数理解析研究所講究録
第1939巻2015年228-237

最適解 — 点と値 —

岩本誠一(九州大学·名誉教授), 木村寛(秋田県立大学)

Seiichi Iwamoto (Professor Emeritus, Kyushu University),
Yutaka Kimura (Akita Prefectural University)

概要

本報告では、定数 $c\,(\in R^1)$ を含む2次計画問題を考え、その最適解を構成する最適点と最適値の関係を観る。すなわち、最小化および最大化それぞれの2次計画問題に対して、最適値が最適点の第1成分で定まることを示す。さらにこれらの結果は、評価関数を一般化しても成り立つことを示す。

1 最小化

まず、4変数 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の問題

$$
\begin{array}{llll}
 & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] & \\
(\mathrm{P}_4) & \text{subject to} & \text{(i)} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 & \\
 & & \text{(ii)} \quad x_0 = c &
\end{array}
$$

を考える [8–11]。ここに $c \in R^1$ とする。

補題 1 (P_4) の最小点を $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ とすると、最小値 m_4 は

$$m_4 = c(c - \hat{x}_1)$$

である。事実、最小解は

$$(\ \hat{x}_1,\ \ \hat{x}_2,\ \ \hat{x}_3,\ \ \hat{x}_4\ ) = \frac{c}{34}(\ 13,\ \ 5,\ \ 2,\ \ 1\ ), \qquad m_4 = \frac{21}{34}c^2$$

である。さらに、最小点 (x_1, x_2, x_3, x_4) は

$$\sum_{l=k}^{3} \left[(x_l - x_{l+1})^2 + x_{l+1}^2\right] = x_k(x_k - x_{k+1}) \qquad 1 \le k \le 3 \tag{1}$$

も満たしている。

Proof. $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ を最小点とすると、x は 1 階条件

$$\begin{aligned}
-(c-x_1)+x_1+(x_1-x_2) &= 0 \qquad \text{(i)}\\
-(x_1-x_2)+x_2+(x_2-x_3) &= 0 \qquad \text{(ii)}\\
-(x_2-x_3)+x_3+(x_3-x_4) &= 0 \qquad \text{(iii)}\\
-(x_3-x_4)+x_4 &= 0 \qquad \text{(iv)}
\end{aligned}$$

を満たす [1,5]。まず、(iv) の両辺を x_4 倍すると

$$x_4^2 = x_4(x_3-x_4).$$

よって

$$(x_3-x_4)^2+x_4^2 = (x_3-x_4)^2+x_4(x_3-x_4) = x_3(x_3-x_4)$$

が成り立つ。次に、これと (iii) より

$$\begin{aligned}
(x_2-x_3)^2+x_3^2+(x_3-x_4)^2+x_4^2 &= (x_2-x_3)^2+x_3^2+x_3(x_3-x_4)\\
&= (x_2-x_3)^2+x_3^2+x_3\{(x_2-x_3)-x_3\}\\
&= x_2(x_2-x_3).
\end{aligned}$$

さらに、これと (ii) より

$$\begin{aligned}
&(x_1-x_2)^2+x_2^2+(x_2-x_3)^2+x_3^2+(x_3-x_4)^2+x_4^2\\
=\ &(x_1-x_2)^2+x_2^2+x_2(x_2-x_3)\\
=\ &(x_1-x_2)^2+x_2^2+x_2\{(x_1-x_2)-x_2\}\\
=\ &x_1(x_1-x_2).
\end{aligned}$$

最後にこれと (i) より、最小値 m_4 は

$$\begin{aligned}
m_4 &= (c-x_1)^2+x_1^2+(x_1-x_2)^2+x_2^2+(x_2-x_3)^2+x_3^2+(x_3-x_4)^2+x_4^2\\
&= (c-x_1)^2+x_1^2+x_1(x_1-x_2)\\
&= c(c-x_1)
\end{aligned}$$

になる。 □

一般に、n 変数 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の問題

$$(\mathrm{P}_n)\qquad \begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[(x_k-x_{k+1})^2+x_{k+1}^2\right]\\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ x\in R^n\\
& \text{(ii)}\ \ x_0=c
\end{array}$$

を考えると [6–8,10,13,14]、次の定理が成り立つ。

定理 1 主問題 (P_n) の最小点を $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ とすると、最小値 m_n は

$$m_n = c(c - \hat{x}_1) \tag{2}$$

である。事実、最小解は

$$\left(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ ,\ldots,\ \hat{x}_{n-1},\ \hat{x}_n \right) = \frac{c}{F_{2n+1}} \left(F_{2n-1},\ F_{2n-3},\ ,\ldots,\ F_3,\ F_1 \right)$$

$$m_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} c^2$$

である。さらに、最小点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は

$$\sum_{l=k}^{n-1} \left[(x_l - x_{l+1})^2 + x_{l+1}^2 \right] = x_k(x_k - x_{k+1}) \qquad 1 \leq k \leq n-1 \tag{3}$$

も満たしている。ただし、数列 $\{F_n\}$ はフィボナッチ数列 *(Fibonacci sequence)* を表す。フィボナッチ数列は $\{F_n\}$ は 2 階線形差分方程式

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 1$$

の解として定義されている [3,4,16]。 □

次に、4 変数問題 (P_4) の目的関数形を少し一般化して、$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ の問題

$$\begin{array}{lll} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2 + (x_3 - x_4)^2 + k x_4^2 \right] \\ (\mathrm{P}_4') & \text{subject to} & \text{(i)} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \\ & & \text{(ii)} \quad x_0 = c \end{array}$$

を考える。ただし $k > 0$.

定理 2 この最小点を $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ とすると、最小値 m_4' は

$$m_4' = c(c - \hat{x}_1)$$

である。さらに、最小点 (x_1, x_2, x_3, x_4) は

$$\sum_{l=k}^{3} \left[(x_l - x_{l+1})^2 + k x_{l+1}^2 \right] = x_k(x_k - x_{k+1}) \qquad 1 \leq k \leq 3 \tag{4}$$

も満たしている。 □

Proof. 問題 (P_4') の目的関数

$$f(x) = (c-x_1)^2 + x_1^2 + (x_1-x_2)^2 + x_2^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2 + (x_3-x_4)^2 + kx_4^2$$

は R^4 上の狭義凸関数である。したがって、唯一の（最小）点で最小値をもつ。
さて、$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ が最小点とすると、x は1階条件

$$\begin{aligned}
-(c-x_1)+x_1+(x_1-x_2) &= 0 && \text{(i)}\\
-(x_1-x_2)+x_2+(x_2-x_3) &= 0 && \text{(ii)}\\
-(x_2-x_3)+x_3+(x_3-x_4) &= 0 && \text{(iii)}\\
-(x_3-x_4)+kx_4 &= 0 && \text{(iv)}
\end{aligned}$$

を満たす。まず、(iv) の両辺を x_4 倍すると

$$kx_4^2 = x_4(x_3-x_4).$$

よって

$$(x_3-x_4)^2 + kx_4^2 = (x_3-x_4)^2 + x_4(x_3-x_4) = x_3(x_3-x_4)$$

が成り立つ。次に、これと (iii) より

$$(x_2-x_3)^2 + x_3^2 + (x_3-x_4)^2 + kx_4^2 = (x_2-x_3)^2 + x_3^2 + x_3(x_3-x_4) = x_2(x_2-x_3).$$

さらに、これと (ii) より

$$(x_1-x_2)^2 + x_2^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2 + (x_3-x_4)^2 + kx_4^2 = x_1(x_1-x_2).$$

最後にこれと (i) より、最小値 m_4' は

$$\begin{aligned}
m_4' &= (c-x_1)^2 + x_1^2 + (x_1-x_2)^2 + x_2^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2 + (x_3-x_4)^2 + kx_4^2\\
&= c(c-x_1)
\end{aligned}$$

になる。 □

系 1 (P_4') において $k=1+\phi^{-1}$ のとき、最小解は黄金数で表され具体的に求まる。すなわち最小解は

$$(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) = c\,(\phi^{-2}, \phi^{-4}, \phi^{-6}, \phi^{-8}), \qquad m_4' = \phi^{-1}c^2.$$

ただし、ϕ は黄金数（*Golden number*）を表し、

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$

である [4,10,11,13–17]。

さらに、係数を一般にした問題

$$
(\mathrm{P}_4'') \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \left[a_k(x_{k-1}-x_k)^2 + b_k x_k^2\right] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \\ & \text{(ii)} \quad x_0 = c \end{array}
$$

を考えよう。ただし $a_k > 0,\ b_k > 0 \ \ 1 \le k \le 4$ とする。

定理 3 この最小点を $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ とすると、最小値 m_4'' は

$$
m_4'' = a_1 c(c - \hat{x}_1)
$$

である。さらに、最小点 (x_1, x_2, x_3, x_4) は

$$
\sum_{l=k}^{3} \left[a_{l+1}(x_l - x_{l+1})^2 + b_{l+1}x_{l+1}^2\right] \ = \ a_{k+1}x_k(x_k - x_{k+1}) \qquad 1 \le k \le 3 \tag{5}
$$

も満たしている。

□

2 最大化

今度は (P_4) の双対問題として、4 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ の問題

$$
(\mathrm{D}_4) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_1 - \left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{3} [\,\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2\,] + 2\mu_4^2\right\} \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in R^4 \end{array}
$$

を考える [8–11]。

補題 2 (D_4) の最大点を $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_3^*)$ とすると、最大値 M_4 は

$$
M_4 = c\mu_1^*
$$

である。実際、最大解は

$$
(\ \mu_1^*,\ \ \mu_2^*,\ \ \mu_3^*,\ \ \mu_4^*\ ) \ = \ \frac{c}{34}(\ 21,\ \ 8,\ \ 3,\ \ 1\ ), \qquad M_4 \ = \ \frac{21}{34}c^2
$$

である。さらに、最大点 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ は

$$
(\mu_3 - \mu_4)^2 + 2\mu_4^2 \ = \ \mu_3(\mu_3 - \mu_4) \tag{6}
$$

$$
\sum_{l=k}^{2} [\ (\mu_l - \mu_{l+1})^2 + \mu_{l+1}^2\ ] + (\mu_3 - \mu_4)^2 + 2\mu_4^2 \ = \ \mu_k(\mu_k - \mu_{k+1}) \qquad 1 \le k \le 2 \tag{7}
$$

$$
\sum_{k=1}^{3} [\,\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2\,] + 2\mu_4^2 \ = \ c\mu_1 \tag{8}
$$

も満たしている。

Proof. (D_4) の最大点を $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ とすると、μ は1階条件

$$\begin{aligned}
(c-\mu_1)-(\mu_1-\mu_2) &= 0 \qquad \text{(i)}\\
(\mu_1-\mu_2)-\mu_2-(\mu_2-\mu_3) &= 0 \qquad \text{(ii)}\\
(\mu_2-\mu_3)-\mu_3-(\mu_3-\mu_4) &= 0 \qquad \text{(iii)}\\
(\mu_3-\mu_4)-2\mu_4 &= 0 \qquad \text{(iv)}
\end{aligned}$$

を満たす。まず、(iv) の両辺を μ_4 倍すると

$$2\mu_4^2 = \mu_4(\mu_3-\mu_4).$$

よって

$$(\mu_3-\mu_4)^2+2\mu_4^2 = (\mu_3-\mu_4)^2+\mu_4(\mu_3-\mu_4) = \mu_3(\mu_3-\mu_4)$$

が成り立つ。次に、これと (iii) より

$$\begin{aligned}
(\mu_2-\mu_3)^2+\mu_3^2+(\mu_3-\mu_4)^2+2\mu_4^2 &= (\mu_2-\mu_3)^2+\mu_3^2+\mu_3(\mu_3-\mu_4)\\
&= (\mu_2-\mu_3)^2+\mu_3^2+\mu_3\{(\mu_2-\mu_3)-\mu_3\}\\
&= (\mu_2-\mu_3)^2+\mu_3(\mu_2-\mu_3)\\
&= \mu_2(\mu_2-\mu_3).
\end{aligned}$$

さらに、これと (ii) より

$$\begin{aligned}
&(\mu_1-\mu_2)^2+\mu_2^2+(\mu_2-\mu_3)^2+\mu_3^2+(\mu_3-\mu_4)^2+2\mu_4^2\\
&= (\mu_1-\mu_2)^2+\mu_2^2+\mu_2(\mu_2-\mu_3)\\
&= (\mu_1-\mu_2)^2+\mu_2^2+\mu_2\{(\mu_1-\mu_2)-\mu_2\}\\
&= \mu_1(\mu_1-\mu_2).
\end{aligned}$$

最後に、これと (i) より

$$\begin{aligned}
&\mu_1^2+(\mu_1-\mu_2)^2+\mu_2^2+(\mu_2-\mu_3)^2+\mu_3^2+(\mu_3-\mu_4)^2+2\mu_4^2\\
&= \mu_1^2+\mu_1(\mu_1-\mu_2)\\
&= c\mu_1
\end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、最大値 M_4 は

$$\begin{aligned}
M_4 &= 2c\mu_1-\left[\mu_1^2+(\mu_1-\mu_2)^2+\mu_2^2+(\mu_2-\mu_3)^2+\mu_3^2+(\mu_3-\mu_4)^2+2\mu_4^2\right]\\
&= 2c\mu_1-c\mu_1\\
&= c\mu_1
\end{aligned}$$

になる。 □

次に、一般の n 変数 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$ の問題

$$
(\mathrm{D}_n)\quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & 2c\mu_1-\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[\mu_k^2+(\mu_k-\mu_{k+1})^2\right]+2\mu_n^2\right\} \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ \mu\in R^n
\end{array}
$$

を考える [6,7,11–15]。

定理 4 双対問題 (D_n) の最大点を $(\mu_1^*,\mu_2^*,\ldots,\mu_n^*)$ とすると、最大値 M_n は

$$M_n=c\mu_1^* \tag{9}$$

である。実際、最大解は

$$(\ \mu_1^*,\ \ \mu_2^*,\ \ ,\ldots,\ \ \mu_{n-1}^*,\ \ \mu_n^*\ )=\frac{c}{F_{2n+1}}(\ F_{2n},\ \ F_{2n-2},\ \ ,\ldots,\ \ F_4,\ \ F_2\ )$$

$$M_n=\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}c^2$$

である。さらに、最大点 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$ は

$$(\mu_{n-1}-\mu_n)^2+2\mu_n^2=\mu_{n-1}(\mu_{n-1}-\mu_n) \tag{10}$$

$$\sum_{l=k}^{n-2}\left[\ (\mu_l-\mu_{l+1})^2+\mu_{l+1}^2\ \right]+(\mu_{n-1}-\mu_n)^2+2\mu_n^2=\mu_k(\mu_k-\mu_{k+1})\quad 1\le k\le n-2 \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\mu_k^2+(\mu_k-\mu_{k+1})^2\right]+2\mu_n^2=c\mu_1 \tag{12}$$

も満たしている。 □

今度は、(D_4) を少し一般化した問題

$$
(\mathrm{D}_4')\quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & 2c\mu_1-\left[\mu_1^2+(\mu_1-\mu_2)^2+\mu_2^2+(\mu_2-\mu_3)^2+\mu_3^2+(\mu_3-\mu_4)^2+k\mu_4^2\right] \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ (\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)\in R^4
\end{array}
$$

を考えよう。ただし $k>0$.

定理 5 この最大点を $(\mu_1^*,\mu_2^*,\mu_3^*,\mu_4^*)$ とすると、最大値 M_4' は

$$M_4'=c\mu_1^*$$

である。さらに、最大点 $(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)$ は

$$(\mu_3-\mu_4)^2+k\mu_4^2=\mu_3(\mu_3-\mu_4) \tag{13}$$

$$\sum_{l=k}^{2}\left[\ (\mu_l-\mu_{l+1})^2+\mu_{l+1}^2\ \right]+(\mu_3-\mu_4)^2+k\mu_4^2=\mu_k(\mu_k-\mu_{k+1})\quad 1\le k\le 2 \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\left[\mu_k^2+(\mu_k-\mu_{k+1})^2\right]+k\mu_4^2=c\mu_1 \tag{15}$$

も満たしている。 □

Proof. 問題 (D_4') の目的関数

$$g(\mu) = 2c\mu_1 - \left[\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2\right]$$

は R^4 上で狭義凹である。したがって、唯一の（最大）点で最大値をもつ。

さて、(D_4') の最大点を $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ とすると、μ は 1 階条件

$$\begin{aligned}(c - \mu_1) - (\mu_1 - \mu_2) &= 0 \qquad \text{(i)}\\ (\mu_1 - \mu_2) - \mu_2 - (\mu_2 - \mu_3) &= 0 \qquad \text{(ii)}\\ (\mu_2 - \mu_3) - \mu_3 - (\mu_3 - \mu_4) &= 0 \qquad \text{(iii)}\\ (\mu_3 - \mu_4) - k\mu_4 &= 0 \qquad \text{(iv)}\end{aligned}$$

を満たす。まず、(iv) を μ_4 倍すると

$$k\mu_4^2 = \mu_4(\mu_3 - \mu_4).$$

よって

$$(\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2 = (\mu_3 - \mu_4)^2 + \mu_4(\mu_3 - \mu_4) = \mu_3(\mu_3 - \mu_4)$$

が成り立つ。次に、これと (iii) より

$$(\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2 = (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3(\mu_2 - \mu_3) = \mu_2(\mu_2 - \mu_3).$$

さらに、これと (ii) より

$$(\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2 = (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2(\mu_1 - \mu_2) = \mu_1(\mu_1 - \mu_2).$$

最後に、これと (i) より

$$\begin{aligned}&\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2\\ =\ &\mu_1^2 + \mu_1(\mu_1 - \mu_2)\\ =\ &\mu_1^2 + \mu_1(c - \mu_1)\\ =\ &c\mu_1\end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、最大値 M_4' は

$$\begin{aligned}M_4' &= 2c\mu_1 - \left[\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_3^2 + (\mu_3 - \mu_4)^2 + k\mu_4^2\right]\\ &= 2c\mu_1 - c\mu_1\\ &= c\mu_1\end{aligned}$$

になる。 □

系 2 (D_4') において $k = 1 + \phi^{-1}$ のとき、最大解は黄金数で表され具体的に求まる。すなわち最大解は

$$(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*,\ \mu_4^*) = c\,(\phi^{-1},\ \phi^{-3},\ \phi^{-5},\ \phi^{-7}), \qquad M_4' = \phi^{-1}c^2$$

となる [11,13]。

さらに、係数を一般にした問題

$$(\mathrm{D}_4'') \quad \begin{array}{l} \text{Maximize} \quad 2a_0\mu_1 - \left\{ \sum_{k=1}^{3} [\, a_k\mu_k^2 + b_k(\mu_k - \mu_{k+1})^2 \,] + a_4\mu_4^2 \right\} \\ \text{subject to} \quad \text{(i)} \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in R^4 \end{array}$$

を考えよう。ただし $a_k > 0 \ \ 0 \le k \le 4, \ \ b_k > 0 \ \ 1 \le k \le 3.$

定理 6 この最大点を $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*)$ とすると、最大値 M_4'' は

$$M_4'' = a_0\mu_1^*$$

である。さらに、最大点 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ は

$$b_3(\mu_3 - \mu_4)^2 + a_4\mu_4^2 = b_3\mu_3(\mu_3 - \mu_4) \tag{16}$$

$$\sum_{l=k}^{2} [\, b_l(\mu_l - \mu_{l+1})^2 + a_{l+1}\mu_{l+1}^2 \,] + b_3(\mu_3 - \mu_4)^2 + a_4\mu_4^2 = b_k\mu_k(\mu_k - \mu_{k+1}) \quad 1 \le k \le 2 \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{3} [\, a_k\mu_k^2 + b_k(\mu_k - \mu_{k+1})^2 \,] + a_4\mu_4^2 = a_0\mu_1 \tag{18}$$

も満たしている。 □

参考文献

[1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[2] A. Beutelspacher and B. Petri, 黄金分割－自然と数理と芸術と－ (柳井浩訳), 共立出版, 2005; (Original) *Der Goldene Schnitt 2, überarbeitete und erweiterte Auflange*, Elsevier GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.

[3] D. Brown, ダ・ヴィンチ・コード (上・下) (越前敏弥訳), 角川書店, 2004; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.

[4] R.A. Dunlap, 黄金比とフィボナッチ数 (岩永恭雄・松井講介訳), 日本評論社, 2003; (Original) *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.

[5] I.M. Gelfand and S.V. Fomin, *Calculus of Variations,* Prentice-Hall, New Jersey, 1963.

[6] 岩本誠一、動的計画論、九大出版会、1987.

[7] S. Iwamoto, The Golden optimum solution in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA05), Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp. 199–205.

[8] 岩本 誠一、 最適化「ダ・ヴィンチ・コード」 — 経済数学へのプレリュード (VI) — , 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会). 平成 19(2007) 年 4 月, pp.45–52.

[9] 岩本 誠一、 ダ・ヴィンチ・コードは最適か?、数理経済学研究センター会報、第 37 号、平成 21(2009) 年 9 月、pp.1–9.

[10] 岩本誠一、 最適経路 — フィボナッチから黄金へ — 、「不確実性下における意思決定問題」、京大数理研講究録 1734、２０１１年３月、ｐｐ．１９６−２０４．

[11] 岩本 誠一、最適化の数理 II — ベルマン方程式 — (Mathematics for Optimization II – Bellman Equation –)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」, 知泉書館, 2013 年 10 月, pp.449.

[12] 岩本 誠一、吉良 知文、植野 貴之、ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 (2009 年 10 月) 23 号, pp.1–22.

[13] S. Iwamoto, Y. Kimura and T. Fujita, "Primal-dual inequalities through conjugate function," *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013 in Hirosaki)*, accepted.

[14] S. Iwamoto and M. Yasuda, Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes, Ed. S. Elaydi, K. Nishimura, M. Shishikura and N. Tose, Advanced Studies in Pure Mathematics 53, June 2009, Advances in Discrete Dynamic Systems, pp.77–86. Proceedings of The International Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA2006), Kyoto University, Kyoto, Japan, July, 2006.

[15] A. Kira and S. Iwamoto, Golden complementary dual in quadratic optimization, Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Proceedings of the Fifth International Confernece (MDAI 2008), Sabadell (Barcelona), Catalonia, Spain, October 30-31, 2008, Eds. V. Torra and Y. Narukawa, Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.

[16] 中村 滋、フィボナッチ数の小宇宙——フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割——(第 2 版)、 日本評論社、2008.

[17] H. Walser, 黄金分割 (蟹江幸博訳) , 日本評論社, 2002; (Original) *DER GOLDENE SCHNITT*, B.G. Teubner, Leibzig, 1996.