数理解析研究所講究録
第 1934 巻 2015 年 90-103

$(GL(1)\times SO(q),V(q))$ 上の超関数の保型対 (佐藤文広氏との共同研究)

北里大学一般教育部　宮崎 直
Tadashi Miyazaki
Kitasato University College of Liberal Arts and Sciences

1　序文

本稿では，佐藤文広氏との共同研究で得られた $(GL(1)\times SO(q),V(q))$ 上の超関数の保型対に関する研究結果を紹介する．($q\geq 2$ とする.) 超関数の保型対は，鈴木利明氏 ([Su]) によって $(GL(n),\mathrm{Sym}(n))$ 上で定義され，後に佐藤文広氏と田村敬太氏 ([Ta]) によって可換放物型の概均質ベクトル空間上に拡張された概念である．その Fourier 係数から定義される Dirichlet 級数は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続されて関数等式を満たす事が知られており，鈴木利明氏は Siegel Eisenstein 級数と Fourier 係数が一致するような保型対を構成する事で，Siegel Eisenstein 級数に付随する Koecher-Maass 級数の解析接続と関数等式の証明を与えている．本稿では，比較的簡単な場合である $(GL(1)\times SO(q),V(q))$ 上の場合について，超関数の保型対と Dirichlet 級数，保型形式の関係を明確にする．さらに§5 では，Hopf 写像を用いて Epstein ゼータ関数から保型対の具体例を構成する．

2　超関数の保型対と Dirichlet 級数

2.1　周期的超関数の Fourier 展開の復習

本稿では，q は 2 以上の整数を表すものとする．また，$\mathbb{R}^q$ の元は縦ベクトルとして扱う，(つまり，$\mathbb{R}^q=M_{q,1}(\mathbb{R})$ とする.) $\mathbb{R}^q$ 上の通常の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と表記し，この内積から定まるノルムを $|\cdot|$ と表記する，つまり，

$$\langle x,y\rangle={}^t xy,\qquad |x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\qquad (x,y\in\mathbb{R}^q)$$

とする．$\mathbb{R}^q$ 上の可積分関数 f に対して，その Fourier 変換を

$$\mathcal{F}(f)(y)=\int_{\mathbb{R}^q}f(x)e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle}dx\qquad (y\in\mathbb{R}^q)$$

と定義する．$\mathbb{R}^q$ の開部分集合 U に対して，U 上の連続な複素数値関数全体のなす空間を $C(U)$，コンパクト台を持つ U 上の滑らかな複素数値関数全体のなす空間を $C_0^\infty(U)$，U 上の超関数 (distribution) 全体のなす空間を $\mathcal{D}'(U)$ と表記する．

L を $\mathbb{R}^q$ 内の格子とし，増大度が高々多項式程度である L 上の複素数値関数全体のなす空間を $\mathfrak{M}(L)$ と書く．$\alpha \in \mathfrak{M}(L)$ に対して，$T_\alpha \colon C_0^\infty(\mathbb{R}^q) \to \mathbb{C}$ を

$$T_\alpha(f) = \sum_{l \in L} \alpha(l)\mathcal{F}(f)(l) \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q))$$

と定義する．$y \in \mathbb{R}^q$ に対して，$\mathrm{s}_y \colon C(\mathbb{R}^q) \to C(\mathbb{R}^q)$ を $\mathrm{s}_y(f)(x) = f(x+y)$ で定める．L の双対格子 $L^\vee = \{l \in \mathbb{R}^q \mid \langle l, L\rangle \subset \mathbb{Z}\}$ をとり，周期的超関数の空間 $\mathcal{D}'(L^\vee\backslash\mathbb{R}^q)$ を

$$\mathcal{D}'(L^\vee\backslash\mathbb{R}^q) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q) \mid T(\mathrm{s}_l(f)) = T(f) \quad (l \in L^\vee,\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q))\}$$

と定義する．このとき，次の事実が知られている．

事実 2.1 ([Fr, 8.5])**.** $\mathfrak{M}(L) \ni \alpha \mapsto T_\alpha \in \mathcal{D}'(L^\vee\backslash\mathbb{R}^q)$ は全単射である．

この事実により，任意の $T \in \mathcal{D}'(L^\vee\backslash\mathbb{R}^q)$ に対して，唯 1 つの $\alpha_T \in \mathfrak{M}(L)$ が存在し，

$$T(f) = \sum_{l \in L} \alpha_T(l)\mathcal{F}(f)(l) \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q))$$

と表せる．この表示を T の Fourier 展開という．

2.2 超関数の保型対

$\nu \in \mathbb{C}$ に対して，'保型因子' J_ν を $J_\nu(x) = |x|^{-2\nu-q} \quad (x \in \mathbb{R}^q\setminus\{0\})$ と定義する．$f \in C(\mathbb{R}^q\setminus\{0\})$ に対して，$f_{\nu,\infty} \in C(\mathbb{R}^q\setminus\{0\})$ を

$$f_{\nu,\infty}(x) = J_\nu(x) f\left(-\frac{1}{|x|^2}x\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^q\setminus\{0\})$$

と定義する．また，$C_0^\infty(\mathbb{R}^q\setminus\{0\})$ の元 f は $f(0)=0$ とおく事で $C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ の元とも見なす事にする．ここで，

$$\mathcal{A}(J_\nu) = \{(T_1, T_2) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q) \mid T_1(f) = T_2(f_{\nu,\infty}) \quad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q\setminus\{0\}))\}$$

と定義し，2 つの $\mathbb{R}^q$ 内の格子 L_1, L_2 に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu) &= \{(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(J_\nu) \mid \alpha_1 \in \mathfrak{M}(L_1),\ \alpha_2 \in \mathfrak{M}(L_2)\} \\ &= \left(\mathcal{D}'(L_1^\vee\backslash\mathbb{R}^q) \times \mathcal{D}'(L_2^\vee\backslash\mathbb{R}^q)\right) \cap \mathcal{A}(J_\nu)\end{aligned}$$

と定義する．$\mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu)$ の元を (L_1, L_2) に関する保型因子 J_ν の超関数の保型対という．

注意 2.2. $(f_{\nu,\infty})_{\nu,\infty} = f \quad (f \in C(\mathbb{R}^q\setminus\{0\}))$ より，$(T_1, T_2) \in \mathcal{A}(J_\nu)$ ならば $(T_2, T_1) \in \mathcal{A}(J_\nu)$ である．特に，$(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu)$ ならば $(T_{\alpha_2}, T_{\alpha_1}) \in \mathcal{A}(L_2, L_1; J_\nu)$ である．

2.3 調和多項式付き Dirichlet 級数

$\mathbb{R}^q$ 上の Laplace 作用素 Δ を

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_q^2} \qquad (x = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_q) \in \mathbb{R}^q)$$

と定義し，$d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q) = \{\mathsf{h} \colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{C} \mid \mathsf{h}(x) \text{ は } d \text{ 次同次多項式},\ \Delta\mathsf{h} = 0\}$$

とおく．$\mathsf{h} \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$ と $\alpha \in \mathfrak{M}(L)$ に対して，Dirichlet 級数 $\xi(\mathsf{h}, \alpha; s)$ を

$$\xi(\mathsf{h}, \alpha; s) = \sum_{0 \neq l \in L} \frac{\mathsf{h}(l)\alpha(l)}{|l|^{s+d}} \qquad (\mathrm{Re}(s) \text{ が十分大きいときに絶対収束})$$

と定義し，$\Xi(\mathsf{h}, \alpha; s) = \pi^{-s+\frac{q}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{s+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-s+d+q}{2}\right)} \xi(\mathsf{h}, \alpha; s)$ とおく．このとき，次の定理が成立する．

定理 2.3. $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{M}(L_1) \times \mathfrak{M}(L_2)$ に対して，$(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu)$ となるための必要十分条件は次の条件 (C1) がすべての $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\mathsf{h} \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$ に対して成立する事である：

(C1) $\Xi(\mathsf{h}, \alpha_1; s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，関数等式

$$\Xi(\mathsf{h}, \alpha_1; s) = (-1)^d \Xi(\mathsf{h}, \alpha_2; -s - 2\nu + q)$$

を満たす．さらに，関数

$$\Xi(\mathsf{h}, \alpha_1; s) + 2\pi^{-\frac{q}{2}} \mathsf{h}(0) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \left(\frac{\alpha_1(0)}{s} - \frac{\alpha_2(0)}{s + 2\nu - q}\right) \tag{2.1}$$

は整関数であり，任意の $\sigma_1 < \sigma_2$ に対して，関数 (2.1) は縦帯状領域 $\sigma_1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq \sigma_2$ で有界である．

注意 2.4. 注意 2.2 より，定理 2.3 の条件 (C1) において，α_1 と α_2 を置き換えても良い．

2.4 定理 2.3 の証明の概略

この節では，定理 2.3 の証明の概略を述べる．$S^{q-1} = \{u \in \mathbb{R}^q \mid |u| = 1\}$ とし，

$$(f_1, f_2)_q = \int_{S^{q-1}} f_1(u)\overline{f_2(u)}\, du \qquad (f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}^q))$$

とおく．ここで，du は $\displaystyle\int_{S^{q-1}} du = 1$ となる S^{q-1} 上の $SO(q)$-不変測度とする．$\mathbb{R}^q$ 上の複素数値急減少関数全体のなす空間を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$ と表記する．

証明で必要となる調和多項式付き局所ゼータ関数について復習する．$\mathsf{h} \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$ と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$ に対して，局所ゼータ関数 $\Phi(\mathsf{h}, f; s)$ を

$$\Phi(\mathsf{h}, f; s) = \int_{\mathbb{R}^q \setminus \{0\}} \mathsf{h}(x) f(x) |x|^{s-d-q}\, dx \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0 \text{ のときに絶対収束})$$

と定義する．

事実 2.5 ([RS, §5])**.** 局所ゼータ関数 $\Phi(\mathsf{h}, f; s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，$\mathbb{C} \setminus (-d - 2\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 上で正則，$s = -n$ $(n \in d + 2\mathbb{Z}_{\geq 0})$ で高々1位の極を持つ．さらに，局所関数等式

$$\Phi(\mathsf{h}, \mathcal{F}(f); s) = (\sqrt{-1})^d \pi^{-s+\frac{q}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-s+d+q}{2}\right)} \Phi(\mathsf{h}, f; -s+q)$$

を満たす．

以下は，定理 2.3 の証明の概略である．$(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{M}(L_1) \times \mathfrak{M}(L_2)$ とする．

Step.1 大域的ゼータ積分

$i = 1, 2$ と $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ に対して，大域的ゼータ積分 $Z(\alpha_i, f; s)$ を

$$Z(\alpha_i, f; s) = \int_0^\infty t^s \sum_{0 \neq l \in L_i} \alpha_i(l) \mathcal{F}(f)(tl) \frac{dt}{t} \qquad (\mathrm{Re}(s) \text{ が十分大きいときに絶対収束})$$

と定義する．保型対の定義にある関係式 $T_1(f) = T_2(f_{\nu,\infty})$ は，両辺を Fourier 展開して $f(x)$ を $f(tx)$ に置き換える事で，$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q \setminus \{0\})$ に対する関係式

$$\sum_{l \in L_1} \alpha_1(l) \mathcal{F}(f)(tl) = t^{2\nu - q} \sum_{l \in L_2} \alpha_2(l) \mathcal{F}(f_{\nu,\infty})(t^{-1} l) \qquad (t > 0) \tag{2.2}$$

に書き換えられる．関係式 (2.2) を用いる事で，$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q \setminus \{0\})$ に対して，

$$\begin{aligned} Z(\alpha_1, f; s) = &\int_1^\infty t^s \sum_{0 \neq l \in L_1} \alpha_1(l) \mathcal{F}(f)(tl) \frac{dt}{t} - \frac{\alpha_1(0) \mathcal{F}(f)(0)}{s} \\ &+ \int_1^\infty t^{-s-2\nu+q} \sum_{0 \neq l \in L_2} \alpha_2(l) \mathcal{F}(f_{\nu,\infty})(tl) \frac{dt}{t} + \frac{\alpha_2(0) \mathcal{F}(f_{\nu,\infty})(0)}{s + 2\nu - q} \end{aligned}$$

という $Z(\alpha_1, f; s)$ の表示を得る．この表示により，$Z(\alpha_1, f; s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，関数等式 $Z(\alpha_1, f; s) = Z(\alpha_2, f; -s - 2\nu + q)$ を満たし，縦帯状領域で有界となる．逆に，大域的ゼータ積分がこれらの性質を持つとき，Mellin の逆公式を適用する事で，関係式 (2.2) が成立する事を証明できる．

Step.2 基本等式

特殊直交群 $SO(q)$ の $\mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$ への作用を

$$(\tau_d(k)\mathsf{h})(x) = \mathsf{h}(k^{-1}x) \qquad\qquad (k \in SO(q),\ \mathsf{h} \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q))$$

で定める．簡単のため，この節が終わるまで $q \geq 3$ と仮定する．このとき，$(\tau_d, \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q))$ は $SO(q)$ の既約表現となる．($q = 2$ の場合は，$d > 0$ のときに $(\tau_d, \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q))$ は 2 つの既約表現の直和になる．) $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\mathsf{h}_1, \mathsf{h}_2 \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$ に対して，$P^{\tau_d}_{\mathsf{h}_1,\mathsf{h}_2} : C(\mathbb{R}^q) \to C(\mathbb{R}^q)$ を

$$P^{\tau_d}_{\mathsf{h}_1,\mathsf{h}_2}(f)(x) = \int_{SO(q)} f(kx)\overline{(\tau_d(k)\mathsf{h}_1, \mathsf{h}_2)_q}\, dk \qquad\qquad (f \in C(\mathbb{R}^q))$$

と定義する．このとき，q, d のみに依存する定数 $c_{(q,d)}$ が存在して，任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ に対して，基本等式

$$Z(\alpha, P^{\tau_d}_{\mathsf{h}_1,\mathsf{h}_2}(f); s) = c_{(q,d)}\, \xi(\overline{\mathsf{h}}_1, \alpha; s)\Phi(\mathsf{h}_2, \mathcal{F}(f); s)$$

が成立する．よって，$f_{\nu,\infty}$ の定義から得られる等式

$$\Phi(\mathsf{h}, f_{\nu,\infty}; s) = (-1)^d \Phi(\mathsf{h}, f; -s + 2\nu + q) \qquad\qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^q))$$

と局所関数等式と特殊なテスト関数を用いる事で，大域的ゼータ積分 $Z(\alpha, P^{\tau_d}_{\mathsf{h}_1,\mathsf{h}_2}(f); s)$ の解析接続，関数等式，縦帯状領域での有界性といった性質は条件 (C1) にある Dirichlet 級数の性質に書き換えられる．

Step.3 Peter-Weyl の定理

Step.1 と Step.2 より，$(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu)$ のとき，すべての $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathsf{h} \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$ に対して (C1) が成立する．逆に (C1) がすべての $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathsf{h} \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$ に対して成立するとき，

$$\sum_{l \in L_1} \alpha_1(l)\mathcal{F}(P^{\tau_d}_{\mathsf{h}_1,\mathsf{h}_2}(f))(tl) = t^{2\nu - q} \sum_{l \in L_2} \alpha_2(l)\mathcal{F}(P^{\tau_d}_{\mathsf{h}_1,\mathsf{h}_2}(f)_{\nu,\infty})(t^{-1}l) \tag{2.3}$$

がすべての $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathsf{h}_1, \mathsf{h}_2 \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q \setminus \{0\})$, $t > 0$ に対して成立する．このとき，(2.3) を変形すると，

$$\int_{SO(q)} \left(\sum_{l \in L_1} \alpha_1(l)\mathcal{F}(f)(tkl) - t^{2\nu - q} \sum_{l \in L_2} \alpha_2(l)\mathcal{F}(f_{\nu,\infty})(t^{-1}kl) \right) \overline{(\tau_d(k)\mathsf{h}_1, \mathsf{h}_2)_q}\, dk = 0$$

となるから，$SO(q)$ 上の連続関数

$$k \mapsto \sum_{l \in L_1} \alpha_1(l)\mathcal{F}(f)(tkl) - t^{2\nu - q} \sum_{l \in L_2} \alpha_2(l)\mathcal{F}(f_{\nu,\infty})(t^{-1}kl) \tag{2.4}$$

と行列係数 $k \mapsto (\tau_d(k)\mathsf{h}_1, \mathsf{h}_2)_q$ は $SO(q)$ 上の L^2-内積について直交する．よって，$L^2(SO(q))$ において行列係数全体が張る部分空間は稠密（Peter-Weyl の定理）である事と，$SO(q)$ の既約な球表現の同値類は $(\tau_d, \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q))$ $(d \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ で尽くされる事を踏まえると，関数 (2.4) は恒等的に 0 である事が分かる．特に，$t = 1$, $k = 1_q$ である場合を考えると，関係式 $T_{\alpha_1}(f) = T_{\alpha_2}(f_{\nu,\infty})$ が得られ，$(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu)$ であると分かる．

3 保型対と保型形式の関係

3.1 Wallachの理論の復習

保型対と保型形式の関係について説明するために，Wallachの理論を復習しておこう．Gを実簡約Lie群とし，KをGの極大コンパクト部分群とする．$\mathfrak{g}$をGのLie代数の複素化とし，$U(\mathfrak{g})$を$\mathfrak{g}$の普遍包絡環，$Z(\mathfrak{g})$を$U(\mathfrak{g})$の中心とする．$C^\infty(G)$をG上の滑らかな複素数値関数全体のなす空間とし，Gはこの空間に右正則作用

$$(\rho(g)F)(h) = F(hg) \qquad\qquad (F \in C^\infty(G),\ g, h \in G)$$

で作用するものとする．

ΓをGの離散部分群とする．このとき，以下の性質を満たす$\phi \in C^\infty(G)$をG上のΓに関する保型形式という：

(1) $\phi(\gamma g) = \phi(g) \quad (\gamma \in \Gamma,\ g \in G)$.

(2) ϕはK-有限，すなわち，$\{\rho(k)\phi \mid k \in K\}$が生成するベクトル空間は有限次元である．

(3) ϕは$Z(\mathfrak{g})$-有限，すなわち，ベクトル空間$\{\rho(X)\phi \mid X \in Z(\mathfrak{g})\}$は有限次元である．

(4) ϕは一様緩増加，すなわち，次のような$r > 0$が存在する：
任意の$X \in U(\mathfrak{g})$に対して，ある$C_X > 0$が存在して，$|(\rho(X)\phi)(g)| \leq C_X \|g\|^r \ (g \in G)$となる．ここで，$\|\cdot\|$はWallach([Wa1, 2.A.2.1.])の意味でのG上のノルムとする．

注意 3.1. 通常は離散部分群Γに「$\Gamma\backslash G$は体積有限」などの条件を課すが，本稿では特に条件を課さない．

PをGの極小放物型部分群とする．Pの有限次元表現(σ, V_σ)に対して，$(\rho_\sigma, I_\sigma^\infty)$を誘導表現$C^\infty \operatorname{Ind}_P^G(\sigma)$とする，すなわち，

$$I_\sigma^\infty = \{F\colon G \to V_\sigma \mid F \text{は滑らか},\ F(pg) = \sigma(p)F(g) \ \ (p \in P,\ g \in G)\}$$
$$(\rho_\sigma(g)F)(h) = F(hg) \qquad (F \in I_\sigma^\infty,\ g, h \in G).$$

ここで，I_σ^∞には通常のFrechét位相（例えば，[Wa2, 10.A.1.7.]を参照）を入れ，

$$I_\sigma^{-\infty} = \{\mathcal{T}\colon I_\sigma^\infty \to \mathbb{C} \mid \mathcal{T}\text{は連続な}\mathbb{C}\text{-線型写像}\},$$
$$(I_\sigma^{-\infty})^\Gamma = \{\mathcal{T} \in I_\sigma^{-\infty} \mid \mathcal{T}(\rho_\sigma(\gamma)F) = \mathcal{T}(F) \ \ (\gamma \in \Gamma,\ F \in I_\sigma^\infty)\}$$

と定義する．このとき，以下が成立する

事実 3.2 ([Wa2, 1.1.9.2.]). 上の記法を用いる．G上の関数ϕに対して，ϕがG上のΓに関する保型形式であるための必要十分条件は，Pのある有限次元表現(σ, V_σ)，ある$\mathcal{T} \in (I_\sigma^{-\infty})^\Gamma$，ある$K$-有限ベクトル$F \in I_\sigma^\infty$が存在して，

$$\phi(g) = \mathcal{T}(\rho_\sigma(g)F) \qquad\qquad (g \in G)$$

が成立する事である．

この事実により，G 上の Γ に関する保型形式の研究は，$(I_\sigma^{-\infty})^\Gamma$ の元の研究に帰着される．この章では，$G \simeq O_0(1,q+1)$, σ が指標，Γ がある条件を満たすとき，$(I_\sigma^{-\infty})^\Gamma$ の元は保型対と見なせる事を示す．

3.2 符号 $(1,q+1)$ の直交群

$\mathrm{S} = \left(\begin{array}{c|c|c} & & 1 \\ \hline & -1_q & \\ \hline 1 & & \end{array}\right)$ とし，$G = O_0(\mathrm{S})$ を直交群

$$O(\mathrm{S}) = \{g \in GL(q+2,\mathbb{R}) \mid {}^t g \mathrm{S} g = \mathrm{S}\} \simeq O(1,q+1)$$

の単位元の連結成分とする．このとき，G の極大コンパクト部分群は $K = G \cap O(q+2) \simeq SO(q+1)$ で与えられる．$x \in \mathbb{R}^q$, $y > 0$, $k \in SO(q)$ に対して，G の元 $\mathrm{n}(x)$, $\bar{\mathrm{n}}(x)$, $\mathrm{m}(y,k)$ を

$$\mathrm{n}(x) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \sqrt{2}\,{}^t x & |x|^2 \\ \hline & 1_q & \sqrt{2}x \\ \hline & & 1 \end{array}\right), \quad \bar{\mathrm{n}}(x) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline \sqrt{2}x & 1_q & \\ \hline |x|^2 & \sqrt{2}\,{}^t x & 1 \end{array}\right), \quad \mathrm{m}(y,k) = \left(\begin{array}{c|c|c} y & & \\ \hline & k & \\ \hline & & y^{-1} \end{array}\right)$$

と定義し，G の部分群 N, $\bar{N}$, M を

$$N = \{\mathrm{n}(x) \mid x \in \mathbb{R}^q\}, \qquad \bar{N} = \{\bar{\mathrm{n}}(x) \mid x \in \mathbb{R}^q\}, \qquad M = \{\mathrm{m}(y,k) \mid y > 0,\ k \in SO(q)\}$$

と定義する．ここで，$P = NM$ とおくと，P は G の極小放物型部分群となる．$\det(w_0) = -1$, $w_0^2 = 1_q$ を満たす $w_0 \in O(q)$ を固定し，$w = \left(\begin{array}{c|c|c} & & 1 \\ \hline & w_0 & \\ \hline 1 & & \end{array}\right)$ とおくと，w は Weyl 群の最長元であり，Bruhat 分解 $G = PwN \sqcup P$ が成立する．また，$wNw = \bar{N}$ より，Bruhat 分解の両辺にそれぞれ右から w を掛ける事で $G = P\bar{N} \sqcup Pw$ という分解が得られる．

3.3 球主系列表現上の連続汎関数

$\nu \in \mathbb{C}$ に対して，指標 $\sigma_\nu \colon P \to \mathbb{C}^\times$ を

$$\sigma_\nu(\mathrm{n}(x)\mathrm{m}(y,k)) = y^{\nu+\frac{q}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^q,\ y > 0,\ k \in SO(q))$$

と定義する．P の表現 $(\sigma_\nu, \mathbb{C})$ から誘導される G の表現 $(\rho_{\sigma_\nu}, I_{\sigma_\nu}^\infty)$ を G の球主系列表現という．

2 種類の G の分解 $G = PwN \sqcup P$ と $G = P\bar{N} \sqcup Pw$ を用いて，$C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ から $I_{\sigma_\nu}^\infty$ への 2 つの埋め込み $\iota_{\nu,1}$ と $\iota_{\nu,2}$ を

$$\iota_{\nu,1}(f)(g) = \begin{cases} \sigma_\nu(p)f(x) & \text{if } g = pw\,\mathrm{n}(-x) \quad (p \in P,\ x \in \mathbb{R}^q), \\ 0 & \text{if } g \in P, \end{cases}$$

$$\iota_{\nu,2}(f)(g) = \begin{cases} \sigma_\nu(p)f(x) & \text{if } g = p\,\bar{\mathrm{n}}(x) \quad (p \in P,\ x \in \mathbb{R}^q), \\ 0 & \text{if } g \in Pw \end{cases}$$

と定義する．このとき，$\iota_{\nu,1}(f) = \iota_{\nu,2}(f_{\nu,\infty})$ $(f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q \setminus \{0\}))$ が成立する．また，$G = PwN \cup P\bar{N}$ より，任意の $F \in I_{\sigma_\nu}^\infty$ に対して，$F = \iota_{\nu,1}(f_1) + \iota_{\nu,2}(f_2)$ となる $f_1, f_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ が存在する．このような (f_1, f_2) を F の分割と呼ぶ事にする．

これらの事を踏まえると，次の命題が証明できる．

命題 3.3. $I_{\sigma_\nu}^{-\infty} \ni \mathcal{T} \mapsto (\mathcal{T} \circ \iota_{\nu,1},\ \mathcal{T} \circ \iota_{\nu,2}) \in \mathcal{A}(J_\nu)$ は *well-defined* であり，全単射である．

この命題は，$I_{\sigma_\nu}^{-\infty}$ の元の連続性は $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)$ の元の連続性と対応している事を示し，主張にある写像の逆写像 $\mathcal{A}(J_\nu) \ni (T_1, T_2) \mapsto \mathcal{T}_{(T_1,T_2)} \in I_{\sigma_\nu}^{-\infty}$ が

$$\mathcal{T}_{(T_1,T_2)}(F) = T_1(f_1) + T_2(f_2) \qquad (F \in I_{\sigma_\nu}^{-\infty},\ (f_1, f_2) \text{ は } F \text{ の分割})$$

で与えられる事を示す事で証明される．($\mathcal{T}_{(T_1,T_2)}$ の定義は F の分割のとり方によらない．)

命題 3.3 と $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ に対して，

$$\iota_{\nu,1}(\mathrm{s}_x(f)) = \rho_{\sigma_\nu}(\mathrm{n}(-x))\iota_{\nu,1}(f), \qquad \iota_{\nu,2}(\mathrm{s}_x(f)) = \rho_{\sigma_\nu}(\bar{\mathrm{n}}(x))\iota_{\nu,2}(f) \qquad (x \in \mathbb{R}^q)$$

となる事から，次の命題が得られる．

命題 3.4. Γ を $\{\mathrm{n}(l) \mid l \in L_1^\vee\} \cup \{\bar{\mathrm{n}}(l) \mid l \in L_2^\vee\}$ を含む G の離散部分群とする．このとき，$\mathcal{T} \in \left(I_{\sigma_\nu}^{-\infty}\right)^\Gamma$ に対して，$(\mathcal{T} \circ \iota_{\nu,1},\ \mathcal{T} \circ \iota_{\nu,2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu)$ となる．

4 Fourier 展開

4.1 ひねった Fourier 変換

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathbb{R}^q$ 上の微分作用素 D_λ を

$$D_\lambda = |x|^2\Delta + 4(\lambda+1)\sum_{j=1}^q x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + 2(\lambda+1)(2\lambda+q) \qquad (x = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_q) \in \mathbb{R}^q)$$

と定義する．$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ とする．$\mathrm{Re}(\nu) > 0$ を満たす $\nu \in \mathbb{C}$ と $y \in \mathbb{R}^q$ に対して，'ひねった Fourier 変換' $\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(y)$ を $\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(y) = \mathcal{F}(f_{\nu,\infty})(y)$ と定義する．この $\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(y)$ を ν について $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 上に次のようにして解析接続する：

- $y \neq 0$ の場合：
  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathrm{Re}(\nu) > 0$ を満たす $\nu \in \mathbb{C}$，$y \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$ に対して，
  $$\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(y) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1}|y|)^{2m}} \mathcal{F}_{\nu+m,\infty}(D_{\nu+m-1}D_{\nu+m-2}\cdots D_\nu f)(y) \qquad (4.1)$$
  が成立する．この右辺の表示により，$\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(y)$ は $\mathrm{Re}(\nu) > -m$ の範囲に解析接続される．$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は任意にとれるから，$\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(y)$ は ν について $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続された事になる．

- $y=0$ の場合：

  $\mathrm{Re}(\nu)>0$ を満たす $\nu\in\mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(0)=\Phi(1,f;2\nu)$ が成立する．よって，この右辺の表示により，$\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(0)$ は ν について $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ 上正則に解析接続される．

解析接続の原理より，$\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(y)=\mathcal{F}(f_{\nu,\infty})(y)\ \ (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^q\setminus\{0\}))$ は任意の $\nu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ に対して成立する事に注意する．ここで，$\alpha\in\mathfrak{M}(L)$ に対して，$(T_\alpha)_{\nu,\infty}\colon C_0^\infty(\mathbb{R}^q)\to\mathbb{C}$ を

$$(T_\alpha)_{\nu,\infty}(f)=\sum_{l\in L}\alpha(l)\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f)(l)\qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^q))$$

と定義すると，$(T_\alpha)_{\nu,\infty}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)$ であり，

$$(T_\alpha)_{\nu,\infty}(f)=T_\alpha(f_{\nu,\infty})\qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^q\setminus\{0\}))$$

が成立する．

4.2 保型対に対応する連続汎関数の Fourier 展開

まず，$I_{\sigma_\nu}^{-\infty}$ の Whittaker ベクトルとして知られる Jacquet 積分を導入しよう．$\mathrm{Re}(\nu)>0$ であるとき，$l\in\mathbb{R}^q$ に対して，Jacquet 積分 $W_{\nu,l}\in I_{\sigma_\nu}^{-\infty}$ を

$$W_{\nu,l}(F)=\int_{\mathbb{R}^q}F(w\mathrm{n}(-x)g)e^{2\pi\sqrt{-1}\langle l,x\rangle}dx\qquad (F\in I_{\sigma_\nu}^\infty)$$

と定義する．$F\in I_{\sigma_\nu}^\infty$ に対して，Jacquet 積分 $W_{\nu,l}(F)$ は F の分割 (f_1,f_2) を用いて，

$$W_{\nu,l}(F)=\mathcal{F}(f_1)(l)+\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f_2)(l)$$

と表せる．この右辺の表示により，Jacquet 積分 $W_{\nu,l}$ を ν について $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ 上に拡張する．

今後は，常に $\nu\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$ と仮定する．$\mathcal{I}=\{I=(i_1,i_2,\cdots,i_q)\mid i_1,i_2,\cdots,i_q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおく．また，$I=(i_1,i_2,\cdots,i_q)\in\mathcal{I}$ に対して，$\mathbb{R}^q$ 上の微分作用素 ∂^I を

$$\partial^I=\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_q}}{\partial x_1^{i_1}\,\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_q^{i_q}}\qquad (x={}^t(x_1,x_2,\cdots,x_q)\in\mathbb{R}^q)$$

と定義する．$(T_{\alpha_1},T_{\alpha_2})\in\mathcal{A}(L_1,L_2;J_\nu)$ とし，$(T_{\alpha_1},T_{\alpha_2})=(\mathcal{T}\circ\iota_{\nu,1},\mathcal{T}\circ\iota_{\nu,2})$ を満たす $\mathcal{T}\in I_{\sigma_\nu}^{-\infty}$ をとる．このとき，$\mathcal{T}$ は Jacquet 積分を用いて，次のように ‘Fourier 展開’ される：

命題 4.1. 上の記法を用いる．このとき，ある $\beta_1\colon\mathcal{I}\to\mathbb{C}$，$\beta_2\colon\mathcal{I}\to\mathbb{C}$ で有限個の I を除いて $\beta_1(I)=\beta_2(I)=0$ となるものが存在して，

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(F)&=\sum_{l\in L_1}\alpha_1(l)W_{\nu,l}(F)+\sum_{I\in\mathcal{I}}\beta_1(I)\,(\partial^I F(\bar{\mathrm{n}}(x)))|_{x=0}\\&=\sum_{l\in L_2}\alpha_2(l)W_{w_0l}(\rho_{\sigma_\nu}(w)F)+\sum_{I\in\mathcal{I}}\beta_2(I)\,(\partial^I F(w\mathrm{n}(-x)))|_{x=0}\qquad (F\in I_{\sigma_\nu}^\infty)\end{aligned}$$

が成立する．

この命題の1つめの展開を証明しよう．まず，

$$T_{\alpha_2}(f)-(T_{\alpha_1})_{\nu,\infty}(f)=T_{\alpha_2}(f)-T_{\alpha_1}(f_{\nu,\infty})=T_{\alpha_2}(f)-T_{\alpha_2}(f)=0 \quad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^q\setminus\{0\}))$$

より，$T_{\alpha_2}-(T_{\alpha_1})_{\nu,\infty}$ は台が $\{0\}$ の $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)$ の元だから，ある $\beta_1\colon \mathcal{I}\to\mathbb{C}$ で有限個の I を除いて $\beta_1(I)=0$ となるものが存在して，

$$T_{\alpha_2}(f)-(T_{\alpha_1})_{\nu,\infty}(f)=\sum_{I\in\mathcal{I}}\beta_1(I)(\partial^I f)(0) \qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^q))$$

と表せる．([Fr, §3.2] 参照) よって，$F\in I_{\sigma_\nu}^\infty$ に対して，F の分割 (f_1,f_2) をとると，

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(F)&=T_{\alpha_1}(f_1)+T_{\alpha_2}(f_2)=T_{\alpha_1}(f_1)+(T_{\alpha_1})_{\nu,\infty}(f_2)+\sum_{I\in\mathcal{I}}\beta_1(I)(\partial^I f_2)(0)\\&=\sum_{l\in L_1}\alpha_1(l)\big(\mathcal{F}(f_1)(l)+\mathcal{F}_{\nu,\infty}(f_2)(l)\big)+\sum_{I\in\mathcal{I}}\beta_1(I)(\partial^I f_2)(0)\\&=\sum_{l\in L_1}\alpha_1(l)W_{\nu,l}(F)+\sum_{I\in\mathcal{I}}\beta_1(I)\left(\partial^I F(\bar{\mathrm{n}}(x))\right)|_{x=0}\end{aligned}$$

となり，1つめの展開を得る．2つめの展開も同様に示せる．

Γ_ℓ を $\{\mathrm{n}(l)\mid l\in L_1^\vee\}\cup\{\bar{\mathrm{n}}(l)\mid l\in L_2^\vee\}$ が生成する G の部分群とする．$\mathcal{T}$ の Fourier 展開に $F\in I_{\sigma_\nu}^\infty$ を代入したものと，$\rho_{\sigma_\nu}(\mathrm{n}(l))F$ $(l\in L_1^\vee)$ と $\rho_{\sigma_\nu}(\bar{\mathrm{n}}(l))F$ $(l\in L_2^\vee)$ を代入したものをそれぞれ比較する事で次の補題を得る．

補題 4.2. 上の記法を用いる．$\mathcal{T}\in(I_{\sigma_\nu}^{-\infty})^{\Gamma_\ell}$ となるための必要十分条件は，命題 *4.1* の展開において $\beta_1(I)=\beta_2(I)=0$ $(I\in\mathcal{I}\setminus\{0\})$ となる事である．

注意 4.3. 補題 4.2 より，$\mathcal{T}\in(I_{\sigma_\nu}^{-\infty})^{\Gamma_\ell}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(F)&=\sum_{l\in L_1}\alpha_1(l)W_{\nu,l}(F)+\beta_1(0)F(1_{q+2})\\&=\sum_{l\in L_2}\alpha_2(l)W_{w_0l}(\rho_{\sigma_\nu}(w)F)+\beta_2(0)F(w) \qquad (F\in I_{\sigma_\nu}^\infty)\end{aligned}$$

と展開される．F が $I_{\sigma_\nu}^\infty$ の K-有限ベクトルであるとき，

$$\mathcal{T}(\rho_{\sigma_\nu}(g)F)=\sum_{l\in L_1}\alpha_1(l)W_{\nu,l}(\rho_{\sigma_\nu}(g)F)+\beta_1(0)F(g) \qquad (g\in G)$$

は保型形式 $\mathcal{T}(\rho_{\sigma_\nu}(\cdot)F)$ の通常の Whittaker 関数による Fourier 展開である．

命題 4.1 の 2 種類の展開を用いて，§2.4 のようなゼータ積分を考える事で，$\xi(\mathsf{h},\alpha_1;s)$ と $\xi(\mathsf{h},\alpha_2;s)$ の留数は $\alpha_1(0)$, $\alpha_2(0)$, $\beta_1(I)$, $\beta_2(I)$ $(I\in\mathcal{I})$ を用いて表される事が分かる．この事と定理 2.3 と補題 4.2 より，次の定理を得る．

定理 4.4. $\nu \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ と仮定する．$\alpha_1 \in \mathfrak{M}(L_1)$, $\beta_1(0) \in \mathbb{C}$ とし，

$$\mathcal{T}(F) = \sum_{l \in L_1} \alpha_1(l) W_{\nu,l}(F) + \beta_1(0) F(1_{q+2}) \qquad (F \in I_{\sigma_\nu}^{\infty})$$

とおく．このとき，$\mathcal{T} \in (I_{\sigma_\nu}^{-\infty})^{\Gamma_\ell}$ となるための必要十分条件は，ある $\alpha_2 \in \mathfrak{M}(L_2)$ が存在して，任意の $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\mathsf{h} \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$ に対して (C1), (C2) が成立する事である．ここで，(C1) は定理 2.3 で述べられているものであり，(C2) は次のような条件である：

(C2) $\xi(\mathsf{h}, \alpha_1; s)$ と $\xi(\mathsf{h}, \alpha_2; s)$ は，$d = 0$ ならば $\mathbb{C} \setminus \{-2\nu + q, q\}$ 上で正則であり，$d > 0$ ならば整関数である．さらに，$\beta_1(0) = -\Xi(1, \alpha_2; q)$.

注意 4.5. 講演時に熊本大学の成田宏秋氏から，定理 4.4 と本質的に同等の結果が Maass の論文 [Ma] で既に述べられている事をご指摘頂いた．

5 応用

5.1 §2,3,4 のまとめ

§2,3,4 で述べた事をまとめると，次の可換図式になる：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{M}(L_1) \times \mathfrak{M}(L_2) & \xleftrightarrow{1:1} & \mathcal{D}'(L_1^\vee \backslash \mathbb{R}^q) \times \mathcal{D}'(L_2^\vee \backslash \mathbb{R}^q) & & \\
\bigcup & & \bigcup & & \\
\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{M}(L_1) \times \mathfrak{M}(L_2) \mid \text{(C1) for } \forall d,\ \forall \mathsf{h}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu) & \subset & \mathcal{A}(J_\nu) \\
\bigcup & & \uparrow & & \updownarrow{\scriptstyle 1:1} \\
\{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{M}(L_1) \times \mathfrak{M}(L_2) \mid \text{(C1),(C2) for } \forall d,\ \forall \mathsf{h}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \left(I_{\sigma_\nu}^{-\infty}\right)^{\Gamma_\ell} & \subset & I_{\sigma_\nu}^{-\infty}
\end{array}$$

ここで，条件 (C1),(C2) は定理 2.3 と定理 4.4 にある Dirichlet 級数に関する条件である．この章では，(C1),(C2) を満たす Dirichlet 級数を Epstein ゼータ関数から構成する．

5.2 調和多項式付き Epstein ゼータ関数

$m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{R}^m$ 内の格子 L と $\mathsf{h} \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^m)$ に対して，Epstein ゼータ関数 $\zeta_m(\mathsf{h}, L; s)$ を

$$\zeta_m(\mathsf{h}, L; s) = \sum_{0 \neq l \in L} \frac{\mathsf{h}(l)}{|l|^{2s+d}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > m \text{ で絶対収束})$$

と定義し，$\hat{\zeta}_m(\mathsf{h}, L; s) = \sqrt{\mathrm{v}(L)}\, \pi^{-s} \Gamma\left(s + \dfrac{d}{2}\right) \zeta_m(\mathsf{h}, L; s)$ とおく．ここで，$\mathrm{v}(L) = \displaystyle\int_{L \backslash \mathbb{R}^m} dx$ とする．このとき，次の事実が成立する．

事実 5.1 ([Si]). Epstein ゼータ関数 $\zeta_m(\mathsf{h}, L; s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，関数等式

$$\hat{\zeta}_m(\mathsf{h}, L; s) = (\sqrt{-1})^d \hat{\zeta}_m\left(\mathsf{h}, L^\vee; -s + \frac{m}{2}\right)$$

を満たす．さらに，$\zeta_m(\mathsf{h}, L; s) - \dfrac{\pi^{-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\mathsf{h}(0)}{\mathrm{v}(L)\left(s - \frac{m}{2}\right)}$ は位数 1 の整関数になる．

5.3 Hopf 写像

小野孝氏は [On, Chapter 7] において，Hopf 写像と呼ばれる二次写像の整数論を調べている．(V, P), $(\tilde{V}, \tilde{\mathsf{P}})$ をそれぞれ q 次元，m 次元の $\mathbb{Q}$ 上定義された二次空間とする．$\mathbb{Q}$ 上定義された二次写像 $Q\colon \tilde{V} \to V$ で $\mathsf{P}(Q(u)) = \tilde{\mathsf{P}}(u)^2$ $(u \in \tilde{V})$ を満たすものを球二次写像という．L を $V_{\mathbb{Q}}$ 内の格子，$\tilde{L}$ を $\tilde{V}_{\mathbb{Q}}$ 内の格子とし，$Q(\tilde{L}) \subset L$ が成り立っているとする。ここで $\mathsf{P}, \tilde{\mathsf{P}}$ は正定値二次形式であるとすると，$l \in L$ に対して，$\alpha_{\tilde{L}}(l) = \#\{u \in \tilde{L} \mid Q(u) = l\}$ は有限である．小野孝氏は Hopf 写像と呼ばれる特別な二次写像について，$\alpha_{\tilde{L}}(l)$ を明示的に求めている．この節では，Q が Hopf 写像である場合に，$\alpha_{\tilde{L}}(l)$ を Fourier 係数として持つ $\left(I^{-\infty}_{\sigma_{1/2}}\right)^{\Gamma_\ell}$ の元が存在する事を紹介する．

小野孝氏が扱った 3 つの Hopf 写像を Clifford 代数の表現を用いて具体的に構成する．以下，q は $3, 5, 9$ のいずれかとし，$m = 2q-2$ とする．$V = \mathbb{R}^q$, $\tilde{V} = \mathbb{R}^m$ とし，$\mathsf{P}(x) = |x|^2$ $(x \in \mathbb{R}^q)$, $\tilde{\mathsf{P}}(u) = |u|^2$ $(u \in \mathbb{R}^m)$ とする．C_q を正定値二次形式 $\mathsf{P}(x)$ の Clifford 代数とし，$(\Pi, \mathbb{R}^m)$ を C_q の既約 m 次元表現とする．このとき，$\mathbb{R}^q$ の標準基底 $e_1, e_2, \cdots, e_q$ の Π による像を $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \cdots, \mathrm{S}_q$ とすると，

$$\mathrm{S}_i^2 = 1_m \qquad\qquad \mathrm{S}_i\mathrm{S}_j = \mathrm{S}_j\mathrm{S}_i \quad (i \neq j)$$

が成り立ち，(必要なら同型な表現に移る事により，) S_i は m 次対称行列にとれる．このとき，

$$Q(u) = ({}^t u\mathrm{S}_1 u,\ {}^t u\mathrm{S}_2 u,\ \cdots,\ {}^t u\mathrm{S}_q u) \qquad\qquad (u \in \mathbb{R}^m)$$

で定義される二次写像 $Q\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ を Hopf 写像という．q, m の選び方から，$|Q(u)|^2 = |u|^4$ が成り立つ．また，偶の元からなる C_q の部分代数 C_q^+ の $\mathbb{R}^m$ 上の表現は $Spin(q)$ のスピン表現を引き起こし，Q はスピン表現から標準表現への $Spin(q)$-準同型写像となる．

$u = {}^t(u_1, u_2, \cdots, u_{2q-2})$ に対して，${}^t u\mathrm{S}_i u$ の明示形を記述すると次のようになる：

- $q = 3$ の場合：

$${}^t u\mathrm{S}_1 u = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2, \quad {}^t u\mathrm{S}_2 u = 2u_1u_3 + 2u_2u_4, \quad {}^t u\mathrm{S}_3 u = 2u_1u_4 - 2u_2u_3.$$

- $q = 5$ の場合：

$${}^t u\mathrm{S}_1 u = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2 - u_8^2,$$
$${}^t u\mathrm{S}_2 u = 2u_1u_5 + 2u_2u_6 + 2u_3u_7 + 2u_4u_8, \quad {}^t u\mathrm{S}_3 u = 2u_1u_6 - 2u_2u_5 - 2u_3u_8 + 2u_4u_7,$$
$${}^t u\mathrm{S}_4 u = 2u_1u_7 + 2u_2u_8 - 2u_3u_5 - 2u_4u_6, \quad {}^t u\mathrm{S}_5 u = 2u_1u_8 - 2u_2u_7 + 2u_3u_6 - 2u_4u_5.$$

- $q=9$ の場合：略す.

$\tilde{L}$ を $\mathbb{R}^m$ 内の格子とし，L_1, L_2 をそれぞれを $Q(\tilde{L}) \subset 2L_1$, $Q(\tilde{L}^\vee) \subset 2L_2$ を満たす $\mathbb{R}^q$ 内の格子とする．ここで，

$$\alpha_{\tilde{L},1}(l) = \#\{u \in \tilde{L} \mid Q(u) = 2l\} \qquad (l \in L_1)$$
$$\alpha_{\tilde{L},2}(l) = \#\{u \in \tilde{L}^\vee \mid Q(u) = 2l\}\mathrm{v}(\tilde{L})^{-1} \qquad (l \in L_2)$$

とおく．Q が $Spin(q)$-準同型写像である事を用いると，$\mathsf{h} \in \mathsf{H}_d(\mathbb{R}^q)$ に対して，$\mathsf{h} \circ Q \in \mathsf{H}_{2d}(\mathbb{R}^{2q-2})$ が成立する事が分かる．よって，

$$\zeta_{2q-2}(\mathsf{h} \circ Q, \tilde{L}; s) = 2^{-s-d}\xi(\mathsf{h}, \alpha_{\tilde{L},1}; s), \qquad \zeta_{2q-2}(\mathsf{h} \circ Q, \tilde{L}^\vee; s) = 2^{-s-d}\mathrm{v}(\tilde{L})\xi(\mathsf{h}, \alpha_{\tilde{L},2}; s)$$

である事に注意すると，事実 5.1 と定理 4.4 より，次の命題を得る．

命題 5.2. $\mathcal{T}_{\tilde{L}} : I^\infty_{\sigma_{1/2}} \to \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{T}_{\tilde{L}}(F) = \sum_{l \in L_1} \alpha_{\tilde{L},1}(l) W_{\nu,l}(F) \qquad (F \in I^\infty_{\sigma_{1/2}})$$

と定義すると，$\mathcal{T}_{\tilde{L}} \in \left(I^{-\infty}_{\sigma_{1/2}}\right)^{\Gamma_\ell}$ となる．

注意 5.3. もし $\tilde{L} = \tilde{L}^\vee$ ならば，$\mathrm{n}(l)$ $(l \in L_1^\vee)$ と w で生成される G の部分群 $\tilde{\Gamma}_\ell$ について，$\mathcal{T}_{\tilde{L}} \in \left(I^{-\infty}_{\sigma_{1/2}}\right)^{\tilde{\Gamma}_\ell}$ となる．すなわち，

$$\sum_{l \in L_1} \alpha_{\tilde{L},1}(l) W_{\nu,l}(F) = \sum_{l \in L_1} \alpha_{\tilde{L},1}(l) W_{w_0 l}(\rho_{\sigma_{1/2}}(w)F) \qquad (F \in I^\infty_{\sigma_{1/2}}).$$

参考文献

[Fr] F. G. Friedlander. *Introduction to the theory of distributions.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1998. With additional material by M. Joshi.

[Ma] Hans Maass. Automorphe Funktionen von meheren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 16(nos. 3-4):72–100, 1949.

[On] Takashi Ono. *Variations on a theme of Euler.* The University Series in Mathematics. Plenum Press, New York, 1994. Quadratic forms, elliptic curves, and Hopf maps, Translated and revised from the second Japanese edition by the author, Appendix 2 by Masanari Kida.

[RS] S. Rallis and G. Schiffmann. Distributions invariantes par le groupe orthogonal. In *Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg, 1973–75)*, pages 494–642. Lecture Notes in Math., Vol. 497. Springer, Berlin, 1975.

[Si] Carl Ludwig Siegel. *Lectures on advanced analytic number theory.* Notes by S. Raghavan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 23. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

[Su] Toshiaki Suzuki. Distributions with automorphy and Dirichlet series. *Nagoya Math. J.*, 73:157–169, 1979.

[Ta] Keita Tamura. Automorphic distributions of prehomogeneous vector spaces and their L-functions. *Master Thesis* (in Japanese), Rikkyo University, 2009.

[Wa1] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups. I*, volume 132 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[Wa2] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups. II*, volume 132 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1992.