数理解析研究所講究録
第 1935 巻 2015 年 1-5

A characterization of extreme norms on $\mathbb{R}^2$

新潟大学大学院・自然科学研究科 横山 駿平 (Shumpei Yokoyama)
Department of Mathematical Science,
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
新潟大学・理学部 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)
Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University
新潟大学大学院・自然科学研究科 田中 亮太朗 (Ryotaro Tanaka)
Department of Mathematical Science,
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1 序論

$\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは, 任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して $\|(x,y)\|=\|(|x|,|y|)\|$ が成り立つことである. また $\|\cdot\|$ が normalized であるとは, $\|(1,0)\|=\|(0,1)\|=1$ が成り立つことである. AN_2 を $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized norm 全体の集合とする. $\|\cdot\|,\|\cdot\|'\in AN_2$ と任意の $\lambda\in(0,1)$ に対して $\lambda\|\cdot\|+(1-\lambda)\|\cdot\|'\in AN_2$ が成り立つ. この意味で AN_2 は凸構造を持つ. 1988 年に R. Grząślewicz [4] は, AN_2 のノルムが端点になることと, 単位球の端点が l_∞^2 の単位球面に含まれることが同値であることを示した.

Bonsall-Duncan [2] は, $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized norm を凸関数によって次のように特徴づけた. つまり, Ψ_2 を $\max\{1-t,t\}\leq\psi(t)\leq 1$ $(t\in[0,1])$ を満たす $[0,1]$ 上の凸関数の集合とする. このとき $\psi(t)=\|(1-t,t)\|$ で AN_2 と Ψ_2 は 1 対 1 に対応する. さらに, 任意の $\psi,\psi'\in\Psi_2,\lambda\in(0,1)$ に対して

$$\|\cdot\|_{(1-\lambda)\psi+\lambda\psi'}=(1-\lambda)\|\cdot\|_\psi+\lambda\|\cdot\|_{\psi'}$$

が成り立つ. これは凸構造を保存する事を意味する.

最近, 小室-斎藤-三谷 [9] は Ψ_2 の観点から AN_2 の端点を調べ, $0\leq\alpha\leq 1/2\leq\beta\leq 1$ に対して,

$$\psi_{\alpha,\beta}(t)=\begin{cases}1-t & (t\in[0,\alpha]),\\ \dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-\alpha}t+\dfrac{\beta-2\alpha\beta}{\beta-\alpha} & (t\in[\alpha,\beta]),\\ t & (t\in[\beta,1]).\end{cases}$$

とし, 凸解析的手法を用いることで $\mathrm{ext}(\Psi_2) = \{\psi_{\alpha,\beta} : 0 \leq \alpha \leq 1/2 \leq \beta \leq 1\}$ となる. つまり, $\psi_{\alpha,\beta}$ の全体が AN_2 の端点と同一視できることを示した.

上の 2 つの結果は, 背理法を基に示されている. つまり, l_∞^2 の単位球面に含まれない単位球の端点となる $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して $\|\cdot\| = (\|\cdot\|' + \|\cdot\|'')/2$ を実際に構成している.

本論文では, まず斎藤-三谷-小室 [8] の結果を紹介する. その後, ミルマンの定理を用いることで Grząślewicz と小室-斎藤-三谷の結果の直接的な証明が与えられることを示す.

2 AN_2 の端点の特徴づけ

この節では, 斎藤-三谷-小室 [8] の証明を紹介する. そのために, 次の補題を要する.

Lemma 2.1. $\psi \in \Psi_2$ とし, $\varphi = 2\psi - \psi_\infty$ とする.

(i) $\psi_R'(1/2) \geq \psi_L'(1/2) + 1$ のとき, $\varphi \in \Psi_2$ で,

$$\psi = \frac{\varphi + \psi_\infty}{2}.$$

となる.

(ii) $\psi_R'(1/2) < \psi_L'(1/2) + 1$ のとき, $\varphi \notin \Psi_2$ となる. しかし, $s_0 \in [0, 1/2], t_0 \in (1/2, 1]$ に対して, $\varphi_0 \in \Psi_2$ で

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \varphi(t) & (t \in [0, s_0] \cup [t_0, 1]), \\ \dfrac{\varphi(t_0) - \varphi(s_0)}{t_0 - s_0} t + \dfrac{\varphi(s_0)t_0 - \varphi(t_0)s_0}{t_0 - s_0} & (t \in [s_0, t_0]), \end{cases}$$

を見つけることができる. さらに, $\varphi_{\max} = 2\psi - \varphi_0$ とおくと, $\varphi_{\max} \in \Psi_2$ で

$$\psi = \frac{\varphi_0 + \varphi_{\max}}{2}$$

となる.

補題 2.1 を用いることで, AN_2 の端点の特徴づけを得る.

Theorem 2.2. $\psi \in \Psi_2$ とすると次は同値である.

(i) ψ が Ψ_2 の端点.

(ii) $\|\cdot\|_\psi$ が AN_2 の端点.

(iii) $\psi = \psi_{\alpha,\beta}$ を満たす $0 \leq \alpha \leq 1/2 \leq \beta \leq 1$ が存在する.

Proof. (i) $\Leftrightarrow$ (iii) を見ればよい. ψ を Ψ_2 の端点とする. $\psi'_R(1/2) \geq \psi'_L(1/2)+1$ のとき, 補題 2.1 より

$$\psi = \frac{\varphi + \psi_\infty}{2},\ \psi = \varphi = \psi_\infty = \psi_{1/2,1/2}$$

$\psi'_R(1/2) < \psi'_L(1/2)+1$ のとき, 補題 2.1 より

$$\psi = \frac{\varphi_0 + \varphi_{\max}}{2},\ \psi = \varphi_0 = \varphi_{\max}$$

となり, $\psi = \psi_{s_0,t_0}$ を得る.

逆に, $\psi = \psi_{\alpha,\beta}$ となる $0 \leq \alpha \leq 1/2 \leq \beta \leq 1$ があるとする.

$$\psi_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2),\ \psi_1, \psi_2 \in \Psi_2$$

のとき

$$\psi_{\alpha,\beta} = \psi_1 = \psi_2 \ \ ([0,\alpha] \cup [\beta,1])$$

である. 実際に, 任意の $t \in [0,\alpha]$ に対して, $\psi_{\alpha,\beta} = 1-t$ で $\max\{1-t,t\} \leq \psi_1(t)$ である.

$$1-t > \psi_1(t)$$

とすると

$$1-t < \psi_2(t)$$

となり矛盾を生じる. したがって $\psi_1 = \psi_2 = \psi_{\alpha,\beta}$ である. $t \in [\beta,1]$ の場合も同様に示せる. また, 任意の $t \in [\alpha,\beta]$ に対して,

$$\psi_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2}(\psi_1(t) + \psi_2(t))$$

となり, ψ_1, ψ_2 は凸関数より

$$\psi = \psi_1 = \psi_2.$$

よって, $\psi_{\alpha,\beta}$ は Ψ_2 の端点である. □

3 ミルマンの定理を用いた直接的な証明

A をバナッハ空間の部分集合としたとき, $\mathrm{co}(A)$ と $\overline{\mathrm{co}}(A)$ をそれぞれ A の凸包と閉凸包とする.

以下では, $E = \{\psi_{\alpha,\beta} : 0 \leq \alpha \leq 1/2 \leq \beta \leq 1\}$ とする. 証明の本質的な部分は $\mathrm{ext}(\Psi_2) \subset E$ を示すところである. また, これを示す上で次の定理が重要な役割を果たす.

Theorem 3.1 (Milman の定理). *X をバナッハ空間とし, K を $\overline{\mathrm{co}}(K)$ がコンパクトとなるような X のコンパクトな部分集合とすると, $\mathrm{ext}(\overline{\mathrm{co}}(K)) \subset K$ を満たす.*

このことから次を示せば十分である.

(i) Ψ_2 が $C[0,1]$ でコンパクト,

(ii) E が Ψ_2 の閉部分集合,

(iii) $\Psi_2 = (\overline{\mathrm{co}}(E))$.

上が成り立つとき, ミルマンの定理の結果から直接的に $\mathrm{ext}(\Psi_2) \subset E$ を得る.

Proof. (i) $\psi \in \Psi_2$ をとる. $\|\psi\|_\infty = 1$ であり, ψ の凸性から, 任意の $s, t \in [0,1]$ に対して,

$$-1 \le \psi'_R(0) \le \frac{\psi(s) - \psi(t)}{s - t} \le \psi'_L(1) \le 1$$

が成り立つ. よって ψ は 1-リプシッツ連続である. したがって Ψ_2 は一様有界かつ同程度連続であり, アスコリ・アルツェラの定理から Ψ_2 は $C[0,1]$ で相対コンパクトである.

ここで, (ψ_n) を $\psi \in C[0,1]$ に収束する Ψ_2 の点列とすると, 任意の $s, t \in [0,1], \lambda \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}\psi(\lambda s + (1-\lambda)t) &= \lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda s + (1-\lambda)t) \\ &\le \lim_{n\to\infty} \lambda\psi_n(s) + (1-\lambda)\psi_n(t) \\ &= \lambda\psi(s) + (1-\lambda)\psi(t)\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって ψ は凸関数である. さらに, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $\max\{1 - t, t\} \le \psi(t) \le 1$ が成り立つので $\psi \in \Psi_2$ となる. したがって Ψ_2 はコンパクトである.

(ii) $0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1/2 \le \beta_1, \beta_2 \le 1$ とすると

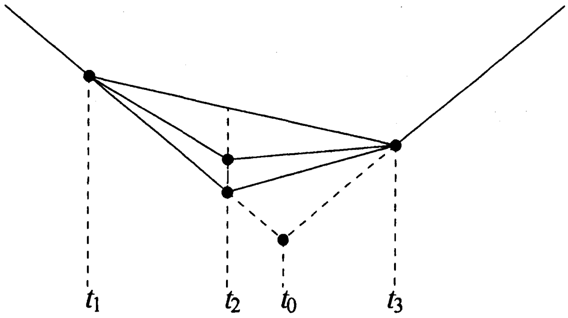
$$\begin{aligned}\|\psi_{\alpha_1,\beta_1} - \psi_{\alpha_2,\beta_2}\|_\infty &= \max\{|(\psi_{\alpha_1,\beta_1} - \psi_{\alpha_2,\beta_2})(\alpha_0)|, |(\psi_{\alpha_1,\beta_1} - \psi_{\alpha_2,\beta_2})(\beta_0)|\} \\ &\le 2\max\{|\alpha_1 - \alpha_2|, |\beta_1 - \beta_2|\}\end{aligned}$$

ここで, $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\beta_0 = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ とする. 実際に, $\alpha_1 \le \alpha_2$ のとき

$$\begin{aligned}|(\psi_{\alpha_1,\beta_1} - \psi_{\alpha_2,\beta_2})(\alpha_0)| &= |(\psi_{\alpha_1,\beta_1} - \psi_{\alpha_2,\beta_2})(\alpha_2)| \\ &\le |\psi_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2) - \psi_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_1)| + |\psi_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_1) - \psi_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_2)| \\ &\le 2(\alpha_2 - \alpha_1)\end{aligned}$$

となる. 同様に β の場合も確かめることができる. これより E の閉性は容易に示される.

(iii) すべての区分的線形関数が $\mathrm{co}(E)$ に含まれることを示す. $n \le 3$ に対して n 本からなるすべての区分的線形関数が $\mathrm{co}(E)$ に含まれることは容易にわかる. $n \ge 3$ に対して n 本からなるすべての Ψ_2 の元が $\mathrm{co}(E)$ に含まれるとする. このとき $n+1$ 本からなる任意の関数 ψ がまた $\mathrm{co}(E)$ に含まれることを示す. ψ の成分である 4 本の連続した線分をとる. その線分を左から m_1, m_2, m_3, m_4 とする. l_i を m_i を含む直線全体とする. $P_i = (t_i, \psi(t_i))$ を直線 l_i と l_{i+1} の交点とする. ここで l_1, l_4 の交点 $(t_0, l_1(t_0))$ は $t_0 \in (t_1, t_3)$ であることに注意する. $\psi^{(1)}$ を $[t_1, t_3]$ の外側で ψ と一致し, $[t_1, t_3]$ で, 線分 $[P_1, P_3]$ で与えられるものとする. さらに $\psi^{(2)}$ を $t_2 < t_0$ のとき $[t_1, t_3]$ の外側で ψ と一致し, $[t_1, t_3]$ で, $[P_1, (t_2, l_1(t_2))]$ と $[(t_2, l_1(t_2)), P_3]$ の 2 つの線分で与えられるものとする. また, $t_2 \ge t_0$ のとき, $[t_1, t_3]$ の外側で ψ と一致し, $[t_1, t_3]$ で, $[P_1, (t_2, l_4(t_2))]$ と $[(t_2, l_4(t_2)), P_3]$ の 2 つの線分で与えられるものとする.



そのとき $\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ は n 本からなる線分であり, ψ はそれぞれの凸結合で表すことができる. したがって $\psi \in \mathrm{co}(E)$ が示せた.

最後に Dini の定理により区分的線形関数が Ψ_2 で稠密であることがわかる. したがって, $\Psi_2 = \overline{\mathrm{co}}(E)$ を得る. □

参考文献

[1] J. Alonse, *Any two-dimensional normed space is a generalized Day-James space*, J. Inequal. Appl., **2011**, 2011:2, 3 pp.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[3] R. Grząślewicz, *Extreme symmetric norms on* $\mathbb{R}^2$, Colloq. Math. **56** (1988), 147–151.

[4] R. Grząślewicz, *Extreme norms on* $\mathbb{R}^n$, Monatsh. Math. **110** (1990), 257–259.

[5] N. Komuro, K.-S. Saito and K.-I. Mitani, *Extremal structure of the set of absolute norms on* $\mathbb{R}^2$ *and the von Neumann-Jordan constant*, J. Math. Anal. Appl. **370** (2010), 101–106.

[6] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[7] W. Nilsrakoo and S. Saejung, *The James constant of normalized norms on* $\mathbb{R}^2$, J. Inequal. Appl., **2006**, Art. ID 26265, 12 pp.

[8] K.-S. Saito, K.-I. Mitani and N. Komuro, *A note on extreme norms on* $\mathbb{R}^2$, Hokkaido Math. J. **42** (2013), 1–9.

[9] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515–532. R. Tanaka and K.-S. Saito, *Characterization of regular norms on* $\mathbb{R}^2$, Nihonkai Math. J., **24** (2013), 103–120