数理解析研究所講究録
第 1939 巻 2015 年 262-269

制約条件付き最適停止問題について

広島市立大学大学院情報科学研究科システム工学専攻　田中輝雄
Teruo Tanaka
Department of Systems Engineering, Graduate School of Information Sciences,
HIROSHIMA CITY UNIVERSITY

1 はじめに

本稿では, 連続時間確率過程に対して複数個制約条件をもつ最適停止問題について論じる. Nachman[14] は, 離散時間確率過程の場合に固定した stopping time S に対して,

$$\max.\ E[X(T)]\ \text{ sub. to } T\in C,\ T\leq S \text{ a.e.}$$

を扱い, Kennedy[9] は, 離散時間確率過程の場合に非負 α に対して,

$$\max.\ E[X(T)]\ \text{ sub. to } T\in C,\ E[T]\leq\alpha \tag{1}$$

を扱い, より一般的に, 非負値増加関数 h に対して,

$$\max.\ E[X(T)]\ \text{ sub. to } T\in C,\ E[h(T)]\leq\alpha$$

や randomized stopping time, 連続時間確率過程の場合についても言及している. López 他 [11] は, 離散時間確率過程の場合に, stopping time のある族 C' に対して,

$$\max.\ E[X(T)]\ \text{ sub. to } T\in C'$$

を扱い, $\mathbf{N}^2$ を時間変数空間とする 2 パラメータ最適停止問題も考察している. Horiguchi[7] は, 離散時間（停止）マルコフ決定過程の枠組みで, (1) の型を制約条件にもつ場合を randomized stopping time や occupation measure によって考察し, さらに, Horiguchi[8] は, 離散時間（停止）ベクトル値マルコフ決定過程の枠組みで,

$$E[\textstyle\sum_{t=1}^{T}C(X(t))]\leq\alpha \tag{2}$$

の型を複数個制約条件にもち, ベクトル値評価関数の場合を考察している. Makasu[13] は, (1) の型を制約条件にもち, 2 次元拡散過程に対する Wald 型最適停止問題を自由境界問題により考察している. 以上の研究では, 主に Lagrange 双対理論（例えば, 今野他 [10], Luenberger[12]）による考察が中心である.

また, 制約条件付き確率制御理論については, マルコフ決定過程に関しては Altman[1], 確率制御理論に関しては Yong 他 [16] がある.

ここでは, 一般の連続時間確率過程に対して, (2) の型を複数個制約条件にもつ最適停止問題を Lagrange 双対理論に基づき考察する.

第 2 章では, 本稿で用いる連続時間確率過程に対する記号と仮定について述べる. Kennedy[9] に基づき, 第 3 章では連続時間確率過程の場合に（pure）stopping time に制約条件を課した問題（主問題）とその双対問題の定式化を与え, 第 4 章では主問題の最適値関数と双対問題の最適値関数の性質について述べる. 第 5 章では, randomized stopping time の定義と基本性質について述べる. ここでは, Baxter 他 [3] を参照している. Baxter–Chacon の意味での randomized stopping time と最適停止問題の研究には, 例えば, Coquet 他 [4], Edgar 他 [5], Ghoussoub[6], Shmaya 他 [15] がある. 第 6 章と第 7 章では, randomized stopping time の場合に対する主問題と双対問題の定式化を与え, 最適値関数の性質について述べる. 第 3 章と第 4 章に対応する結果である. 第 8 章では, （pure）stopping time と randomized stopping time のそれぞれの場合について, 制約条件付き最適停止問題が無制約の最適停止問題に帰着できることと最適条件について述べる.

2 記号

本稿では主に以下の記号や仮定の下で議論を進める.

- (Ω, $\mathcal{F}$, P) : 完備確率空間
- $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,\infty]\}$: フィルトレーション
  - $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\in[0,\infty)}\mathcal{F}_t)$
  - $\mathcal{F}_0$ はすべての P–零集合を含む
  - $\mathcal{F}_t$ は右連続
- $C :=$ stopping time $T : \Omega \to [0,\infty)$ の全体
- $\overline{C} :=$ stopping time $T : \Omega \to [0,\infty]$ の全体
- $\{X(t), t \in [0,\infty]\}$: $\{\mathcal{F}_t\}$–適合, 連続見本関数をもつ確率過程,
  $E[\sup_t |X(t)|] < \infty$
- $\{Y_i(t), t \in [0,\infty]\}$: $\{\mathcal{F}_t\}$–適合, 非負, 連続見本関数をもつ確率過程,
  $Y_i(0) = 0$ a.e., $E[\sup_t Y_i(t)] < \infty$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

3 (pure) stopping time に対する主問題と双対問題の定式化

3.1 C での主問題と双対問題

$\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ となる定数 α_i に対して, 族 C での主問題と双対問題を以下の様に定式化する.

- C での主問題 (P)

  max. $E[X(T)]$
  sub. to $T \in C$, $E[Y_i(T)] \leq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

  この問題 (P) の最適値関数を $\phi(\alpha) := \phi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とする.

- C での双対問題 (D)

  min. $f_\alpha(\lambda)$
  sub. to $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

  但し,

  $$f_\alpha(\lambda) := f_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) := \sup_{T\in C}\{E[X(T) - \langle\lambda, Y(T)\rangle] + \langle\lambda, \alpha\rangle\}$$
  $$\langle\lambda, Y(T)\rangle := \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i(T)$$
  $$\langle\lambda, \alpha\rangle := \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$$

  とおき, この問題 (D) の最適値関数を $\psi(\alpha) := \psi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とする.

3.2 $\overline{C}$ での主問題と双対問題

$\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ となる定数 α_i に対して, 族 $\overline{C}$ での主問題と双対問題を以下の様に定式化する.

- $\overline{C}$ での主問題 $(\overline{P})$

  max. $E[X(T)]$
  sub. to $T \in \overline{C}$, $E[Y_i(T)] \leq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

  この問題 $(\overline{P})$ の最適値関数を $\overline{\phi}(\alpha) := \overline{\phi}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とする.

- $\overline{C}$ での双対問題 $(\overline{D})$

min. $\overline{f_\alpha}(\lambda)$
sub. to $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

但し,

$$\overline{f_\alpha}(\lambda) := \overline{f_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) := \sup_{T\in\overline{C}}\{E[X(T) - \langle\lambda, Y(T)\rangle] + \langle\lambda, \alpha\rangle\}$$

とおき, この問題 $(\overline{D})$ の最適値関数を $\overline{\psi}(\alpha) := \overline{\psi}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とする.

4 最適値関数 $\phi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, $\overline{\phi}(\alpha)$, $\overline{\psi}(\alpha)$ の性質

命題 4.1 $\alpha_i \geq 0, \lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して, 以下が成立する.

(1) $|\phi(\alpha)| < \infty$, $|\overline{\phi}(\alpha)| < \infty$

(2) $|f_\alpha(\lambda)| < \infty$, $|\overline{f_\alpha}(\lambda)| < \infty$

(3) $f_\alpha(\lambda)$, $\overline{f_\alpha}(\lambda)$ は凸関数である.

(4) $\phi(\alpha) \leq \psi(\alpha)$, $\overline{\phi}(\alpha) \leq \overline{\psi}(\alpha)$

(5) $\psi(\alpha) = \phi^{**}(\alpha)$
但し, 関数 $g(x)$ の共役関数を $g^*(y) := \inf_{x\in\mathbf{R}^n}\{\langle x, y\rangle - g(x)\}$ とする.

(5) $\psi(\alpha)$ は $\phi(\alpha)$ を *dominate* する最小の凹関数である. 但し, $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする.

(6) $\overline{\psi}(\alpha) = \overline{\phi}^{**}(\alpha)$

(7) $\overline{\psi}(\alpha)$ は $\overline{\phi}(\alpha)$ を *dominate* する最小の凹関数である. 但し, $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする.

証明は, 確率過程 $\{X(t)\}, \{Y(t)\}$ の仮定, および, Kennedy[9] と同様である. また, (4) は数理計画法での弱双対定理に対応するものである.

5 randomized stopping time

ここでは, Baxter-Chacon[3] の意味での randomized stopping time の定義と性質について述べる.

定義 5.1 $[0, 1]$ を区間, $\mathcal{B}$ を $[0, 1]$ の *Borel* 集合体とする. $T : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow [0, \infty]$ は, $\omega \in \Omega$ に対して, $T(\omega, \cdot)$ は第 *2* 変数に関して非減少, 左連続な関数とする. 任意の $t \in [0, \infty]$ に対して,

$$\{(\omega, v) \mid T(\omega, v) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}$$

が成立するとき, T を *randomized stopping time* という.
randomized stopping time の全体を $\overline{\Gamma}$, $T(\omega, v) < \infty$ *(* $dP \times dv$*-a.e.)* となる *randomized stopping time* の全体を Γ とする.

命題 5.1 以下が成立する.

(1) T : *randomized stopping time* $\Longleftrightarrow$ *a.a.* $v \in [0, 1]$ に対して, $T(\cdot, v)$: $\{\mathcal{F}_t\}$*-stopping time*

(2) $\overline{\Gamma}$ は凸集合, *Baxter–Chacon* 位相でコンパクトである. 但し, $T^n, T \in \overline{\Gamma}$ が, 任意の $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P), f \in C([0,\infty])$ に対して,

$$E[Yf(T^n)] \longrightarrow E[Yf(T)] \ (n \longrightarrow \infty)$$

のとき, T^n は T に *Baxter–Chacon* 位相の意味で収束するという.

(3) $Ext(\overline{\Gamma}) = \overline{C}$. 但し, $Ext(\overline{\Gamma})$ は $\overline{\Gamma}$ の端点全体を表す.

(4) $T \in \overline{\Gamma} \longmapsto E[Z(T)]$ はアフィンである. 但し, $E[Z(T)] = \int_\Omega \int_0^1 Z(T(\omega, v), \omega) dPdv$ とする.

6 randomized stopping time に対する主問題と双対問題の定式化

6.1 Γ での主問題と双対問題

$\alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ となる定数 α_i に対して, 族 Γ での主問題と双対問題を以下の様に定式化する.

- Γ での主問題 (RP)

  max. $E[X(T)]$
  sub. to $T \in \Gamma$, $E[Y_i(T)] \leq \alpha_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

  この問題 (RP) の最適値関数を $\xi(\alpha) := \xi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とする.

- Γ での双対問題 (RD)

  min. $g_\alpha(\lambda)$
  sub. to $\lambda_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

  但し,

  $$g_\alpha(\lambda) := g_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) := \sup_{T \in \Gamma} \{E[X(T) - \langle \lambda, Y(T) \rangle] + \langle \lambda, \alpha \rangle\}$$

  とおき, この問題 (RD) の最適値関数を $\eta(\alpha) := \eta(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とする.

6.2 $\overline{\Gamma}$ での主問題と双対問題

$\alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ となる定数 α_i に対して, 族 $\overline{\Gamma}$ での主問題と双対問題を以下の様に定式化する.

- $\overline{\Gamma}$ での主問題 $(\overline{RP})$

  max. $E[X(T)]$
  sub. to $T \in \overline{\Gamma}$, $E[Y_i(T)] \leq \alpha_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

  この問題 $(\overline{RP})$ の最適値関数を $\overline{\xi}(\alpha) := \overline{\xi}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とする.

- $\overline{\Gamma}$ での双対問題 $(\overline{RD})$

  min. $\overline{g_\alpha}(\lambda)$
  sub. to $\lambda_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

  但し,

  $$\overline{g_\alpha}(\lambda) := \overline{g_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) := \sup_{T \in \overline{\Gamma}} \{E[X(T) - \langle \lambda, Y(T) \rangle] + \langle \lambda, \alpha \rangle\}$$

  とおき, この問題 $(\overline{RD})$ の最適値関数を $\overline{\eta}(\alpha) := \overline{\eta}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とする.

7 最適値関数 $\xi(\alpha)$, $\eta(\alpha)$, $\overline{\xi}(\alpha)$, $\overline{\eta}(\alpha)$ の性質

命題 7.1 $\alpha_i \geq 0, \lambda_i \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，以下が成立する.

(1) $|\xi(\alpha)| < \infty$, $|\overline{\xi}(\alpha)| < \infty$

(2) $|g_\alpha(\lambda)| < \infty$, $|\overline{g_\alpha}(\lambda)| < \infty$

(3) $g_\alpha(\lambda)$, $\overline{g_\alpha}(\lambda)$ は凸関数である.

(4) $\xi(\alpha) \leq \eta(\alpha)$, $\overline{\xi}(\alpha) \leq \overline{\eta}(\alpha)$

証明は, 確率過程 $\{X(t)\}, \{Y(t)\}$ の仮定, randomized stopping timeの性質を用い, Kennedy[9] と同様である.

命題 7.2 以下が成立する.

(1) $f_\alpha(\lambda) = g_\alpha(\lambda)$

(2) $\overline{f_\alpha}(\lambda) = \overline{g_\alpha}(\lambda)$

証明は, Edgar 他 [5] や Kennedy[9] 等と同様である. 無制約の場合は, (pure) stopping time の族での最適値と randomized stopping time の族での最適値が一致することを意味している.

命題 7.3 ξ, $\overline{\xi}$ は凹関数である.

証明は, randomized stopping time の性質を用い, Kennedy[9] と同様である.

命題 7.4 以下が成立する.

(1) $\xi(\alpha) = \psi(\alpha)$

(2) $\overline{\xi}(\alpha) = \overline{\psi}(\alpha)$

(3) $\xi(\alpha)$ は $\phi(\alpha)$ を *dominate* する最小の凹関数である. 但し, $\alpha_i > 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とする.

(4) $\overline{\xi}(\alpha)$ は $\overline{\phi}(\alpha)$ を *dominate* する最小の凹関数である. 但し, $\alpha_i > 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とする.

証明は, randomized stopping time の性質を用い, Kennedy[9] と同様である.

8 最適条件

$\alpha_i > 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とする. 以下の定理の証明は Kennedy[9] と同様である.

8.1 C に対する最適条件

定理 8.1 ある $T_0 \in C$, $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在して,

(1) $E[Y_i(T_0)] \leq \alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

(2) $\langle \overline{\lambda}, \alpha - E[Y(T_0)] \rangle = 0$

(3) $E[X(T_0) - \langle \overline{\lambda}, Y(T_0) \rangle] = \sup_{T\in C} E[X(T) - \langle \overline{\lambda}, Y(T) \rangle]$

を満たすならば, T_0 は (P) の最適な *stopping time* であり, $\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$ が成立する.

定理 8.2 T_0 は (P) の最適な *stopping time* であり, $\phi(\alpha)=\psi(\alpha)$ を満たすならば, ある $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在して,

(1) $\langle\overline{\lambda}, \alpha - E[Y(T_0)]\rangle = 0$

(2) $E[X(T_0)-\langle\overline{\lambda}, Y(T_0)\rangle] = \sup_{T\in C} E[X(T)-\langle\overline{\lambda}, Y(T)\rangle]$

であり, さらに, $\overline{\lambda_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は (D) の最適解である.

8.2 $\overline{C}$ に対する最適条件

定理 8.3 ある $T_0 \in \overline{C}$, $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在して,

(1) $E[Y_i(T_0)] \leq \alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

(2) $\langle\overline{\lambda}, \alpha - E[Y(T_0)]\rangle = 0$

(3) $E[X(T_0)-\langle\overline{\lambda}, Y(T_0)\rangle] = \sup_{T\in\overline{C}} E[X(T)-\langle\overline{\lambda}, Y(T)\rangle]$

を満たすならば, T_0 は $(\overline{P})$ の最適な *stopping time* であり, $\overline{\phi}(\alpha)=\overline{\psi}(\alpha)$ が成立する.

定理 8.4 T_0 は $(\overline{P})$ の最適な *stopping time* であり, $\overline{\phi}(\alpha)=\overline{\psi}(\alpha)$ を満たすならば, ある $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在して,

(1) $\langle\overline{\lambda}, \alpha - E[Y(T_0)]\rangle = 0$

(2) $E[X(T_0)-\langle\overline{\lambda}, Y(T_0)\rangle] = \sup_{T\in\overline{C}} E[X(T)-\langle\overline{\lambda}, Y(T)\rangle]$

であり, さらに, $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は $(\overline{D})$ の最適解である.

8.3 Γ に対する最適条件

定理 8.5 ある $T_0 \in \Gamma$, $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在して,

(1) $E[Y_i(T_0)] \leq \alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

(2) $\langle\overline{\lambda}, \alpha - E[Y(T_0)]\rangle = 0$

(3) $E[X(T_0)-\langle\overline{\lambda}, Y(T_0)\rangle] = \sup_{T\in\Gamma} E[X(T)-\langle\overline{\lambda}, Y(T)\rangle]$

を満たすならば, T_0 は (RP) の最適な *stopping time* であり, $\xi(\alpha)=\eta(\alpha)$ が成立する.

定理 8.6 T_0 は (RP) の最適な *randomized stopping time* であり, $\xi(\alpha)=\eta(\alpha)$ を満たすならば, ある $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在して,

(1) $\langle\overline{\lambda}, \alpha - E[Y(T_0)]\rangle = 0$

(2) $E[X(T_0)-\langle\overline{\lambda}, Y(T_0)\rangle] = \sup_{T\in\Gamma} E[X(T)-\langle\overline{\lambda}, Y(T)\rangle]$

であり, さらに, $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は (RD) の最適解である.

8.4 $\overline{\Gamma}$に対する最適条件

定理 8.7 ある $T_0 \in \overline{\Gamma}$, $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が存在して，

(1) $E[Y_i(T_0)] \leq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

(2) $\langle \overline{\lambda}, \alpha - E[Y(T_0)] \rangle = 0$

(3) $E[X(T_0) - \langle \overline{\lambda}, Y(T_0) \rangle] = \sup_{T \in \overline{\Gamma}} E[X(T) - \langle \overline{\lambda}, Y(T) \rangle]$

を満たすならば，T_0 は $(\overline{RP})$ の最適な *randomized stopping time* であり，$\overline{\xi}(\alpha) = \overline{\eta}(\alpha)$ が成立する．

定理 8.8 T_0 は $(\overline{RP})$ の最適な *randomized stopping time* であり，$\overline{\xi}(\alpha) = \overline{\eta}(\alpha)$ を満たすならば，ある $\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が存在して，

(1) $\langle \overline{\lambda}, \alpha - E[Y(T_0)] \rangle = 0$

(2) $E[X(T_0) - \langle \overline{\lambda}, Y(T_0) \rangle] = \sup_{T \in \overline{\Gamma}} E[X(T) - \langle \overline{\lambda}, Y(T) \rangle]$

であり，さらに，$\overline{\lambda_i} \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は $(\overline{RD})$ の最適解である．

References

[1] Altman, E. : Constrained Markov decision processes. Chapman and Hall/CRC (1999).

[2] 穴太克則 : タイミングの数理. 朝倉書店 (2000).

[3] Baxter, J.R., Chacon, R.V. : Compactness of stopping times. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 40, pp.169–181 (1977).

[4] Coquet, F., Toldo, S. : Convergence of values in optimal stopping and convergence of optimal stopping times. Electronic J. Probab., 12, pp.207–228 (2007).

[5] Edgar, G.A., Millet, A., Sucheston, L. : On compactness and optimality of stopping times. Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach Spaces, Lecture Notes in Math. 939, pp.36–61 (1981).

[6] Ghoussoub, N. : An integral representation of randomized probabilities and its applications. Séminaire de Probabilités XVI, Lecture Notes in Math. 920, pp.519–543 (1982).

[7] Horiguchi, M. : Markov decision processes with a stopping time constraint. Math.Meth. Oper.Res., 53, pp.279–295 (2001).

[8] Horiguchi, M. : Stopped Markov decision processes with multiple constraints. Math.Meth. Oper.Res., 54, pp.455–469 (2001).

[9] Kennedy, D.P. : On a constrained optimal stopping problem. J.Appl.Prob., 19, pp.631–641 (1982).

[10] 今野浩, 山下浩 : 非線形計画法. 日科技連出版社 (1978).

[11] López, F.J., San Miguel, M., Sanz, G. : Lagrangean methods and optimal stopping. Optimization, 34, pp.317–327 (1995).

[12] Luenberger, D.G. : Optimization by vector space methods. John Wiley & Sons (1969).

[13] Makasu, C. : Bounds for a constrained optimal stopping problem. Optim.Lett., 3, pp.499–505 (2009).

[14] Nachman, D.C. : Optimal stopping with a horizon constraint. Math.Oper.Res., 5, pp.126–134 (1980).

[15] Shmaya, E., Solan, E. : Equivalence between random stopping times in continuous time. Preprint, pp.1–15 (2014).

[16] Yong, J., Zhou, X.Y. : Stochastic controls. Springer (1999).