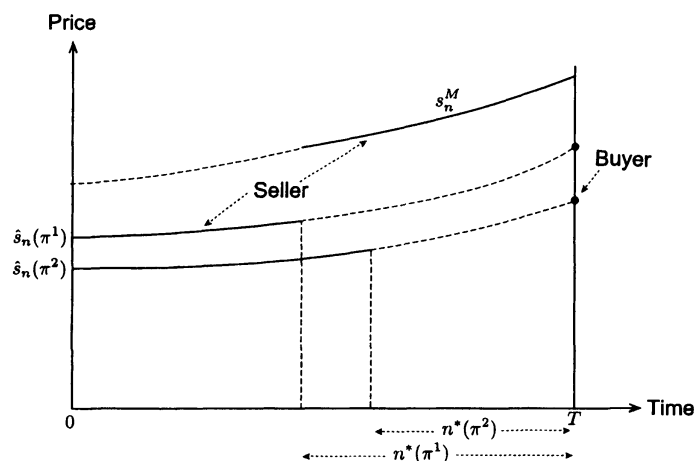


図 3: コールタイプ問題の権利行使領域. ( $\pi^2 \geq \pi^1$ ).

## 参考文献

- [1] W. Ching, K. Siu, and L. Li: Pricing exotic options under a high-order Markovian regime switching model. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, (2007), 15 p, Article ID 18014.
- [2] R.J. Elliott, L. Chan, and T.K. Siu: Option pricing and Esscher transform under regime switching. *Annals of Finance*, **1**, (2005), 423–432.
- [3] X. Guo: An explicit solution to an optimal stopping problem with regime switching. *Journal of Applied Probability*, **38**, (2001), 464–481.
- [4] X. Guo and Q. Zhang: Closed-form solutions for perpetual American put options with regime switching. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **64**, (2004), 2034–2049.
- [5] Y. Kifer: Game options. *Finance and Stochastic*, **4**, (2000), 443–463.
- [6] Y. Kifer: Dynkin's games and Israeli Options. *ISRN Probability and Statistics*, Volume 2013 (2013), Article ID 856458, 17 pages.
- [7] H. Le and C. Wang: A finite time horizon optimal stopping problem with regime switching. *SIAM Journal on Control Optimization*, **48**, (2010), 5193–5213.
- [8] V. Naik: Option valuation and hedging strategies with jumps in the volatility of asset returns. *Journal of Finance*, **48**, (1993), 1969–1984.
- [9] T. Nakai: A partially observable decision problem under a shifted likelihood ratio ordering. *Mathematical and Computer Modelling*, **22**, (1995), 237–246.

- [10] E.L. Porteus: Foundations of Stochastic Inventory Theory. *Stanford University Press*, 2002.
- [11] K. Sato and K. Sawaki: The dynamic pricing for callable securities with Markov-modulated prices. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **57**, (2014), 87-103.

Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University  
84-4 Ebinokuchi, Tsuchiya, Yurihonjo, Akita, 015-0055, Japan  
E-mail address: kimitoshi-sato@akita-pu.ac.jp

秋田県立大学システム科学技術学部 佐藤 公俊

Graduate School of Social Informatics, Aoyama Gakuin University  
5-10-1-B613 Fuchinobe, Chuo-ku, Sagamihara, Kanagawa, 252-5258, Japan  
E-mail address: sawaki@si.aoyama.ac.jp

青山学院大学社会情報学研究科 澤木 勝茂