

ゲームオプションに対するマルチレベルモンテカルロシミュレーションと分析

乾 仁 (Hitoshi INUI)^{1,2} 穴太 克則 (Katsunori ANO)¹

¹ 芝浦工業大学大学院 理工学研究科

Graduate School and Engineering and Science, Shibaura Institute of Technology

² 株式会社 NTT データ・フィナンシャル・ソリューションズ 先端金融工学センター
Advanced Financial Engineering Center, NTT DATA Financial Solutions Corporation

1 はじめに

Black and Scholes(1973)により, ヨーロピアンオプション(満期時点でのみ権利行使可能)の価格公式導出後, 満期を含む任意の時点で権利行使可能なアメリカンオプションが研究されてきた. オプションの買い手による権利行使可能なタイミングは異なるが, 共通して, 売り手による行動は何ら許容されていない.

ゲームオプション(Kifer(2000))はアメリカンスタイルのオプションだが, オプションの買い手による権利行使だけでなく, 売り手がペナルティを支払うことにより, 売り手によるオプション契約のキャンセルが可能である. 売り手に, オプション契約のキャンセルという行動を許容するので, ゲームオプションは, アメリカンオプションの拡張と言える.

ゲームオプションはDynkin(1969)のゼロ・サム確率ゲームを基にして価格付けされるが, ペナルティが十分に大きいとき, 売り手にとって契約のキャンセルは得策ではないと推測される. このとき, ゲームオプション価格はアメリカンオプション価格と一致することが期待される. Suzuki, Seko, and Ano(2001)では, ペナルティが大きくなると, ゲームプットオプション価格はアメリカンプットオプション価格に接近して行き, いずれ一致することを数値的に検証した. 本論文ではこれまでに未発見の報告として, 金利やボラティリティを変化させたときに, ゲームプットオプション価格がアメリカンプットオプション価格に一致することを, 数値実験により分析する.

ゲームオプションの価格付けには, モンテカルロ法を用いる. モンテカルロ法において, 計算精度と計算コストはトレードオフの関係にある. 達成したい計算精度を出来る限り低計算コストで実現したい. これは実務的な要請に合致する思想と考えられる.

Giles(2008)はオプションの価格付けを対象として, マルチレベルモンテカルロ法(Multilevel Monte Carlo Method, MLMC)を提案した. MLMCは, 従来のモンテカルロ法(スタンダードモンテカルロ法, Standard Monte Carlo Method, SMC)と同等精度の推定結果をより少ない計算コストで実現するために提案された新しいモンテカルロ法のフレームワークである.

本論文では, ゲームオプションをMLMCで価格付けすることを提案する. まず, SMCの枠組みの中で

本稿で示される内容ならびに意見は筆者に属し, 株式会社 NTT データ・フィナンシャル・ソリューションズの公式見解を示すものではない.

Suzuki, Seko, and Ano(2001) により提案された手法を, MLMC のフレームワークに載せて実装し, ゲームオプションの価格付け結果を検証する. さらに, Longstaff and Shwartz(2001) で提案されたアメリカンオプションの価格付け手法を基にして, ゲームオプションを価格付けできないか検討し, ゲームオプション用アルゴリズムを作成する. そのアルゴリズムを MLMC, SMC のフレームワークに載せて実装し, 比較分析を試みる. 興味深いことに, ペナルティ, 金利やボラティリティを変化させて行くと, いずれにおいても, ゲームプットオプション価格がアメリカンプットオプション価格と一致する少し前に分散の大小関係が逆転し, MLMCの方がSMCよりも分散が小さくなるという現象が, 数値実験により明らかにされる.

以下, 第2節でゲームオプションの仕組みと価格付け公式を紹介する. 第3節では, Longstaff and Shwartz(2001) を基にしたゲームオプション用アルゴリズムを, SMC の枠組みで記述する. 第4節では, Giles(2008) の MLMC を紹介する. 第5節で, 本節で挙げた分析を実施する. 最後に第6節において, 結論と今後の課題を述べる.

2 ゲームオプション

1種類の無リスク資産と1種類のリスク資産が取り扱われ, 連続時点で市場取引がなされる世界を考える. 無リスク資産過程 $\{B_t\}_{t \geq 0}$ を

$$B_t = B_0 \exp(rt) \quad (1)$$

で定義する. ここで, $r(> 0)$ は無リスク金利である. 一方, リスク資産 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ は確率微分方程式

$$dS_t = S_t(adt + b dW_t) \quad (2)$$

に従うものとする. ただし, $a, b(> 0)$ は定数, $\{W_t\}_{t \geq 0}$ はフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上で定義される標準ブラウン運動である.

ゲームオプションの買い手は, 任意の時点において, 行使価格で売る権利 (プットオプション) / 買う権利 (コールオプション) を行使できる. 反対に, ゲームオプションの売り手は, 任意の時点において, 買い手にペナルティを支払うことによりオプション契約をキャンセルできる.

ここからは, ゲームオプションとして, 危険資産 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ を原資産とするゲームオプットプションを考える. 買い手は, 権利行使することにより $Y_t(S_t)$ を受け取る. 売り手がキャンセルすると買い手は $X_t(S_t)$ を受け取る. 買い手の権利行使と売り手のキャンセルが同時であるときに優先されるのは買い手であり, 買い手は $Y_t(S_t)$ を受け取る. すなわち,

$$X_t(S_t) \equiv (K - S_t)^+ + \delta, \quad 1 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$Y_t(S_t) \equiv (K - S_t)^+, \quad 1 \leq t \leq T, \quad (4)$$

である. ここで, K は権利行使価格, T はオプションの満期, δ は売り手が買い手に支払うペナルティ(正定数)である. また, 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$(x)^+ := \max(x, 0) \quad (5)$$

である. フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ は通常の条件 (usual condition) を満たすと仮定する. つまり, 任意の $t \geq 0$ に対して,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s \quad (6)$$

であり, かつ,

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F} \mid P(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0 \quad (7)$$

である。P の同値マルチンゲール測度 Q を

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}} := \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{a-r}{b} \right)^2 T - \left(\frac{a-r}{b} \right) W_T \right) \quad (8)$$

で定義する。すべての $t \geq 0$ に対して

$$\tilde{W}_t := W_t + \frac{a-r}{b} t \quad (9)$$

とおけば、リスク資産 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ は、確率微分方程式

$$dS_t = S_t (r dt + b d\tilde{W}_t) \quad (10)$$

に従う。ここで、 $\{\tilde{W}_{t \geq 0}\}_t$ はフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, Q)$ 上で定義される標準ブラウン運動である。

さて、時刻 $t \geq 0$ から開始して満期 T までの期間 $[t, T]$ に値をとる停止時刻（キャンセル時刻，行使時刻）全体を

$$\mathcal{T}_{t,T} = \{\gamma : 0 \leq \gamma \leq T\} \quad (11)$$

と書く。 $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$ を売り手のキャンセル時刻， $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$ を買い手の行使時刻とすると、時刻 $\sigma \wedge \tau := \min(\sigma, \tau)$ における買い手のペイオフは、

$$R(\sigma, \tau) := X_\sigma(S_\sigma) 1_{\{\sigma < \tau\}} + Y_\tau(S_\tau) 1_{\{\tau \leq \sigma\}} \quad (12)$$

で与えられる。任意の $t \in [0, T]$ に対して、

$$X_t \geq Y_t \quad (13)$$

が成り立つので、ペイオフ $R(\sigma, \tau)$ の可積分性を仮定するために、

$$E^Q \left[\sup_{0 \leq t \leq T} X_t \right] < \infty \quad (14)$$

とする。このとき、Kifer(2000) は、ゲームオプション価格は次の定理で与えられることを証明している。

定理 2.1 Kifer(2000)

ゲームオプション価格 $\{V_{t,T}^*\}_{0 \leq t \leq T}$ は、右連続過程

$$V_{t,T}^* = \operatorname{ess\,inf}_{\sigma_t \in \mathcal{T}_{t,T}} \operatorname{ess\,sup}_{\tau_t \in \mathcal{T}_{t,T}} E^Q [\exp(-r(\sigma_t \wedge \tau_t - t)) R(\sigma_t, \tau_t) | \mathcal{F}_t] \quad (15)$$

$$= \operatorname{ess\,sup}_{\tau_t \in \mathcal{T}_{t,T}} \operatorname{ess\,inf}_{\sigma_t \in \mathcal{T}_{t,T}} E^Q [\exp(-r(\sigma_t \wedge \tau_t - t)) R(\sigma_t, \tau_t) | \mathcal{F}_t], \quad Q\text{-a.s.} \quad (16)$$

で与えられる。さらに、任意の $0 \leq t \leq T$ に対して、オプションの売り手の最適キャンセル時刻 σ_t^* と買い手の最適行使時刻 τ_t^* は、

$$\sigma_t^* = \operatorname{ess\,inf} \{s \in [t, T] : X_t(S_t) \leq V_t\} \wedge T \quad (17)$$

$$\tau_t^* = \operatorname{ess\,inf} \{s \in [t, T] : Y_t(S_t) \geq V_t\} \wedge T \quad (18)$$

である。

ゲームオプションの価格付けの目的は、 $V_{0,T}^*$ を計算することである。

3 スタンダードモンテカルロ法

ゲームオプションを価格付けするに当たり、2種類のアルゴリズムを使用する。第1節で述べたように、1つは Suzuki, Seko and Ano(2001) の価格付け手法 (SSAM) であり、もう1つは本節で紹介する Longstaff and Schwartz(2001) を基にした価格付け手法 (LSM) である。

本論文では、特に、SMC の枠組みの SSAM, LSM の意で、各々 SMC-SSAM, SMC-LSM と呼ぶ。他方で、第4節で MLMC を紹介するが、MLMC のフレームワークにおける SSAM, LSM を各々 MLMC-SSAM, MLMC-LSM と呼ぶことにする。

		フレームワーク	
		SMC	MLMC
アルゴリズム	SSAM	SMC-SSAM	MLMC-SSAM
	LSM	SMC-LSM	MLMC-LSM

3.1 ゲームオプションを価格付けするための LSM アルゴリズム

LSM は、本来、アメリカンオプションの価格付け手法として提案されたモンテカルロシミュレーションである。初めに、権利行使、(権利行使せず) 継続を判断する材料としての継続価値計算に使用する回帰係数を推定する。その後、推定した回帰係数を用いてオプションの価格付けを実行する。

ところで、ゲームオプションやアメリカンオプションの買い手は、満期を含む任意の時点で権利行使可能であり、異なるのは、売り手の行動の許容可否であった。よって、アメリカンオプション用の LSM アルゴリズムにおける、継続価値計算部分と時刻 $t(\geq 0)$ のオプション価値計算部分で売り手のキャンセルを考慮すれば、ゲームオプション用の LSM アルゴリズムが完成する。以下のアルゴリズムで計算できる、ゲームオプション価格 $V_{0,T}^*$ の推定量 \hat{V}_{0,t_M}^* が、SMC-LSM の価格付け結果である。

3.1.1 回帰係数の推定

期間 $[0, T]$ を等間隔に並ぶ $M+1$ 個の時点 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_M = T$ に分割したとする。

Step1 与えられた初期値 S_{t_0} に対して、原資産確率過程のパスを N 本発生させる。

$$\{S_{t_i}^n\}_{1 \leq i \leq M}, n = 1, 2, \dots, N.$$

Step2 時点 t_M において、次のように設定する。

$$\hat{V}_{t_M, t_M}^n = Y_{t_M}(S_{t_M}^n).$$

Step3 $t_j = t_{M-1}$ に対して、以下を計算する。

$$\text{回帰係数 } \hat{\beta}_{t_j} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi(S_{t_j}^n) \psi^T(S_{t_j}^n) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi(S_{t_j}^n) \hat{V}_{t_{j+1}, t_M}^n(S_{t_{j+1}}^n).$$

$$\text{継続価値 } \hat{C}_{t_j}(S_{t_j}^n) = \hat{\beta}_{t_j}^T \psi(S_{t_j}^n), n = 1, 2, \dots, N.$$

$$\text{行使価値 } Y_{t_j}(S_{t_j}^n), n = 1, 2, \dots, N.$$

$$\text{キャンセル価値 } X_{t_j}(S_{t_j}^n), n = 1, 2, \dots, N.$$

$$\text{オプション価値 } \hat{V}_{t_j, t_M}^n = \min\{X_{t_j}(S_{t_j}^n), \max\{Y_{t_j}(S_{t_j}^n), \hat{C}_{t_j}(S_{t_j}^n)\}\}.$$

Remark $\psi(S_{t_k}^n)$: 基底関数。本論文では次のラゲール多項式を使用した。

$$\psi(x) = \frac{\exp(x)}{m!} \frac{d^m}{dx^m} (\exp(-x)x^m), \quad 0 \leq m \leq 3.$$

Step4 $t_j = t_{M-2}, \dots, t_1$ に対して、バックワードに以下を計算する。

$$\text{回帰係数 } \hat{\beta}_{t_j} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi(S_{t_j}^n) \psi^T(S_{t_j}^n) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi(S_{t_j}^n) \hat{V}_{t_{j+1}, t_M}^n(S_{t_{j+1}}^n).$$

継続価値 $\hat{C}_{t_j}(S_{t_j}^n) = \hat{\beta}_{t_j}^T \psi(S_{t_j}^n), n = 1, 2, \dots, N.$

行使価値 $Y_{t_j}(S_{t_j}^n), n = 1, 2, \dots, N.$

キャンセル価値 $X_{t_j}(S_{t_j}^n), n = 1, 2, \dots, N.$

オプション価値 $\hat{V}_{t_j, t_M}^n = \min\{X_{t_j}(S_{t_j}^n), \max\{Y_{t_j}(S_{t_j}^n), \hat{C}_{t_j}(S_{t_j}^n)\}\}.$

Step5 回帰係数 $\hat{\beta}_{t_j}$ を継続価値の算出に用いるために保持しておく。

3.1.2 価格付け

Step1 与えられた初期値 S_{t_0} に対して、原資産確率過程のパスを N 本発生させる。

$$\{S_{t_j}^n\}_{1 \leq n \leq N}, n = 1, 2, \dots, N.$$

Step2 あらかじめ準備しておいた回帰係数 $\beta_{t_j}, j = 1, 2, \dots, M$ を読み込む。

Step3 時点 $t_j, j = 1, 2, \dots, M-1$ において、以下を計算する。

継続価値 $\hat{C}_{t_j}(S_{t_j}^n), n = 1, 2, \dots, N.$

行使価値 $Y_{t_j}(S_{t_j}^n), n = 1, 2, \dots, N.$

キャンセル価値 $X_{t_j}(S_{t_j}^n), n = 1, 2, \dots, N.$

Step4 時点 t_M において以下を計算する。

継続価値 $\hat{C}_{t_M}(S_{t_M}^n) \equiv 0, n = 1, 2, \dots, N.$

行使価値 $Y_{t_M}(S_{t_M}^n), n = 1, 2, \dots, N.$

キャンセル価値 $X_{t_M}(S_{t_M}^n), n = 1, 2, \dots, N.$

Step5 ゲームオプションの現在価値を N 本のパスごとに計算する。

$$\hat{V}_{0, t_M}^{*, n} = e^{\sigma_0^{*(n)} \wedge \tau_0^{*(n)}} R^{(n)}(\sigma_0^{*(n)}, \tau_0^{*(n)}).$$

ここで

$$\sigma_0^{*(n)} = \min\{t_j \in \{t_1, t_2, \dots, t_M\} | X_{t_j}(S_{t_j}^n) \leq \hat{C}_{t_j}(S_{t_j}^n)\},$$

$$\tau_0^{*(n)} = \min\{t_j \in \{t_1, t_2, \dots, t_M\} | Y_{t_j}(S_{t_j}^n) \geq \hat{C}_{t_j}(S_{t_j}^n)\}$$

である。

Step6 ゲームオプション価格を計算する。

$$\hat{V}_{0, t_M}^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{V}_{0, t_M}^{*, n}.$$

4 マルチレベルモンテカルロ法

SMC では 1 種類の時間幅で原資産確率過程のパスを発生させるが、MLMC ではレベル

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, L < +\infty \quad (19)$$

という概念を導入し、レベルごとに異なる複数種類の時間幅

$$h_\ell = \frac{T}{2^\ell}, 0 \leq \ell \leq L \quad (20)$$

を用いて、パスを発生させる。高レベルの時間幅で発生させるパスほど、原資産確率過程に対するより緻密な離散化になる。

$$\begin{aligned}
&\text{レベル } 0 \quad S_T^{n_0, (h_0)}, \quad 1 \leq n_0 \leq N_0, \\
&\quad \quad \quad S_T^{n_1, (h_0)}, \quad 1 \leq n_1 \leq N_1. \\
&\text{レベル } 1 \quad S_{T/2}^{n_1, (h_1)}, S_T^{n_1, (h_1)} \quad 1 \leq n_1 \leq N_1, \\
&\quad \quad \quad S_{T/2}^{n_2, (h_1)}, S_T^{n_2, (h_1)}, \quad 1 \leq n_2 \leq N_2. \\
&\quad \quad \quad \vdots \\
&\text{レベル } L-1 \quad S_{T/2^{L-1}}^{n_{L-1}, (h_{L-1})}, S_{2T/2^{L-1}}^{n_{L-1}, (h_{L-1})}, \dots, S_T^{n_{L-1}, (h_{L-1})}, \quad 1 \leq n_{L-1} \leq N_{L-1}, \\
&\quad \quad \quad S_{T/2^{L-1}}^{n_L, (h_{L-1})}, S_{2T/2^{L-1}}^{n_L, (h_{L-1})}, \dots, S_T^{n_L, (h_{L-1})}, \quad 1 \leq n_L \leq N_L. \\
&\text{レベル } L \quad S_{T/2^L}^{n_L, (h_L)}, S_{2T/2^L}^{n_L, (h_L)}, \dots, S_T^{n_L, (h_L)}, \quad 1 \leq n_L \leq N_L.
\end{aligned}$$

時間幅 h_ℓ に対応するペイオフを \hat{P}_ℓ とする. Giles(2008) に従い, 次の $E[\hat{P}_L]$ をゲームオプション価格 $V_{0,T}^*$ として計算することを考える.

$$E[\hat{P}_L] = E[\hat{P}_0] + \sum_{\ell=1}^L E[\hat{P}_\ell - \hat{P}_{\ell-1}]. \quad (21)$$

次の MLMC 推定量 \hat{Y} を $E[\hat{P}_L]$ として計算する.

$$\hat{Y} = \sum_{\ell=0}^L \hat{Y}_\ell. \quad (22)$$

ここで

$$\hat{Y}_\ell = \begin{cases} N_0^{-1} \sum_{i=1}^{N_0} \hat{P}_0^i & (\ell = 0), \\ N_\ell^{-1} \sum_{i=1}^{N_\ell} (\hat{P}_\ell^i - \hat{P}_{\ell-1}^i) & (1 \leq \ell \leq L) \end{cases} \quad (23)$$

である. そして

$$\hat{P}_\ell^i = e^{\sigma_0^{*(i),(\ell)} \wedge \tau_0^{*(i),(\ell)}} R(\sigma_0^{*(i),(\ell)}, \tau_0^{*(i),(\ell)}), \quad (24)$$

$$\sigma_0^{*(i),(\ell)} = \min\{t_j \in \{t_{T/2^\ell}, t_{2T/2^\ell}, \dots, t_T\} | X_{t_j}(S_{t_j}^{i,(h_\ell)}) \leq \hat{C}_{t_j}(S_{t_j}^{i,(h_\ell)})\}, \quad (25)$$

$$\tau_0^{*(i),(\ell)} = \min\{t_j \in \{t_{T/2^\ell}, t_{2T/2^\ell}, \dots, t_T\} | Y_{t_j}(S_{t_j}^{i,(h_\ell)}) \geq \hat{C}_{t_j}(S_{t_j}^{i,(h_\ell)})\} \quad (26)$$

である.

Giles(2008) は, 原資産確率過程をオイラー・丸山近似で離散化したときのモンテカルロシミュレーションによる期待値計算に関して, 平均二乗誤差 $O(\epsilon^2)$ を達成するために必要な計算コストを考察している. SMC の計算コストは $O(\epsilon^{-3})$ だが, MLMC では $O(\epsilon^{-2}(\log \epsilon)^{-2})$ に削減できることを示している. 以下は, Giles(2008) の主定理である.

定理 4.1 Giles(2008)

P を (10) 式の解の関数とする. 独立な推定量 \hat{Y}_ℓ が存在し, かつ次の条件

$$(i) \quad E[\hat{P}_\ell - P] \leq c_1 h_\ell^\alpha, \quad (27)$$

$$(ii) \quad E[\hat{Y}_\ell] = \begin{cases} E[\hat{P}_0], & (\ell = 0), \\ E[\hat{P}_\ell - \hat{P}_{\ell-1}], & (\ell > 0), \end{cases} \quad (28)$$

$$(iii) \quad V[\hat{Y}_\ell] \leq c_2 N_\ell^{-1} h_\ell^\beta, \quad (29)$$

$$(iv) \quad C_\ell \leq c_3 N_\ell h_\ell^{-1}, \quad (C_\ell : \hat{Y}_\ell \text{ の計算コスト}) \quad (30)$$

を満たすような5つの定数 $\alpha \geq \frac{1}{2}, \beta, c_1, c_2, c_3$ が存在するとき、以下が成り立つような正定数 c_4 が存在する：すなわち、任意の $\epsilon < e^{-1}$ に対して、MLMC 推定量 \hat{Y} が計算コスト

$$C \leq \begin{cases} c_4 \epsilon^{-2} & (\beta > 1), \\ c_4 \epsilon^{-2} (\log \epsilon)^2 & (\beta = 1), \\ c_4 \epsilon^{-2-(\gamma-\beta)/\alpha} & (0 < \beta < 1). \end{cases} \quad (31)$$

で、平均二乗誤差

$$MSE \equiv E \left[(\hat{Y} - E[P])^2 \right] < \epsilon^2 \quad (32)$$

を達成する最大レベル L 、シミュレーション回数 N_ℓ , $\ell = 0, 1, \dots, L$ が存在する。

5 分析

ペナルティ δ を変化させて、MLMC-SSAM と SMC-SSAM, MLMC-LSM と SMC-LSM の価格付け結果を比較分析する。また、金利 r あるいは、ボラティリティ b を変化させたときの MLMC-LSM と SMC-LSM の価格付け結果を分析する。尚、分析中のアメリカンプットオプション価格は、乱数に依存しない有限差分法 (Finite Difference Method, FDM) で計算した。

5.1 ペナルティ δ を変化させたとき

5.1.1 MLMC-SSAM, と SMC-SSAM の比較

次のパラメータ設定で検証した。

設定： $S_0 = 96.5, K = 100, T = 1$ 年, $r = 0.1, b = 0.3, L = 5, N = 5 \times 10^3$ 回, $N_2 = 10^3$ 回。

※ SSAM では各時点 (各グリッド) でモンテカルロシミュレーションにより継続価値を計算する。

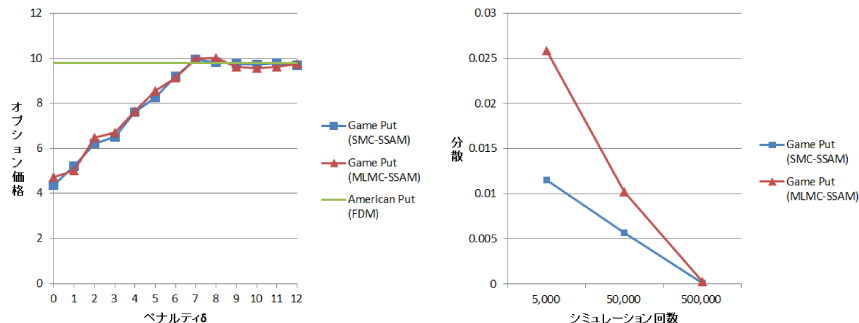
N_2 は各グリッドから発生させるパスの数である。詳細は Suzuki, Seko, Ano(2001) を参照のこと。

・オプション価格

ペナルティ δ を大きくすると、MLMC-SSAM のゲームプットオプション価格はアメリカンプットオプション価格に接近し、いずれ一致することが分かる。Suzuki, Seko, Ano(2001) で紹介されている SMC-SSAM の結果と同様である。

・分散

MLMC-SSAM の分散は、シミュレーション回数に依らず、SMC-SSAM の分散よりも大きい (ATM ケース, OTM ケースでも同様の結果が確認された)。シミュレーション回数が 5×10^5 回のとき、MLMC-SSAM と SMC-SSAM の分散は同程度になる。



5.1.2 MLMC-LSM と SMC-LSM の比較

次のパラメータ設定で検証した。

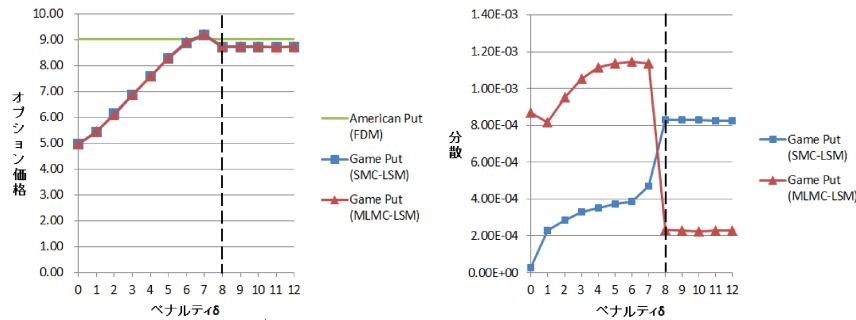
設定： $S_{t_0} = 45, K = 50, T = 1$ 年, $r = 0.05, b = 0.4, L = 7, N_1 = 10^5$ 回。

・オプション価格

MLMC-LSM, SMC-LSM とともに、ペナルティ δ を大きくして行くとゲームプットオプション価格がアメリカンプットオプション価格に接近し、いずれ一致する。

・分散

ゲームオプション価格がアメリカンオプション価格に一致する前に分散の大小関係が逆転し、MLMC-LSM の方が分散が小さくなる。以降、価格が一致するまで分散の差は拡大し、縮まらない。



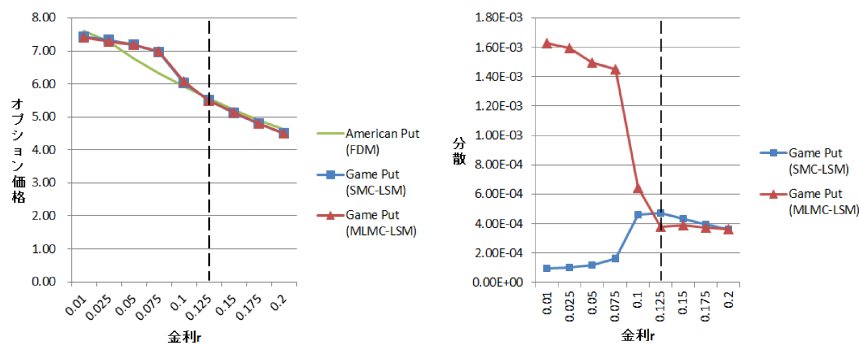
上記はイン・ザ・マネーのケースだが、アット・ザ・マネーケース ($S_{t_0} = 50, K = 50$), アウト・オブ・ザ・マネーケース ($S_{t_0} = 55, K = 50$) でも、同様の結果を確認した。

5.2 金利 r を変化させたとき

次のパラメータ設定で検証した。

設定： $S_{t_0} = 50, K = 50, T = 1$ 年, $b = 0.4, L = 7, N = 10^5$ 。

金利を大きくして行くと、ゲームプットオプション価格はアメリカンプットオプション価格に接近し、いずれ一致する。ゲームオプション価格に一致する前に、分散の大小関係が逆転し MLMC-LSM の方が分散が小さくなる。以降、価格が一致するまで分散の差は拡大するが、価格が一致してからは分散の差は縮小する。



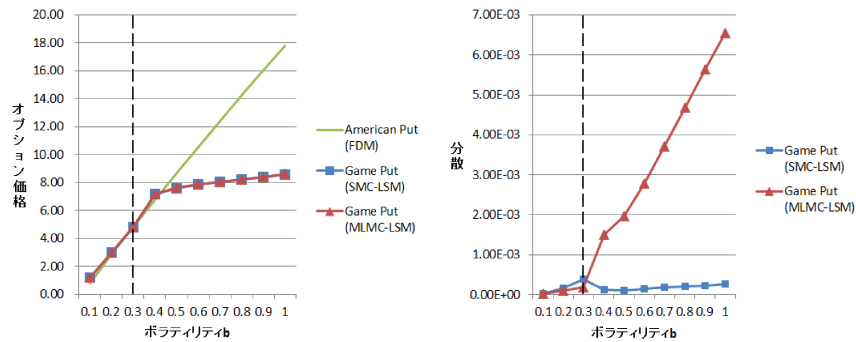
5.3 ボラティリティ b を変化させたとき

次のパラメータ設定で検証した。

設定： $S_{t_0} = 50, K = 50, T = 1$ 年, $r = 0.05, L = 7, N = 10^5$ 。

ボラティリティを小さくして行くと、ゲームプットオプション価格はアメリカンプットオプション価格に接近し、いずれ一致する。ゲームオプション価格に一致する前に、分散の大小関係が逆転し MLMC-LSM の

方が分散が小さくなる。以降、価格が一致するまで分散の差は拡大するが、価格が一致してからは分散の差は縮小する。



6 結論

ゲームプットオプションの価格付けにおいて、MLMC-SSAMはSMC-SSAMと同水準の価格付け結果が得られるものの、SMC-SSAMより分散は小さい。一方、MLMC-LSMはSMC-LSMと同水準の価格付け結果が得られることに加えて、ペナルティ δ が大きくて、ゲームプットオプションの価格付け結果がアメリカンプットオプション価格と一致するときは、SMC-LSMより分散が小さい。このとき、MLMC-LSMを用いることで、計算コストの削減が期待できる。

また、金利 r やボラティリティ b を変化させた場合にも、ゲームプットオプション価格はアメリカンプットオプション価格と一致することを数値的に発見した。

7 今後の課題

ペナルティ δ が小さくて、ゲームプットオプションの価格付け結果がアメリカンプットオプション価格と一致しないときは、MLMC-LSMはSMC-LSMより分散が大きくなることが確認された。より小さい分散を実現するために、Giles(2008)のMLMCのロジックを修正したシミュレーション手法の提案と、更なる追加分析を今後の課題としたい。

参考文献

- [1] Dynkin, E.B. (1969), "Game variant of a problem on optimal stopping", *Soviet Mathematics Doklady Vol. 10, No. 2*, pp. 270-274.
- [2] Giles, M.B. (2008), "Multilevel Monte Carlo Path Simulation", *OPERATIONS RESEARCH Vol. 56, No. 3*, pp. 607-617.
- [3] Heinrich, S. (2001), "Multilevel Monte Carlo Methods", *Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2179*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 58-67.
- [4] Kifer, Y. (2000), "Game Options", *Finance and Stochastics, Vol. 4*, pp. 443-463.
- [5] Longstaff, F.A. and Schwartz, E.S. (2001), "Valuing American option by simulation: a simple least-squares approach", *The Review of Financial Studies 14 (1)*, pp. 113-147.

- [6] Suzuki, A., Seko, S., and Ano, K. (2001), "Game Option pricing such that the underlying price process is Jump-diffusion process and numerical calculations for both players' optimal exercise/cancel boundaries", *RIMS Kokyuroku, Vol. 1241, pp.19-29*, in Japanese.