数理解析研究所講究録
第 1939 巻 2015 年 95-103

幾何ランダムウォーク上のアメリカン・ダブルエキササイズ・プット・オプションに対する値関数の解析によるアプローチ

Value Function Approach for American Double Exercise Put Option on Geometric Random Walk

大石 潤 *1, 笛吹 祐希 *1, 穴太 克則 *2
*1: 芝浦工業大学大学院 理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門
*2: 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科

概要： 幾何ランダムウォーク上の 2 回権利行使可能なアメリカン・プット・オプションの最適複数回停止問題の最適停止時刻を, 最適値関数の解析により解く. このアプローチは, マルコフ過程上の最適停止問題の一般理論を用いていない.

1. 幾何ランダムウォーク上のアメリカン・プット・オプション

株価の変動過程 S_n を,

$$S_n := S_0 \lambda^{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n} \tag{1}$$

とする. ここで, $\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\rho_i = b) = p, \mathbb{P}(\epsilon_i = -1) = \mathbb{P}(\rho_i = a) = q$ であり, $\lambda > 1, a = 1/\lambda - 1, b = \lambda - 1$ である. また, $S_0 \in E := \{\lambda^k, k = 0, \pm 1, \cdots\}$ とすると, $S_n \in E, n \geq 1$ である. この株価変動過程 S_n は E 上の幾何ランダムウォークである. このとき, 無裁定かつ完備であり, リスク中立測度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ が存在することが知られており, 以下となる (参考 [4]).

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\epsilon_i = 1) = \widetilde{\mathbb{P}}(\rho_i = b) = \frac{r - a}{b - a} =: p, \quad \widetilde{\mathbb{P}}(\epsilon_i = -1) = \widetilde{\mathbb{P}}(\rho_i = 1) = \frac{b - r}{b - a} =: q. \tag{2}$$

$$p = \frac{r - (\lambda^{-1} - 1)}{\lambda - 1 - (\lambda^{-1} - 1)} = \frac{(1 + r) - \lambda^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}} = \frac{\alpha^{-1} - \lambda^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \tag{3}$$

$$q = \frac{\lambda - 1 - r}{\lambda - 1 - (\lambda^{-1} - 1)} = \frac{\lambda - (1 + r)}{\lambda - \lambda^{-1}} = \frac{\lambda - \alpha^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}}. \tag{4}$$

ただし, $\alpha = (1 + r)^{-1}$ である.

原資産価格が幾何ランダムウォーク S_n に従うアメリカン・プット・オプションの最適停止問題を考える. ここでは「権利行使」のことを「停止」と呼ぶこととする. $V_n^{[1]}(x)$ はオプションの満期時刻 N までの残り期間 n 期で, その時点での原資産価格が x であるときの最大期待利得とする. すなわち,

$$V_n^{[1]}(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq n} \widetilde{\mathbb{E}}_x \left[\alpha^\tau (K - S_\tau)^+ \right], \quad n = N, N-1, \cdots, 0. \tag{5}$$

ただし, $0<\alpha<1$, $K>0$ は権利行使価格である. このとき, 以下の最適方程式が成り立つ.

$$\begin{aligned} V_n^{[1]}(x) &= \max\left\{(K-x)^+, \alpha\widetilde{\mathbb{E}}_x\left[V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1})\right]\right\} \\ &= \max\left\{(K-x)^+, \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x)+\alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\right\}, \quad n=N,N-1,\cdots,1. \end{aligned} \tag{6}$$

$$V_0^{[1]}(x) = (K-x)^+. \tag{7}$$

定理 1.1 最適停止時刻 $\tau^{[1]*}$ は,

$$\tau^{[1]*} := \inf\{n\in\{0,1,\cdots,N\}: S_n \le x_n^{[1]*}\}. \tag{8}$$

ここで, $x_n^{[1]*} := \inf\{x\in E: V_n^{[1]}(x)=(K-x)^+\}$ であり, $K =: x_0^{[1]*} \ge x_1^{[1]*} \ge \cdots \ge x_N^{[1]*} \ge 0$.

インデックスを入れ替えて, $y_n^{[1]*} = x_{N-n}^{[1]*}$ とする. このとき,

$$0 \le y_0^{[1]*} \le \cdots \le y_N^{[1]*} = K. \tag{9}$$

最適停止領域 $D^{[1]}$ は次であり, 図 1 のようになる.

$$D^{[1]} = \{(n,y)\in\{0,1,\cdots,N\}\times E: y \le y_n^{[1]*}\}. \tag{10}$$

すなわち, 原資産価格が最適停止領域 $D^{[1]}$ 内に初めて到達した時刻が最適停止時刻となる.

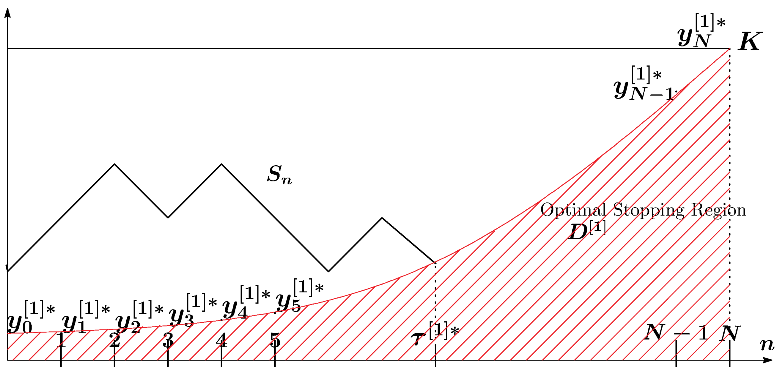

図 1: **最適停止領域** $D^{[1]}$

定理 1.1 を証明するため, 最適値関数 $V_n^{[1]}(x)$ の性質を調べる.

補題 1.1
(i) $x \longmapsto V_n^{[1]}(x)$ は連続, 非増加, convex.
(ii) $n \longmapsto V_n^{[1]}(x)$ は増加で, $V_0^{[1]}(x) \ge 0$.

(証明) (i) n に対する帰納法によって示す.

(a) $n=0$ のとき, $V_0^{[1]}(x)=(K-x)^+$ は, 明らかに x について連続, 非増加, convex である.

(b) $n-1$ のとき, $V^{[1]}_{n-1}(x)$ は x について連続, 非増加, convex であると仮定する.
最適方程式より,

$$V^{[1]}_n(x) = \max\{(K-x)^+, \alpha p V^{[1]}_{n-1}(\lambda x) + \alpha q V^{[1]}_{n-1}(\lambda^{-1}x)\}. \tag{11}$$

$(K-x)^+$ は (a) より連続, 非増加, convex であり, $\alpha p V^{[1]}_{n-1}(\lambda x) + \alpha q V^{[1]}_{n-1}(\lambda^{-1}x)$ は仮定より連続, 非増加, convex である. 2 つの連続関数の max は連続, 非増加, convex であるため, $V^{[1]}_n(x)$ は x について連続, 非増加, convex.

$(a), (b)$ より $V^{[1]}_n(x)$ は x について連続, 非増加, convex.
(ii) (7) 式より, $V^{[1]}_0(x) \geq 0$. また, (5) 式より,

$$V^{[1]}_n(x) = \sup_{0\leq\tau\leq n} \mathbb{E}_x\left[\alpha^\tau (K-S_\tau)^+\right] \leq \sup_{0\leq\tau\leq n+1} \mathbb{E}_x\left[\alpha^\tau (K-S_\tau)^+\right] = V^{[1]}_{n+1}(x). \tag{12}$$

よって, $V^{[1]}_n(x)$ は n について増加である. □

補題 1.2 各 $n = N, N-1, \cdots, 0$ に対して,

$$\lim_{x\downarrow 0} V^{[1]}_n(x) = K. \tag{13}$$

(証明) n についての帰納法によって示す. $\lim_{x\downarrow 0} V^{[1]}_n(x) = V^{[1]}_n(0+)$ とする.
(a) $n=0$ のとき, $K>0$ だから, $V^{[1]}_0(0+) = (K-0+)^+ = K$.
(b) $n-1$ のとき $V^{[1]}_{n-1}(0+) = K$ と仮定する. 最適方程式より,

$$\begin{aligned} V^{[1]}_n(x) &= \max\{(K-0+)^+, \alpha\left(pV^{[1]}_{n-1}(0+) + qV^{[1]}_{n-1}(0+)\right)\} \\ &= \max\{K, \alpha(p+q)K\} = \max\{K, \alpha K\} = K. \end{aligned} \tag{14}$$

$(a), (b)$ より $V^{[1]}_n(0+) = K$. □

以上の補題を用いて, 定理 1.1 を証明する.

(定理 1.1 の証明) まず, $n \geq 0$ を固定する. 最適方程式より, $V^{[1]}_n(x) \geq (K-x)^+$. 更に, 補題 1.1(i), 補題 1.2 より $x^{[1]*}_n$ が存在し (図 2 参照), τ^* は最適停止時刻となる. また, 補題 1.1(ii) より, $V^{[1]}_n(x) > V^{[1]}_{n-1}(x)$ なので, $x^*_n \geq x^*_{n-1}$ となる (図 3 参照).

□

2. 幾何ランダム・ウォーク上の 2 回権利行使可能なアメリカン・プット・オプション

原資産価格が幾何ランダムウォークに従い, 満期までに 2 回権利行使が可能なアメリカン・プット・オプションの最適停止問題を考える. $V^{[2]}_n(x)$ を満期 N までの残り期間が n で, 原資産価格が x, 残り

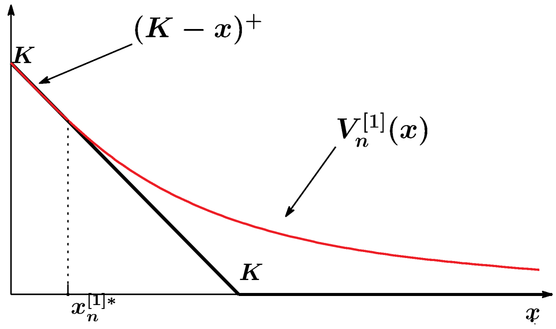

図 2: 閾値 $x_n^{[1]*}$

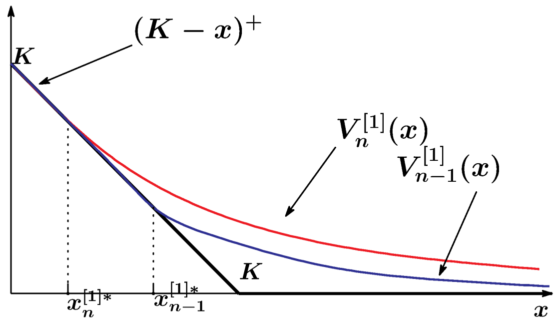

図 3: 閾値 $x_n^{[1]*}$, $x_{n-1}^{[1]*}$

権利行使回数が2回であるときの最大期待利得とする．すなわち，

$$V_n^{[2]}(x) = \sup_{0\le\tau_1<\tau_2\le n} \widetilde{\mathbb{E}}_x\left[\alpha^{\tau_1}(K-S_{\tau_1})^+ + \alpha^{\tau_2}(K-S_{\tau_2})^+\right], n = N, N-1, \cdots, 0. \tag{15}$$

ただし，$0<\alpha<1, K>0$ で，一度目の権利行使時刻を τ_1，二度目の権利行使時刻を τ_2 とする．このとき，最適方程式は，$V_0^{[2]}(x) = (K-x)^+$ であり，$n = N, \cdots, 1$ に対しては以下である．

$$V_n^{[2]}(x) = \max\{(K-x)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x), \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x)\}. \tag{16}$$

次を定義する．

$$\Delta V_n^{[2]}(x) := V_n^{[2]}(x) - V_n^{[1]}(x), \quad f_n^{[2]}(x) := \alpha\widetilde{\mathbb{E}}_x\left[\Delta V_{n-1}^{[2]}(S_{n-1})\right]. \tag{17}$$

定理 2.1 残り2回権利行使可能なときの最適停止時刻 $\tau^{[2]*}$ は，

$$\tau^{[2]*} := \inf\{n \in \{0, 1, \cdots, N\} : S_n \le x_n^{[2]*}\}. \tag{18}$$

ここで，$x_n^{[2]*} := \inf\{x \in E : V_n^{[2]}(x) = (K-x)^+\}$ であり，$K =: x_0^{[2]*} \ge x_1^{[2]*} \ge \cdots \ge x_N^{[2]*} \ge 0$.

インデックスを入れ替えて，$y_n^{[2]*} = x_{N-n}^{[2]*}$ とする．このとき，

$$0 \le y_0^{[2]*} \le \cdots \le y_N^{[2]*} = K. \tag{19}$$

残り2回権利行使可能なときの最適停止領域 $D^{[2]}$ は,

$$D^{[2]} = \{(n,y) \in \{0,1,\cdots,N\} \times E : y \leq y_n^{[2]*}\}, \tag{20}$$

である (図4参照). すなわち, 原資産価格が最適停止領域 $D^{[2]}$ 内に初めて到達した時刻が1回目の最適停止時刻となる.

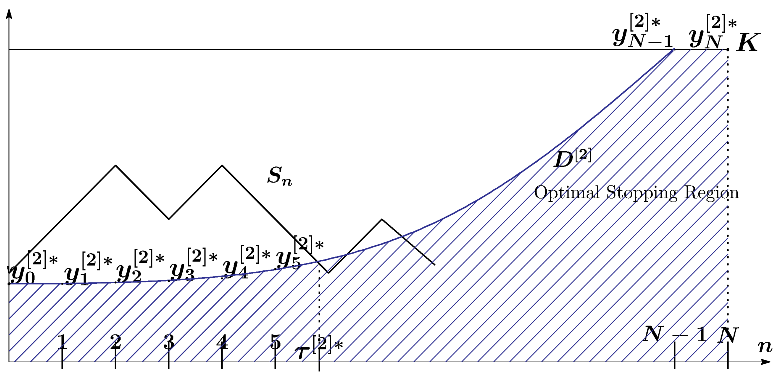

図 4: 最適停止領域 $D^{[2]}$

最適停止問題を解くため, 最適値関数 $V_n^{[2]}(x)$ とその差分 $\Delta V_n^{[2]}(x)$ の性質を調べる.

補題 2.1
(i) $x \longmapsto \Delta V_n^{[2]}(x)$ は連続, 非増加, convex.
(ii) $\Delta V_n^{[2]}(x) \geq 0$.

(証明) (i) n についての帰納法によって示す.
(a) $n=0$ のとき,

$$\Delta V_0^{[2]}(x) = V_0^{[2]}(x) - V_0^{[1]}(x) = (K-x)^+ - (K-x)^+ = 0. \tag{21}$$

定数0は連続で非増加, convex な関数といえる.
(b) $n-1$ のとき, $\Delta V_n^{[2]}(x)$ は, x について連続, 非増加, convex と仮定する.
このとき,

$$\begin{aligned}\Delta V_n^{[2]}(x) &= V_n^{[1]}(x) - V_n^{[1]}(x)\\ &= \max\{(K-x)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x), \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x)\}\\ &\quad - \max\{(K-x)^+, \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\}.\end{aligned} \tag{22}$$

ここで, 便宜上,

$$A := (K-x)^+,\ B := \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x),\ C := \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x), \tag{23}$$

とすると, (22) 式は,

$$\Delta V_n^{[2]}(x) = \max\{A+B, C\} - \max\{A, B\} \tag{24}$$

$$= \begin{cases} (\text{ア})\ A+B-A & = B = \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x), \\ (\text{イ})\ A+B-B & = A = (K-x)^+, \\ (\text{ウ})\ C-A, & \\ (\text{エ})\ C-B & = \alpha p \left(V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda x)\right) + \alpha q \left(V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\right) \\ & = \alpha p \Delta V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q \Delta V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x), \end{cases} \tag{25}$$

となる. (ア), (イ) は補題 1.1(i) より連続, 非増加, convex であり, (エ) は仮定より連続, 非増加, convex である. ここで, (ウ) となる場合は存在しないことを示す.

$A \geq B$ とする. このとき,

$$A+B = (K-x)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x) \geq 2\left(\alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\right) \tag{26}$$

となる. ところで, $^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} 2V_{n-1}^{[1]}(x) &= 2 \sup_{0\leq\tau\leq n-1} \mathbb{E}_x\left[\alpha^\tau (K-S_\tau)^+\right] \\ &= \sup_{0\leq\tau_1\leq\tau_2\leq n-1} \mathbb{E}_x\left[\alpha^{\tau_1}(K-S_{\tau_1})^+ + \alpha^{\tau_2}(K-S_{\tau_2})^+\right] \\ &\geq \sup_{0\leq\tau_1<\tau_2\leq n-1} \mathbb{E}_x\left[\alpha^{\tau_1}(K-S_{\tau_1})^+ + \alpha^{\tau_2}(K-S_{\tau_2})^+\right] = V_{n-1}^{[2]}(x) \end{aligned} \tag{27}$$

であるため, (26) 式は,

$$A+B \geq 2\left(\alpha p V_{n-1}^{[1]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x)\right) \geq \alpha p V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x) = C \tag{28}$$

となる. よって, $A \geq B$ のとき $A+B \geq C$ となるため, (ウ) となる場合は存在しない.

$(a), (b)$ より $\Delta V_n^{[2]}(x)$ は連続, 非増加, convex.

(ii) $n=0$ のとき, (21) 式より $\Delta V_0^{[2]}(x) = 0$. また, $n>0$ のとき, (25) 式 (ア), (イ), (エ) 全ての場合において $\Delta V_n^{[2]}(x) \geq 0$. □

補題 2.2

$$\lim_{x\downarrow 0} V_0^{[2]}(x) = K, \tag{29}$$

$$\lim_{x\downarrow 0} V_n^{[2]}(x) = (1+\alpha)K, \qquad n = N, N-1, \cdots, 1. \tag{30}$$

(証明) n についての帰納法によって示す.

(a) $n=0$ のとき, $V_0^{[2]}(0+) = (K-0+)^+ = K$.
(b) $n=1$ のとき, (a) および補題 1.2 より,

$$\begin{aligned} V_1^{[2]}(0+) &= \max\{(K-0+)^+ + \alpha p V_0^{[1]}(0+) + \alpha q V_0^{[1]}(0+), \alpha p V_0^{[2]} + \alpha q V_0^{[2]}\} \\ &= \max\{(K-0+)^+ + \alpha pK + \alpha qK, \alpha pK + \alpha qK\} \\ &= \max\{(1+\alpha K), \alpha K\} \\ &= (1+\alpha)K. \end{aligned} \tag{31}$$

(c) $n-1$ のとき $\lim_{x\downarrow 0} V_{n-1}^{[2]}(x) = (1+\alpha)K$ と仮定する. このとき, (b) および補題 1.2 より,

$$\begin{aligned} V_n^{[2]}(0+) &= \max\{(K-0+)^+ + \alpha p V_{n-1}^{[1]}(0+) + \alpha q V_0^{[1]}(0+), \alpha p V_{n-1}^{[2]}(0+) + \alpha q V_{n-1}^{[2]}(0+)\} \\ &= \max\{(K-0+)^+ + \alpha pK + \alpha qK, \alpha p(1+\alpha)K + \alpha q(1+\alpha)K\} \\ &= \max\{(1+\alpha)K, \alpha(1+\alpha)K\} \\ &= (1+\alpha)K. \end{aligned} \tag{32}$$

$(a), (b), (c)$ より示された. □

補題 2.3　$n \longmapsto \Delta V_n^{[2]}(x)$ は増加.

(証明) $\Delta V_n^{[2]}(x)$ に対する割引現在価値過程が優マルチンゲールとなることから成立する. □

以上の補題を用いて, 定理 2.1 を証明する.
(定理 2.1 の証明) まず, n を固定する. 定義より, $f_n^{[2]}(x)$ は,

$$f_n^{[2]}(x) := \alpha\widetilde{\mathbb{E}}_x\left[\Delta V_{n-1}^{[2]}(S_{n-1})\right] = \alpha\{p(V_{n-1}^{[2]}(\lambda x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda x)) + q(V_{n-1}^{[2]}(\lambda^{-1}x) - V_{n-1}^{[1]}(\lambda^{-1}x))\}.$$

このとき, 補題 2.2 より,

$$\lim_{x\downarrow 0} f_n^{[2]}(x) = \alpha\{p((1+\alpha)K - K) + q((1+\alpha)K - K)\} = \alpha^2 K. \tag{33}$$

補題 2.1(i), (33) 式より $x_n^{[2]*}$ が存在し (図 5 参照), $\tau^{[2]*}$ は最適停止時刻となる. 更に, 補題 2.3 より, 全ての n について $x_{n+1}^{[2]*} \le x_n^{[2]*}$(図 6 参照). □

前節の 1 回権利行使可能なアメリカン・プット・オプションの最適停止領域 $D^{[1]}$ と $D^{[2]}$ について, 次が成り立つ.

定理 2.2 最適停止領域 $D^{[1]}, D^{[2]}$ は以下を満たす.

$$D^{[1]} \subseteq D^{[2]}. \tag{34}$$

すなわち, 1 回目の最適停止時刻は原資産価格が最適停止領域 $D^{[2]}$ 内に初めて到達した時刻であり, 2

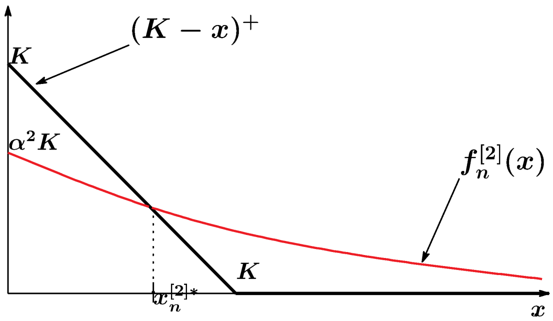

図 5: 閾値 $x_n^{[2]}$

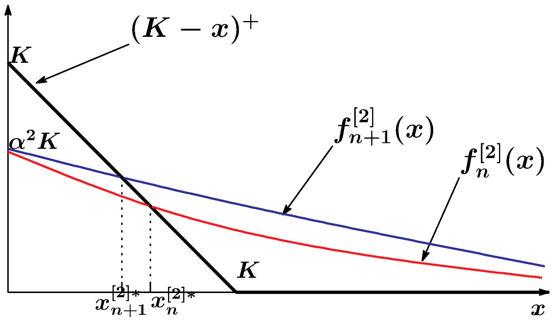

図 6: 閾値 $x_n^{[2]}$ と $x_{n+1}^{[2]}$ の順序

回目の最適停止時刻はその後 $D^{[1]}$ 内に初めて到達した時刻となる (図 7 参照).

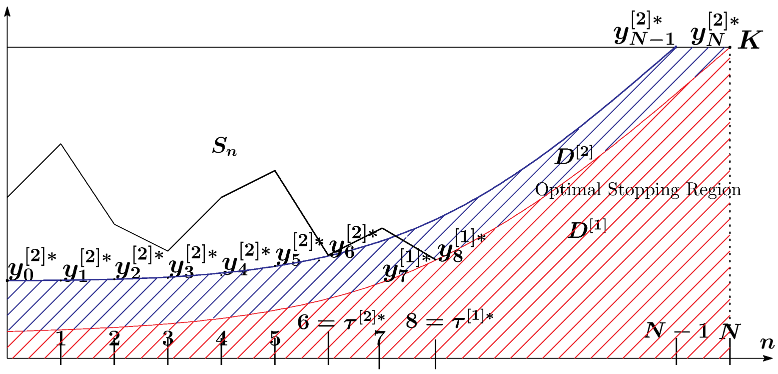

図 7: 最適停止領域 $D^{[1]}$, $D^{[2]}$

(証明) $n = 1, \cdots, N$ について

$$f_n^{[2]}(x) = \alpha \widetilde{\mathbb{E}}_x \left[\Delta V_{n-1}^{[2]}(S_{n-1}) \right] = \alpha \widetilde{\mathbb{E}}_x \left[V_{n-1}^{[2]}(S_{n-1}) - V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) \right]. \tag{35}$$

(27) 式より,

$$\begin{aligned} f_n^{[2]}(x) &\le \alpha \widetilde{\mathbb{E}}_x \left[2V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) - V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) \right] \\ &= \alpha \widetilde{\mathbb{E}}_x \left[V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) \right] \\ &\le \max\{(K-x)^+, \alpha \widetilde{\mathbb{E}}_x \left[V_{n-1}^{[1]}(S_{n-1}) \right]\} = V_n^{[1]}(x). \end{aligned} \tag{36}$$

更に, $x_n^{[1]*} \le x_n^{[2]*}$ より $D^{[1]} \subseteq D^{[2]}$ である (図 8 参照).

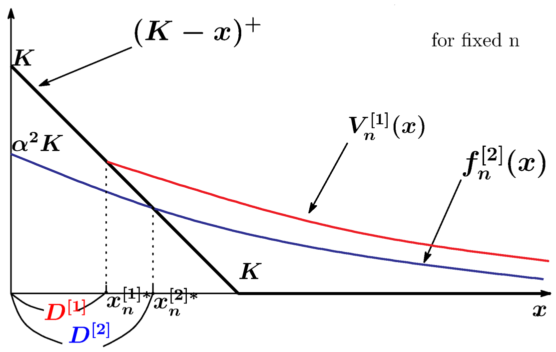

図 8: 最適停止領域 $D^{[1]}$, $D^{[2]}$

3. おわりに

多数回権利行使可能なオプションの最適停止問題も同様のアプローチで解くことができると思われる.

参考文献

[1] 穴太克則, (2000), "タイミングの数理—最適停止問題", 朝倉書店.

[2] 穴太克則, (2014), "講義ノート: 数理ファイナンス", 芝浦工業大学大学院理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門.

[3] N. Meinshausen and B. M. Hambly, (2004), "Monte Carlo Methods for the Valuation of Multiple-Exercise Options", *Mathematical Finance*, Vol. 14, No. 4, 557-583.

[4] G. Peskir and A. N. Shiryaev, (2006), *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*, Birkhauser.

[5] A. N. Shiryaev, (1978), *Optimal Stopping Rules*, Springer.

[6] A. N. Shiryaev, (1999), *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific Publishing.