数理解析研究所講究録
第 1935 巻 2015 年 89-94



# Geometric Mean and Norm Schwarz Inequality

北海道大学（名誉教授）　安藤　毅 (Tsuyoshi Ando)
Hokkaido University (Emeritus)
Email: ando@es.hokudai.ac.jp

この講演の内容は Annals of Functional Analysis [1] に出版される予定なので，以下では要約にとどめる．

## 1. Introduction

Schwarz の不等式は $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ と $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ にたいして

$$|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\overline{\eta_j}| \leq \sqrt{\{\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\}\cdot\{\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^2\}}$$

主張するものである．これは $2\times 2$ 行列の positivity として捉えることができる

$$\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\overline{\xi_j} & \sum_{j=1}^{n}\xi_j\overline{\eta_j}\\ \sum_{j=1}^{n}\eta_j\overline{\xi_j} & \sum_{j=1}^{n}\eta_j\overline{\eta_j}\end{bmatrix}\geq 0.$$

この positivity は Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の bounded linear operator の組 $\{X_1,\ldots,X_n\}$ と $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ に対しても成り立つ：

$$\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}X_jX_j^* & \sum_{j=1}^{n}X_jY_j^*\\ \sum_{j=1}^{n}Y_jX_j^* & \sum_{j=1}^{n}Y_jY_j^*\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\begin{bmatrix}X_j\\ Y_j\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_j\\ Y_j\end{bmatrix}^*\geq 0.$$

これから

$$\|\sum_{j=1}^{n}X_jY_j^*\|\leq\sqrt{\|\sum_{j=1}^{n}X_jX_j^*\|\cdot\|\sum_{j=1}^{n}Y_jY_j^*\|}$$

が出る．ここで $\|\cdot\|$ は operator norm である．

われわれはこれを $2\times 2$ operator matrix に関しての一般的な関係

$$\begin{bmatrix}A & B\\ B^* & C\end{bmatrix}\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{\|A\|\cdot\|C\|}\geq\|B\|$$

と捉えよう．一方 $A,C\geq 0$ にたいしては一般に geometric mean $A\sharp C$ が定義されており

$$\sqrt{\|A\|\cdot\|C\|}\geq\|A\sharp C\|$$

となっている．

この講演では, $A,B,C$ に，または単独に $B$ に，如何なる条件があれば

$$\begin{bmatrix}A & B\\ B^* & C\end{bmatrix}\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \|A\sharp C\|\geq\|B\|$$

が成り立つかを考察する．右側の不等式を Norm Schwarz inequality と言おう．

**2. Operator matrix と geometric mean** $A, B, C, \dots$ は Hilbert space $\mathcal{H}$ の bounded linear operator とする．特に $I$ は identity operator である．以下はよく知られた事実である．

**Lemma 1.** (参照 [2, Chapter 1]) 以下の性質は同値である．

1. $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0,$

2. $\begin{bmatrix} C & B^* \\ B & A \end{bmatrix} \geq 0,$

3. $A, C \geq 0$ で $B = A^{1/2}WC^{1/2} \quad \exists \ \|W\| \leq 1,$

4. $A \geq 0, \ C \geq B^*(A + \epsilon I)^{-1}B \quad \forall \, \epsilon > 0,$ ここで $A > 0$ のときは $B^*(A+\epsilon I)^{-1}B$ を単に $B^*A^{-1}B$ で置き換えてよい．

$A, C > 0$ の geometric mean $A\sharp C$ は

$$A\sharp C := A^{1/2} \cdot (A^{-1/2}CA^{-1/2})^{1/2} \cdot A^{/2}$$

で定義される．この形からは見通せないが geometric mean は $A, C$ に関して symmetric になる．更に以下のような性質がある．

**Lemma 2.** (参照 [2, Chapter 3]) $A, C > 0$ の geometric mean は以下のような性質を持つ．

1. $A\sharp C = C\sharp A,$

2. $AC = CA \implies A\sharp C = (AC)^{1/2},$

3. $A^{-1}\sharp C^{-1} = (A\sharp C)^{-1},$

4. $(\alpha A)\sharp(\beta C) = \sqrt{\alpha\beta}(A\sharp C) \quad \forall \, \alpha, \beta > 0,$

5. $A \longmapsto A\sharp C$ は order preserving,

6. $A\sharp C = \max\left\{X \geq 0; \begin{bmatrix} A & X \\ X & C \end{bmatrix} \geq 0\right\},$

7. $(X^*AX)\sharp(X^*CX) \geq X^*(A\sharp C)X \quad \forall \, X.$

(5) の単調性より，一般の $A, C \geq 0$ に対しては

$$A\sharp C := \lim_{\epsilon \downarrow 0}(A + \epsilon I)\sharp(C + \epsilon I)$$

で定義すると

$$\|A\sharp C\| = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \|(A + \epsilon I)\sharp(C + \epsilon I)\|.$$

また

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \iff \begin{bmatrix} A+\epsilon I & B \\ B^* & C+\epsilon I \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall\, \epsilon > 0$$

である.

この事から，Norm Schwarz inequality の考察の範囲では $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$ と書いたときは，$A, C > 0$ を仮定しても一般性を失われない．Lemma 1 より

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies C \geq B^*A^{-1}B, \quad \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & B^*A^{-1}B \end{bmatrix} \geq 0$$

であり，また geometric mean の定義より

$$A\sharp(B^*A^{-1}B) = A^{1/2} \cdot |A^{-1/2}BA^{-1/2}| \cdot A^{1/2}$$

となる．ここで $X$ の modulus $|X|$ は $|X| := (X^*X)^{1/2}$ で定義される．これから $B$ に関する条件

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \|A\sharp C\| \geq \|B\| \tag{†}$$

は

$$\|A^{1/2} \cdot |A^{-1/2}BA^{-1/2}| \cdot A^{1/2}\| \ \geq \|B\| \quad \forall\, A > 0. \tag{‡}$$

という条件と同じ事になる.

## 3. (‡) のための必要条件

一般に次ぎ成りたつ.

**Lemma 3.** $\|A^{-1/2}BA^{1/2}\| \geq \|A^{1/2} \cdot |A^{-1/2}BA^{-1/2}| \cdot A^{1/2}\| \quad \forall\, A > 0,\ B.$

ここで operator $X$ の spectral radius $r(X)$ は norm を使って，２つの立場からの記述が可能である：([3, pages 48, 82])

$$r(X) = \lim_{n\to\infty} \|X^n\|^{1/n} = \inf\{\|A^{-1}XA\|; A > 0\}.$$

これから直ちに

$$r(X) \leq \|X\|, \quad r(XY) = r(YX) \quad \forall\, X, Y$$

が判る．$r(X) = \|X\|$ な $X$ を normaloid という．selfadjoint また normal operator は normaloid である．(本によっては $r(X) = \sup\{|\langle a|Xa\rangle|;\ \|a\| = 1, a \in \mathcal{H}\}$ のものを normaloid と呼ぶものもある.)

**Theorem 4.** $B$ に対して (‡) が成り立てば，$B$ は normaloid である.

これは (‡) と Lemma 3 から

$$\|A^{-1/2}BA^{1/2}\| \geq \|A^{1/2} \cdot |A^{-1/2}BA^{-1/2}| \cdot A^{1/2}\| \geq \|B\|$$

となっているからである.

この逆としては

**Theorem 5.** $B$ が normaloid のときは, $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \|A^{1/2}C^{1/2}\| \geq \|B\|$.

これは Lemma 1 を使って

$$\begin{aligned} \|B\| &= r(B) = r(A^{1/2}WC^{1/2}) = r(WC^{1/2}A^{1/2}) \\ &\leq \|C^{1/2}A^{1/2}\| = \|A^{1/2}C^{1/2}\| \end{aligned}$$

より判る.

**3. 充分条件** (†) までも行かないが, $A, B, C$ への条件で $\|A\sharp C\| \geq \|B\|$ を保証するものを考えよう.

**Lemma 6.** $\begin{bmatrix} A_j & B \\ B^* & C_j \end{bmatrix} \geq 0 \quad (j = 1, 2) \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_1\sharp A_2 & B \\ B^* & C_1\sharp C_2 \end{bmatrix} \geq 0.$

これは Lemma 1 より $B^*A_1^{-1}B \leq C_j$ $(j = 1, 2)$ であるから Lemma 2

$$\begin{aligned} B^*(A_1\sharp A_2)^{-1}B &= (B^*A_1^{-1}\sharp A_2^{-1})B \\ &\leq (B^*A_1^{-1}B)\sharp(B^*A_2^{-1}B) \leq C_1\sharp C_2 \end{aligned}$$

から出る.

これから直ちに判ることは, 一般に次が成り立つ:

$$\sqrt{\|A\sharp(B^*A^{-1}B)\| \cdot \|A\sharp(BA^{-1}B^*\|} \geq \|B\| \quad \forall\, A > 0,\ B.$$

Lemma 6 は次ぎの形で使用されるのが重要である.

**Theorem 7.** $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \|A\sharp C\| \geq \|B\|.$

これは, 2番目の不等式は $\begin{bmatrix} C & B \\ B^* & A \end{bmatrix} \geq 0$ となるからである.

$B$ が selfadjoint のときは $B = B^*$ なので Theorem 7 が適用できるが, Lemma 6 を直接使えば, Lemma 2 の $B \geq 0$ のときの拡張として次ぎがでる.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \geq 0,\ B = B^* \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} A\sharp C & B \\ B & A\sharp C \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad A\sharp C \geq \pm B.$$

背理法を使うと次もすぐ判る.

**Theorem 8.** $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$, $\alpha B$ が unitary $\exists\, \alpha > 0 \quad \Longrightarrow \quad \|A\sharp C\| \geq \|B\|.$

最後に $A, B, C$ の相互条件で $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \|A\sharp C\| \geq \|B\|$ を保証するものを挙げよう.

**Theorem 9.** 以下の条件

1. $AB = BA$,
2. $B^*A^{-1}B = BA^{-1}B^*$,
3. $C = \alpha A \quad \exists\, \alpha > 0$

の中の 1 つが満たされれば, $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \|A\sharp C\| \geq \|B\|$.

**4. Normal operator は (‡) を満たすか？** 前節の考察では selfadjoint operator や unitary operator は (‡) を満たすことが判った，それでは normal operator はどうかが問題になる．ここでは $\dim(\mathcal{H}) = n < \infty$ すなわち $A, B, C, \ldots \in \mathbb{M}_n$ の場合を考察しよう.

$$D := A^{1/2} \cdot |A^{-1/2}BA^{-1/2}| \cdot A^{1/2} \text{ として } \|D\| \geq \|B\| \text{ となるかが問題である.}$$

$B$ と $D$ の関係は $DA^{-1/2}D = B^*A^{-1}B$ であるので，$S := A^{-1}$ として

$$B \text{ normal}, \ S > 0, \ D \geq 0, \ DSD = B^*SB \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \|D\| \geq \|B\|$$

が問題である．われわれは brute force で $n = 2$ のときは肯定的に解決することができた.

**Theorem 10.** normal $B \in \mathbb{M}_2$ は (‡) と同値な次ぎを満たす：

$$0 \leq S, D \in \mathbb{M}_2, \quad DSD = B^*SB \quad \Longrightarrow \quad \|D\| \geq \|B\|. \qquad (\natural)$$

しかしここでの方法は $n \geq 3$ の場合には適用できないので，別の路を探そう．次ぎのよく知られた事実を挙げておこう.

**Lemma 11.** $X \in \mathbb{M}_n$ に関して以下の性質は同値である.

1. $X$ は unitary に similar, すなわち $T^{-1}XT = U$ unitary $\exists\, T$ invertible,
2. $X$ は unitary に positively similar, すなわち
   $T^{-1}XT = U$ unitary $\exists\, T > 0$,
3. $X$ のどの eigenvector $\xi$ も unimodular で semi-simple, すなわち
   $|\xi| = 1, \ \ker(X - \xi I) = \ker((X - \xi I)^2)$,
4. $\sup_{-\infty<k<\infty} \|X^k\| < \infty$,
5. $\sup_{-\infty<k<\infty} \mathrm{Tr}\Big((X^*)^k X^k\Big) < \infty$.

本題に戻って，$B$ が normal, $D \geq 0$ のときは $DSD = B^*SB$ から $\ker(B) = \ker(D)$ がでるので，以下では $B$ は normal invertible, $D > 0$ としてよい．

$DSD = B^*SB$ は $(S^{1/2}BD^{-1}S^{-1/2})^*(S^{1/2}BD^{-1}S^{-1/2}) = I$ のことであるから，問題は

$$B \text{ normal},\ D > 0,\ BD^{-1} \text{ unitary に similar} \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \|D\| \geq \|B\|$$

ということになるので，Lemma 11 を使うと, normal $B$, $D > 0$ にたいして,

$$BD^{-1} \text{ の eigenvalue がすべて unimodular, semi-simple} \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \|D\| \geq \|B\|.$$

とも，また

$$\sup_{-\infty<k<\infty} \mathrm{Tr}\Big((D^{-1}B^*)^k(BD^{-1})^k\Big) < \infty \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \|D\| \geq \|B\|$$

とも言い表すことができる．しかし，これ等の言い換えが有効かどうかはまだ判らない．

## 参考文献


[1] T. Ando, *Geometric mean and norm Schwarz inequality,* Annal. Funct. Anal. (to appear).

[2] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices,* Princeton Univ sity Press, Princeton, 2007.

[3] P. Halmos, *A Hilbert Space Problems Book,* 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1989.