数理解析研究所講究録
第 1941 巻 2015 年 49-56



# 最大カットのベンチマークを最適化ソルバーで解く

生田 拓人 *, 今井 浩 *,†, 矢野 洋祐 *
* 東京大学情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻
† 東京大学ナノ量子情報エレクトロニクス研究機構

## 1 最大カット問題のベンチマーク

無向グラフ $G=(V,E)$ ($V$: 点集合、$E$: 枝集合; $n=|V|$, $m=|E|$) において、点集合の 2 分割 $(V_1,V_2)$ ($V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\emptyset$) によるカット (cut) は、$V_1$ の点と $V_2$ の点を結ぶ枝全体の集合である。各枝 $e\in E$ に重み $w(e)$ が与えられているとき、カットの重みをそれに含まれる枝の重みの和と定める。最大カット問題は、グラフの最大重みのカットを求める問題である。枝の重みがすべて 1 の場合は、最大サイズのカットを求める問題になっている。カットに関する諸問題は、グラフ理論・組合せ最適化・計算量理論・近似アルゴリズム等の様々な面で基本的な役割を果たし、かつ社会科学・物理など他の分野と関係するという点でも重要な問題である。最近では、統計物理でのイジングモデルの基底状態球解という 2 次無制約 2 値計画 (Quadratic Unconstrained Binary Optimization; QUBO) と等価な問題、すなわち最大カットと等価 [25] な問題を量子アニーリングの専用量子コンピュータで解くことなども試みられている。そのような場面で、最大カットのベンチマークが量子アニーリングマシンのベンチマークとして用いられている。最大カット問題の組合せ最適化・半定値計画・計算量に関するまとめを第 2 節で与えておく。

本稿では、最近量子計算周辺でも用いられている最大カットベンチマークである G-set [23] に着目する。このベンチマーク G-set は、Rinaldi による rudy [37] というグラフジェネレータを用いて生成したもので、当初の 500 点までのデータから、半定値計画用のベンチマークとして用いられる中で拡張されて 20000 点のデータまで含むものになっている。rudy は乱数パッケージももっており、マシン独立に、パラメタを指定すれば同じデータが生成できる点でポータブルで、拡張性を有しているといえる。このベンチマークは、最大カットを解く最適化研究者から、半定値計画 [21]、メタヒューリスティックス [8, 31, 40]、そして最近では上述の量子アニーリング研究者 [10, 33] によって使われている。ベンチマークそのものは盛んな情報共有のもと用いられているのに対し、計算結果はあまり共有されていない。

本稿では多様な目的で使われるベンチマークに対して、最適解値やよりよい下界・上界が得られる場合があることを、最適化ソルバーの代表的なものである CPLEX (IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.6.0) を用いて示す。これは、最適化ソルバーのレベルが近年ますます高くなっており、その最先端研究への適用例が増えていることに沿ったもので、G-set に CPLEX を適用した場合の具体的結果を示すものである。CPLEX などの最適化ソルバーの使用法についても、整数計画の定式化の解説 [17] や解説 [34] も日本語のものが提供され、学会活動の中で汎用最適化ソルバー開発元の現状報告 [9] なども行われ、商用最適化ソルバーでも多くがアカデミックライセンスも提供するという状況で、汎用最適化ソルバーそれだけ広い範囲で利用できるようになっている。

G-set を CPLEX の整数線形計画パッケージで解いた結果、G-set の 3 つのグラフクラスであるランダムグラフ、2 平面グラフの合併、トロイダル格子グラフの内、トロイダル格子グラフは最大規模のインスタンス 2 つを除いて、すべて CPLEX は最適解を求めている。トロイダルグラフに対する最大カットは、物理でのイジングモデルの周期条件 2 次元格子での最小エネルギー状態 (基底状態) を求める問題に対応しており、枝重みが正規分布の場合は、整数線形計画での branch-and-cut でかなりのサイズが解けることが知られている [13]。G-set でのトロイダル格子グラフのインスタンスは、正規分布ではなく ±1 を等確率でとる枝重みで [13] では相対的に難しい問題とされているところで、CPLEX 12.6 の汎用ソルバーで 10000 点までのインスタンスの最適解を求めている。それに対し、2 平面グラフの合併、ランダムグラフはこの順により難しいインスタ

ンスであり、よく知られている半定値計画の緩和値と比較することで難易度を評価することができる。実際、2 平面グラフの合併のインスタンスでは、中規模までの問題で半定値計画緩和値よりタイトな上界が得られている。なお、G-set はメタヒューリスティック研究でもベンチマークとして用いられており、トロイダル格子グラフの場合ではこれまでのヒューリスティックが 2000 点までのインスタンスは最適解が得られていたこと、それより大きなインスタンスでは近似解としてのよさがわかる。

以上の計算結果のみで新たな研究課題についての知見は限定的であるが、さらにカット多面体に関するファセットや近年進展が目覚しい拡張定式化に関する理論 (その最大カットに対する成果を第 3 節でまとめる) の研究成果を CPLEX 等を用いて branch-and-bound で用いて計算実験を通して最大カット問題を解析していくなどの方向性が考えられる。

## 2 最大カットに対する研究成果の簡単なまとめ

本節では、まずグラフの最小・最大重みカットの問題に関するアルゴリズム・計算量の既存研究についてまとめることを試みる。

**最小カット・最小重みカット (正重み)** 最小サイズのカット (最小カット) は枝連結度 ($\lambda = \lambda(G)$ で表す) である。枝重みが全て正の値をとるとき、最小カットは多項式時間で求めることができ、この場合のアルゴリズムは次のようになる。

- 最小カットは $O(m+\lambda^2 n\log(n/\lambda))$ 時間 [19] で、最小重みカットは $(mn + n^2\log n)$ 時間 [35] で求めることができる。
- 最小重みカットに対して、Monte Carlo アルゴリズム (高い確率で正解を求めるもの) で $O(m\log^3 n)$ 時間で求めることができる [29]。

**最大 (重み) カット (正重み)** 最小カットが枝連結度そのものであるのに対し、最大サイズのカットでは同様の対応はなく、通例正の重みに限った上で、最大重みのカットを求める問題を考え、それを単に最大カット (Max Cut) と呼ぶこともある。最小 (重み) カットと違い、最大カットは計算困難問題として知られ、実際に Karp が 1972 年に多項式時間還元により示した 21 の NP 完全問題の 1 つである。

**(NP 完全性)** 判定版は NP 完全。重みを全て 1 としても、さらに点の次数を 3 までと限っても、NP 完全のまま。(たとえば [20] 参照)

**(多項式時間で解けるクラス)** 平面グラフの場合、$K_5$ に縮約可能でないグラフの場合は、多項式時間で解ける (以下の一般重みの場合参照)。

**(指数時間アルゴリズム)** 一般重みの場合参照。

**(精度保証付き近似アルゴリズム)** 半定値計画と randomized rounding を用いた

$$\alpha = \min_{0\leq\theta\leq\pi} \frac{2}{\pi}\frac{\theta}{1-\cos\theta} > 0.87856$$

近似値比の多項式時間近似アルゴリズムがある [21]。なお、半定値計画問題は多項式時間の範囲では、指定した誤差の範囲で近似的にしか解けないことに注意する必要がある。さらに、公開されている半定値計画パッケージを用いて実際に計算する場合、解の正しさの度合いを保証するためには、duality gap をチェックするなど最適性に関して万全の注意を払うことが肝要である。

**(近似可能性)** $P \neq NP$ の仮定の下、$16/17 > 0.9412$ よりよい近似値比の多項式時間近似アルゴリズムは存在しない [26, 39]。Unique Games Conjecture [30] が成り立つという仮定の下、$\alpha$ よりよい近似値比の多項式時間近似アルゴリズムは存在しない。

**(高速近似アルゴリズム (含むヒューリスティック))** 一般重みの場合参照。

**最大カット (一般重み)** 上記では最大カットで重みを正の値に限ったが、重みが正負の値をとる場合が最も一般的となる (最大カットで重みが全て負なら、重み正の最小カットに帰着)。

**(NP 完全性)** 正重みの場合からも NP 完全。

**(多項式時間で解けるクラス)** かなり近いが次の 2 クラスが知られている。

- 平面グラフの場合、平面グラフでの双対性を活用し、一般のグラフの最大重みマッチング問題に対する多項式時間アルゴリズムを用いることによって、多項式時間で解くことができる [36, 24, 2]。

- $K_5$ に縮約可能でないグラフの場合は、semimetric polytope を用いて線形計画問題を適用することにより多項式時間で解ける [7]。

**(指数時間厳密解アルゴリズム)** 以下の指数時間アルゴリズムが知られている（たとえば [16] 参照)。

- 幅 $k$ の木分解が与えられた場合、$O^*(2^k)$ 時間で解くことができる。
- 幅 $k$ のパス分解を構成できると $O(2^k kn)$ 時間で解くことができることを用いて、高々次数 3 のグラフの場合は、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$O^*(2^{(1/6+\epsilon)n})$ 時間で厳密解を求めることができる。
- 正方行列乗算定数 $\omega < 2.3728639$ [32] を用いて、$O^*(2^{\omega n/3}) = O(1.73022^n)$ 時間で解くことができる。

**(精度保証付き近似アルゴリズム)** Grothendieck 定数を用いて定数近似値比の多項式時間近似アルゴリズムを構成できる [1]。

**(高速近似アルゴリズム (含むヒューリスティック))** ヒューリスティックスはシミュレーティッドアニーリング、タブー法、遺伝的アルゴリズムなど多数。代表的なものとして、ここでは G-set でよい近似解を得ているタブー法等の 3 つの論文 [8, 40, 31] を参照しておく。精度保証付き近似アルゴリズムとヒューリスティックスを組合せると、解の保証をヒューリスティックスの改善とともに達成できる。半定値計画を精度保証付き近似アルゴリズムで用いる場合、半定値計画部分の高速化も肝要。これらを達成して、重み正の場合で、1%未満の近似比誤差で 100 万超点、300 万超枝のグラフのインスタンスが解かれている [22]。

ここまで見てきたように、グラフの最大カット問題では、半定値計画が大きな役割を果たす。また、量子計算との関係では、サーベイ [27] でも指摘されているように、量子情報と半定値計画は研究黎明期より深く関係しており、実際、量子測定問題 [42] は、最も基本的な半定値計画問題として表されている。また、一般重みの場合の最大カット問題で、Grothendieck 定数が鍵となっているが、これは量子非局所性ゲームに関する論文 [11] で指摘されて以来、量子情報研究での重要なテーマである。Unique Games Conjecture も量子非局所性ゲームに対応している [38]。

## 3　カット多面体とその拡張定式化

Polyhedral Combinatorics (多面体的組合せ論) では、考察対象の本来離散的な組合せ構造に、幾何的な凸多面体（convex polytope; 以下、単に多面体 (polytope) という）を対応させ、多面体の幾何構造を解析に活用して、問題解決を図っていく。その際、線形計画問題 (多数の線形等式・不等式の制約のもと、1 線形関数を最適化する問題) の実行可能領域が多面体であることをアルゴリズム面で利用する。

グラフのカットに対して、カット多面体を考える。このカット多面体の多様な研究成果のうち 20 世紀までに得られたものの多くが [14] にまとめられている。以下、凸多面体に関する定義を簡単に行ったのち、最近の拡張定式化も含めたカット多面体に関する成果をまとめる。凸多面体全般については [43] が詳しい。

多面体は、ベクトル空間の有限点集合の凸包、すなわち点集合の凸 1 次結合全体である。多面体の点で、多面体内の他の 2 点の凸 1 次結合で表せない点を端点 (extreme point; vertex) と呼ぶ。凸多面体は、その端点集合の凸包である。凸多面体を含む最小次元のアフィン空間の次元を、その凸多面体の次元という。（アフィン空間は、ベクトル空間の部分空間を平行移動して得られるもの。）

$d$ 次元の多面体 $P$ を考える。$P$ の境界のみで交わる $d-1$ 次元アフィン空間との共通部分を、多面体の面 (face) という。face も多面体であり、次元が定まる。端点は 0 次元である。$d-1$ 次元の face を facet という。$d-1$ 次元のアフィン空間をこの次元の超平面という。facet を含む超平面 $h_i$ で空間を 2 分割したとき、元の凸多面体を含む側がユニークに定まり、その側と $h_i$ をまとめて半空間 $h_i^+$ で表す。多面体 $P$ の facet を含む超平面が $h_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ であるとき、$P$ は $h_i^+$ $(i = 1, \ldots, N)$ の共通部分としても表せる。多面体 $P$ の、端点集合の凸包としての表現 (V-representation) と、半空間集合の共通部分としての表現 (H-representation) とは、双対的な関係にあり、その相互の間の変換を行う polyhedral computation のソフトウェアも公開されている [18]。

グラフ $G = (V, E)$ のカット $H(\subseteq E)$ に対して、その特性ベクトル $\chi_H \in \{0,1\}^E \subseteq \mathbf{R}^E$ を考え、自明な点集合 2 分割（片方が空集合）に対応する空集

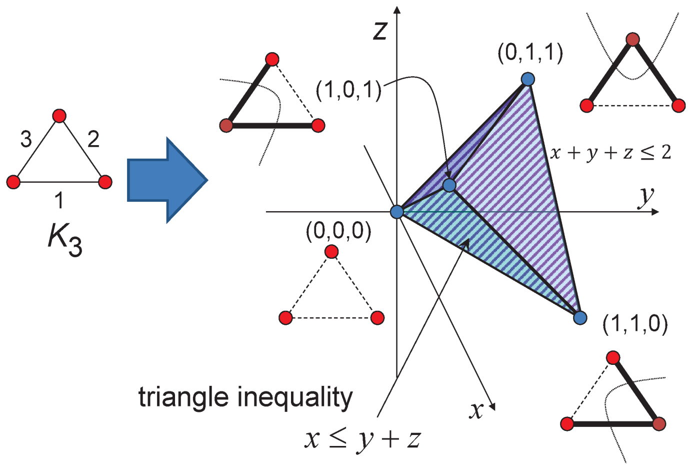


図 1: 完全グラフ $K_3$ のカット多面体 $CUT(K_3)$

合のカットを含め全てのカットの特性ベクトルの凸包をとる。この操作で得られる凸多面体を $\mathrm{CUT}(G)$ と表す ([14] ではカット錐に対する記法であるが、本稿ではカット多面体に使う)。

図 1 に 3 点からなる完全グラフ $K_3$ のカット多面体を示す。この多面体は 3 次元であり、facet により定まる半空間は

$$
\begin{aligned}
x &\le y+z \\
y &\le z+x \\
z &\le x+y \\
x+y+z &\le 2
\end{aligned}
$$

である。図にもあるように、これらは距離の 3 角不等式に対応している。$n$ 点の完全グラフ $K_n$ に対して、その任意の 3 点に対してこの 4 つの 3 角不等式を考えて構成される多面体を semimetric polytope と呼び、それを $\mathrm{MET}(K_n)$ で表す。一般に $\mathrm{CUT}(K_n) \subseteq \mathrm{MET}(K_n)$ で、$\mathrm{CUT}(K_n)$ はグラフの点数に対して指数オーダ個の facets をもつが、semimetric polytope はその数が $O(n^3)$ である。

$d$ 次元多面体 $P$ に対して、より以上の高次元の多面体 $Q$ が $P$ の拡張 (extension) であるとは、$Q$ の線形射影で $P$ が得られることをいう。$P$ の extension complexity を、その拡張の多面体 $Q$ の facets の数の最小値と定める [41]。この extension complexity は、多面体を通して対象構造の複雑度を測るもので、近年量子計算とも関係しながら活発に研究されている。$P$ が指数オーダ個の facets を有していても、その拡張で facets 数が多項式オーダのものがあれば、線形計画法を適用して問題を多項式時間で解くことができる (次元さえ適度な大きさなら)。これまでにカット多面体に関して知られている代表的な成果をまとめると、次のようになる。

(1) $\mathrm{CUT}(K_n) = 2^{\Omega(n)}$ [15]。すなわち、どのような拡張を考えても、facets は指数オーダのままである。このことは Max Cut が NP 困難であることから自然なことともいえるが、これを証明する技法が発展してきた点が重要である。

(2) 上の結果は他のグラフにも拡張でき、たとえば $\mathrm{CUT}(K_{1,n,n}) = 2^{\Omega(n)}$ が示されている [6]。ここで、$K_{1,n,n}$ はサイズが $1, n, n$ の 3 つの点集合の間のみすべて枝がある 3 部完全グラフである。$\mathrm{CUT}(K_{1,n,n})$ の facet を定める不等式は量子情報での一般化 Bell 不等式 (たとえば、一連の研究 [5, 3, 28, 4] 参照) であり、それについて extension を考察しても限界があることを示している。

(3) $n$ 点のグラフ $G$ が $K_5$ に一連の縮約操作で変換できないグラフなら、$\mathrm{MET}(K_n)$ は $\mathrm{CUT}(G)$ の拡張、すなわち $\mathrm{CUT}(G)$ の extension complexity は $O(n^3)$ と多項式オーダ。$G$ が平面グラフでも同様。したがって、このクラスのグラフに対しては、線形計画法を適用することによって、Max Cut が多項式時間で解ける (前出)。

## 4 G-set を CPLEX で解く

G-set は 3 つのタイプのグラフクラスからなる。

**ランダムグラフ** 点数と枝数の密度の 2 つを指定して生成。枝重みは全て 1 のものと、$\pm 1$ を確率 $1/2$ でふったもの。

**2つの平面グラフの合併** 同一点集合上の2つの平面グラフを合併したもの。平面グラフの密度は0.99にし、重みは上と同様の2つ。

**トロイダル格子グラフ** $k \times l$ のトロイダル2次元格子グラフ。重みは上と同様の2つ。

マシンは Intel Xeon CPU 5675@3.07GHz, 24 processors、300GB メモリで、IBM CPLEX 12.6 をデフォルトで実行（24スレッド）した。定式化については、

(1) Max Cut を直接的に各枝に1つの等式条件で2進数表現を用いた0-1整数線形計画 (この定式化法はたとえば解説 [17] にも記述されている)、

(2) Max Cut の Rooted Semimetric Polytope の不等式系 ([14] 参照) を用いた0-1整数線形計画、

(3) Max Cut を等価な2次計画 QUBO に変換し、それを CPLEX の2次計画パッケージで解いたもの、

を試した。CPLEX V12.6.0 では、(3) の QUBO の問題は、Rooted Correlation Semimetric Polytope の不等式系 ([14] 参照) を用いた0-1整数線形計画問題として解いている。これら3つの内、(3) の方法が総じて効率がよい。このことは、Rooted Correlation Semimetric Polytope については、その Chvátal 閉包が、Correlation Semimetric Polytope となっているのに対し、Cut Polytope では同様のことが成立しないこととからも表されていると思われる。そこで実験では (3) の定式化を用いた。なお、量子アニーリングでの Chimera グラフのベンチマークでは、(3) の手法が効率的であることは既に示されている [12]。

表1に計算結果を3つのグラフクラス毎に示す。表において、`#negative-weight edges` は負の重みの枝数を表し、`edges weight` は1の場合すべて1の重み、`1, -1` の場合は等確率で ±1 の値をとる重みを表す。`best published` は著者が出来る限り調べた範囲のメタヒューリスティックに関する論文で与えられている解の値の内、最もよいものを示している。これらは [8, 40, 31]、特にその最初の論文からの値となっている。`SDP upper bound` は、最大カットに対する標準的な SDP 緩和問題の解を小数点以下切り捨てた整数である。なお、この規模の SDP を解く際には、解の精度を注意しないと、収束判定条件や数値誤差によってこの整数値のレベルでも若干ぶれる可能性があることに注意する必要があり、ここではいくつの SDP ソフトで同一の値となっているものなど著者の調べた範囲での代表的値を与えている。`CPLEX lower bound` は CPLEX が branch-and-cut の過程で求めた最もよい解の値 (最適解の下界) を表し、`CPLEX upper bound` は同過程で得られた最もよい上界を表す。下界と上界が一致している場合は最適解が得られており、その場合の下界を太字で示している。対応して、ヒューリスティックスで最適解値が得られていた場合も太字で表している。`CPLEX elasped total time` は総経過時間を表している。24スレッドの並列処理をしているが、24に近い程度の並列化効率がはかられているわけではない。

計算機実験の結論として、

(1) ランダムグラフは CPLEX の整数線形計画パッケージ（MILP）では難しく、下界・上界ともあまりよいものが得られていない。このことは、ランダムグラフを Semimetric Polytope とその拡張での線形計画問題として解いたときの近似率解析の結果にも対応していると思われる。

(2) 2つの平面グラフの合併は、CPLEX MILP で最適解は求められないものの、枝重みが全て1の場合で中規模程度までは、時間をかけることによって SDP よりよい上界が得られる場合もある。

(3) トロイダル格子グラフは、以前から知られているように CPLEX 的なアプローチでかなりのサイズまで厳密に解くことができ、実際に CPLEX 12.6 の MIQP/MILP では10000点までの範囲で最適解を求めることに成功している。このサイズは、平面グラフを CPLEX で解いた際に厳密解が求められる範囲に肉薄するところまでいっている。現在のグラフマイナー理論、拡張定式化の研究の観点から、このクラスを理論的に解析することができるかもしれない。

Max Cut に対するメタヒューリスティックをはじめとした近似解法の観点からは、トロイダル格子グラフのようにかなり大規模な問題まで厳密解が求められている点から、多項式時間で解けるかどうか分かっていない問題であっても構造がよい場合には現代の最適化ソルバで厳密解を得ることが可能で、近似解との比較がこのように大規模なレベルで可能となる事例として興味深い。実際、トロイダル格子グラフについては、中規模まではメタヒューリスティックスが最適解を求めていたことが確認でき、一方より大規模な場合には厳密解にはなっていないものその一歩手前まで到達できていることも理解できる。他のグラフクラスにおいても、半定値計画よりよい上界を得ることで、よりタイトな評価が可能となっている点は評価できるものの、近似解の厳密

表 1: 計算結果

(a) ランダムグラフ

Random graph with edge weights 1

| Name | \|V\| | \|E\| | #negative-weight edges | edge weights | best published | SDP upper bound | CPLEX lower bound | CPLEX upper bound | CPLEX elapsed total time |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G1 | 800 | 19176 | 0 | 1 | 11624 | 12083 | 11390 | 16147 | 20001s |
| G22 | 2000 | 19990 | 0 | 1 | 13359 | 14135 | 12843 | 17704 | 20003s |
| G43 | 1000 | 9990 | 0 | 1 | 6660 | 7032 | 6358 | 8611 | 20000s |
| G55 | 5000 | 12498 | 0 | 1 | 10299 | 11039 | 9780 | 11687 | 20001s |
| G60 | 7000 | 17148 | 0 | 1 | 14186 | 15222 | 13589 | 16344 | 20000s |

Random graph with edge weights 1, -1 with probability 1/2

| Name | \|V\| | \|E\| | #negative-weight edges | edge weights | best published | SDP upper bound | CPLEX lower bound | CPLEX upper bound | CPLEX elapsed total time |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G6 | 800 | 19176 | 9511 | 1, -1 | 2178 | 2656 | 1476 | 6429 | 21784s |
| G27 | 2000 | 19990 | 10016 | 1, -1 | 3341 | 4141 | 2446 | 7869 | 20000s |
| G56 | 5000 | 12498 | 6276 | 1, -1 | 4016 | - | 3661 | 5385 | 20004s |
| G61 | 7000 | 17148 | 8393 | 1, -1 | 5789 | - | 5237 | 7767 | 20000s |

(b) 2 平面グラフの合併

| Name | \|V\| | \|E\| | #negative-weight edges | edge weights | best published | SDP upper bound | CPLEX lower bound | CPLEX upper bound | CPLEX elapsed total time |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G14 | 800 | 4694 | 0 | 1 | 3064 | 3191 | 3052 | 3168 | 14674s |
| G35 | 2000 | 11778 | 0 | 1 | 7686 | 8014 | 7389 | 8256 | 20000s |
| G51 | 1000 | 5909 | 0 | 1 | 3848 | 4006 | 3822 | 3972 | 20000s |
| G58 | 5000 | 29570 | 0 | 1 | 19263 | 20135 | 18753 | 21061 | 20000s |
| G63 | 7000 | 41459 | 0 | 1 | 26997 | 28243 | 26246 | 29270 | 40001s |
| G18 | 800 | 4694 | 2315 | 1, -1 | 992 | 1166 | 969 | 1145 | 10000s |
| G39 | 2000 | 11778 | 5875 | 1, -1 | 2408 | 2877 | 2045 | 3293 | 10001s |
| G59 | 5000 | 29570 | 14737 | 1, -1 | 6078 | 7312 | 5150 | 9006 | 20000s |
| G64 | 7000 | 41459 | 20466 | 1, -1 | 8735 | 10465 | 7340 | 13142 | 100000s |

(c)　トロイダル格子グラフ

| Name | \|V\| | \|E\| | #negative-weight edges | edge weights | best published | SDP upper bound | CPLEX lower bound | CPLEX upper bound | CPLEX elapsed total time |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G11 | 800 | 1600 | 783 | 1, -1 | **564** | 629 | **564** | 564 | 13.77s |
| G12 | 800 | 1600 | 802 | 1, -1 | **556** | 623 | **556** | 556 | 11.92s |
| G13 | 800 | 1600 | 783 | 1, -1 | **582** | 647 | **582** | 582 | 14.23s |
| G32 | 2000 | 4000 | 1989 | 1, -1 | **1410** | 1567 | **1410** | 1410 | 58.59s |
| G33 | 2000 | 4000 | 2015 | 1, -1 | **1382** | 1544 | **1382** | 1382 | 37.59s |
| G34 | 2000 | 4000 | 2024 | 1, -1 | **1384** | 1546 | **1384** | 1384 | 234s |
| G57 | 5000 | 10000 | 5019 | 1, -1 | 3492 | 3885 | **3494** | 3494 | 2118s |
| G62 | 7000 | 14000 | 7040 | 1, -1 | 4868 | 5430 | **4872** | 4872 | 5475s |
| G65 | 8000 | 16000 | 8041 | 1, -1 | 5558 | 6205 | **5562** | 5562 | 12288s |
| G66 | 9000 | 18000 | 8960 | 1, -1 | 6360 | 7077 | **6364** | 6364 | 19897s |
| G67 | 10000 | 20000 | 10071 | 1, -1 | 6940 | 7744 | **6950** | 6950 | 93774s |
| G72 | 10000 | 20000 | 10003 | 1, -1 | 6998 | 7808 | **7008** | 7008 | 14867s |
| G77 | 14000 | 28000 | 13896 | 1, -1 | 9926 | 11045 | 9940 | 9953 | 100037s |
| G81 | 20000 | 40000 | 19983 | 1, -1 | 14030 | 15656 | 14054 | 14096 | 100001s |

解への到達を目指すという点ではさらなる改善の余地がある。

## 謝辞

本研究は文部科学省 イノベーションシステム整備事業の支援により遂行された。第 2 著者の研究の一部は日本学術振興会科学研究費の補助を受けている。著者らは extension complexity をはじめ本稿の内容についての議論もして頂いている京都大学 David Avis 教授に感謝する。

## 参考文献

[1] N. Alon and A. Naor: Approximating the Cut-Norm via Grothendieck's Inequality. *SIAM Journal on Computing*, Vol.35, No.4 (2006), pp.787-803.

[2] K. Aoshima and M. Iri: Comments on F. Hadlock's Paper: "Finding a Maximum Cut of a Planar Graph in Polynomial Time." *SIAM Journal on Computing*, Vol.6, No.1 (1977), pp.86–87.

[3] D Avis, H. Imai and T. Ito: On the Relationship between Convex Bodies Related to Correlation Experiments with Dichotomic Observables. *Jour-*

*nal of Physics A: Mathematical General*, Vol.39 No 36 (2006), pp.11283–11299.

[4] D. Avis, H. Imai and T. Ito: Generating Facets for the Cut Polytope of a Graph by Triangular Elimination. *Mathematical Programming*, Vol.112, No.2 (2008), pp.303–325.

[5] D. Avis, H. Imai, T. Ito and Y. Sasaki: Two-Party Bell Inequalities Derived from Combinatorics via Triangular Elimination. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol.38 (2005), pp.10971–10987.

[6] D. Avis and H. R. Tiwari: On the Extension Complexity of Combinatorial Polytopes. ICALP 2013, Lecture Notes in Computer Science, Vol.7965 (2013), pp.57–68.

[7] F. Barahona: On Cuts and Matchings in Planar Graphs. *Mathematical Programming*, Vol.60 (1993) pp.53–68.

[8] U. Benlic and J.-K. Hao: Breakout Local Search for the Max-Cut Problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol.26 (2013), pp.1162–1173.

[9] C. Bliek, P. Bonami and A. Lodi: Solving Mixed-Integer Quadratic Programming problems with IBM-CPLEX: A Progress Report. *Proceedings of the Twenty-Sixth RAMP Symposium*, 2014, pp.171–180.

[10] S. Boixo, T. F. Rønnow, S. V. Isakov, Z. Wang, D. Wecker, D. A. Lidar, J. M. Martinis and M. Troyer: Evidence for Quantum Annealing with More Than 0ne Hundred Qubits. *Nature Physics*, Vol.10 (2014), pp.218–224.

[11] R. Cleve, P. Hoyer, B. Toner and J. Watrous: Consequences and Limits of Nonlocal Strategies. *Proceedings of the 19th IEEE Annual Conference on Computational Complexity (CCC '04)*, 2004, pp.236–249.

[12] S. Dash: A Note on QUBO Instances Defined on Chimera Graphs. arXiv:1306.1202, 2013.

[13] C. De Simone, M. Diehl, M. Jünger, P. Mutzel, G. Reinelt and G. Rinaldi: Exact Ground States of Ising Spin Glasses: New Experimental Results witha Branch-and-Cut Algorithm. *Journal of Statistical Physics*, vol.80, Nos.1-2 (1995), pp.487–496.

[14] M. M. Deza and M. Laurent: *Geometry of Cuts and Metrics.* Algorithms and Combinatorics Series, Vol.15, Springer, 1997.

[15] S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta, H. R. Tiwary and R. de Wolf: Linear vs. Semidefinite Extended Formulations: Exponential Separation and Strong Lower Bounds. *Proceedings of the 44th Annual ACM symposium on Theory of computing (STOC '12)*, 2012, pp.95–106.

[16] F. V. Fomin and D. Kratsch: *Exact Exponential Algorithms.* Springer, 2010.

[17] 藤江哲也: 整数計画法による定式化入門. オペレーションズ・リサーチ, Vol.57, No.4 (2012), pp.190–197.

[18] K. Fukuda: Frequently Asked Questions in Polyhedral Computation. `www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/polyfaq/polyfaq.html`

[19] H. N. Gabow: A Matroid Approach to Finding Edge Connectivity and Packing Arborescences. *Journal of Computer and System Sciences*, Vol.50 (1995), pp.259–273.

[20] M. R. Garey and D. S. Johnson: *Computers and Intractability — A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman and Company, New York, 1979.

[21] M. X. Goemans and D. P. Williamson: Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems Using Semidefinite Programming. *Journal of the ACM*, Vol.42, No.6 (1995), pp.1115–1145.

[22] L. Grippo, L. Palagi, M. Piacentini, V. Piccialli and G. Rinaldi: SpeeDP: An Algorithm to Compute SDP Bounds for Very Large Max-Cut Instances. *Mathematical Programming, Ser. B*, Vol.136 (2012), pp.353-373/

[23] G-set, `web.stanford.edu/~yyye/yyye/Gset/`

[24] F. Hadlock: Finding a Maximum Cut of a Planar Graph in Polynomial Time. *SIAM Journal on Computing*, Vol.4, No.3 (1975), pp.221–225.

[25] P. Hammer: Some Network Flow Problems Solved with Pseudo-Boolean Programming. *Operations Research*, Vo.13 (1965), pp.388–399.

[26] J. Håstad: Some Optimal Inapproximability Results. *Journal of the ACM*, Vol.48, No.4 (2001), pp.798–859.

[27] H. Imai, M. Hachimori, M. Hamada, H. Kobayashi and K. Matsumoto: Optimization in Quantum Computation and Information. *Proceedings of the 2nd Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, Budapest, 2001, pp.60–69.

[28] T. Ito, H. Imai and D. Avis: Bell inequalities stronger than the Clauser-Horne-Shimony-Holt Inequality for Three-Level Isotropic States. *Physical Review A*, Vol.73, 042109 (2006), 9pp.

[29] D. R. Karger: Minimum Cuts in Near-Linear Time. *Journal of the ACM*, Vol.47, No.1 (2000), pp.46–76.

[30] S. Khot: On the Power of Unique 2-Prover 1-Round Games. *Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of computing (STOC '02)*, 2002, pp.767–775.

[31] G. A. Kochenberger, J.-K. Hao, Z. Lü, H. Wang and G. Glover: Solving Large Scale Max Cut Problems via Tabu Search. *Journal of Heuristics*, Vol.19 (2013), pp.565–571.

[32] F. Le Gall: Powers of Tensors and Fast Matrix Multiplication. *Proceedings of the 39th Inter-*

*national Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2014)*, 2014, pp.296-303.

[33] A. Marandi, Z. Wang, K. Takata, R. L. Byer and Y. Yamamoto: Network of Time-Multiplexed Optical Parametric Oscillators as a Coherent Ising Machine. *Nature Photonics*, Vol.8 (2014), pp.937–942.

[34] 宮代隆平: 整数計画法メモ. `www.tuat.ac.jp/~miya/ipmemo.html`

[35] H. Nagamochi and T. Ibaraki: Computing Edge-Connectivity in Multigraphs and Capacitated Graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol.5, No.1 (1992), pp.54-66.

[36] G. I. Orlova and Ya. G. Dorfman: Finding the Maximum Cut in a Graph (English Translation). *Engineering Cybernetics*, Vol.10 (1972), pp.502-506.

[37] G. Rinaldi: Rudy. `www-user.tu-chemnitz.de/~helmberg/rudy.tar.gz`, 1998.

[38] T. Takahashi, H. Imai, S. Moriyama and D. Avis: Quantum Correlation and Semidefinite Relaxation through 2-Prover 1-Round Interactive Proof. *Proceedings of the Annual Doctoral Workshop on Mathematical and Engineering Methods in Computer Science (MEMICS 2007)*, 2007, pp.217–224.

[39] L. Trevisan, G. B. Sorkin , M. Sudan and D. P. Williamson: Gadgets, Approximation, and Linear Programming. *SIAM Journal on Computing*, Vol.29 No.6 (2000), pp.2074–2097.

[40] Y. Wang, Z. Lü, F. Glover and J.-K. Hao: Probabilisitic GRASP-Tabu Search Algorithms for the UBQP Problem *Computers and Operations Research*, Vol.40 (2013), pp.3100–3107.

[41] M. Yannakakis: Expressing Combinatorial Optimization Problems by Linear Programs. *Journal of Computer and System Sciences*, Vol.43 (1991), pp.441–466.

[42] H. P. Yuen, R. S. Kennedy and M. Lax: Optimum Testing of Multiple Hypotheses in Quantum Detection Theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol.21, No.2 (1975), pp.125–134.

[43] G.M. Ziegler: *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag, 1995.