数理解析研究所講究録
第 1942 巻 2015 年 19-30

1 次元半群作用の極小性について

篠原 克寿

KATSUTOSHI SHINOHARA *†

FIRST 合原プロジェクト・科学技術振興機構

FIRST AIHARA PROJECT, JST

Abstract

本原稿では論文 [1] で議論された 1 次元半群作用の極小性に関する問題に関して，論文では言及できなかったいくつかの点を議論する．具体的には (i)Duminy の定理の特殊な状況下での証明 (ii) Denjoy 風の構成の半群作用に対する適用の困難 (iii)Pisot 数を使った例，の 3 点に関して述べる．

1 はじめに

本研究集会の講演で，筆者は論文 [1] の結果を紹介した．まずは講演の順序に沿ってこの論文に関して簡単に振り返る．

一般に，空間 X が与えられ，その空間から自分自身への写像がいくつか与えられると，それらの写像の有限合成からなる写像全体の集合を考えることで $\mathrm{Map}(X, X)$ の部分半群が得られる．このような半群は自然に X に作用するが，その作用の力学系的性質を研究したい．

このままでは一般的過ぎるので，状況を特殊な場合に限定して考えてみよう．X として単位区間 $I := [0, 1]$ を，そして次のような条件を満たす 2 つの写像の組 (f, g) を考える．

- $f, g : I \to I$ は像への C^1 微分同相写像．
- $f(0) = 0$, $g(1) = 1$.
- $x \in (0, 1)$ に対して $f(x) < x < g(x)$.
- $0 < g(0) < f(1) < 1$.

*本研究は、総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラム（FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト）により，日本学術振興会を通して助成されたものです．

†herrsinon@07.alumni.u-tokyo.ac.jp

これらの条件を条件 $\mathcal{D}$ と呼ぶことにする．なお，最後の条件を overlapping condition と呼ぶ．なぜこう呼ぶかというと，最後の条件は $f(I)$ と $g(I)$ が重なりを持つことを意味するからである．

条件 $\mathcal{D}$ を満たす (f,g) から生成される半群（$\langle f,g\rangle_+$ で書くことにする）の振る舞いを調べたい．特にこの作用の（前方）**極小集合** (minimal set) を調べたい．まずはその定義を述べる．

定義 1 (前方極小集合)
位相空間 X に半群 S が作用しているとき，空でない集合 $M \subset X$ が前方極小集合であるとは，任意の点 $x \in M$ が M 内で密な前方軌道を持つことをいう．ここで，$x \in X$ に対し，$\mathcal{O}_+(x) := \{\phi(x) \mid \phi \in S\}$ を前方軌道といった．この記号を用いると，M が極小であることは，任意の $x \in M$ に対し，$\overline{\mathcal{O}_+(x)} = M$ が成立すること述べられる（上付きの線は閉包をあらわす）．また，半群作用が**極小的**であるとは，全体空間 X 自身が極小集合であること，つまり任意の点の前方軌道が X で密であることと定義する．

(f,g) が条件 $\mathcal{D}$ を満たしている場合，I への $\langle f,g\rangle_+$ への作用が次を満たすことがわかる．

- 極小集合が一意的に存在する．
- その極小集合は $\overline{\mathcal{O}_+(0)}$ に等しい．またこの集合は $\overline{\mathcal{O}_+(1)}$ にも等しい．

これらは次のように観察することができる．まず，極小集合の存在自体は一般的な状況で証明できるので省略する．極小集合が存在したとして，そこから 1 点 p を取る．$\overline{\mathcal{O}_+(p)}$ は 0 を含む．なぜなら $\{f^n(p)\}$ は 0 に収束するからである．よって極小集合は存在するのであれば $\overline{\mathcal{O}_+(0)}$ に等しい．このことは極小集合の一意性を意味している．また対称性よりこれは $\overline{\mathcal{O}_+(1)}$ にも等しい．よって，この状況下において極小集合を調べる，という問題は 0 あるいは 1 の前方軌道の長い時間後の振る舞いを調べる，という問題と言い換えてもいい．

これらの事実は条件 $\mathcal{D}$ から従うものである．この条件はどこから出てきたかというと，論文 [2] では一般の状況下において，1 次元半群作用の極小集合に関する分類が与えられており，条件 $\mathcal{D}$ というのはそこでの分類に出てくる状況のうちのひとつ（もっとも単純な場合）である．この論文では条件 $\mathcal{D}$ の状況を ss-interval と呼んでいる．他の状況でも類似の問題を考えることができるが，まずはこの一番単純な場合に考察を行うのが先決であろう．

さて，このような研究はこれ自体興味深いが，その（筆者の中での）動機付けに関して述べる．一般に，区間上の半群作用が与えられた場合，それから 2 記号からなる全シフト $\Sigma := \{a,b\}^{\mathbb{Z}}$ と skew product をとることで新しい力学系を構成することができる．より具体的にのべる．$\sigma : \Sigma \to \Sigma$ をシフト写像，$f_a, f_b : I \to I$ を像への微分同相写像とするとき，$\Psi : \Sigma \times I \to \Sigma \times I$ を，$\omega \in \Sigma, x \in I$ に対して，$\Psi(\omega, x) := (\sigma(\omega), f_{\omega(0)}(x))$ とすることで定義し，これを **skew product** と呼ぶ（$\omega(0)$ で無限記号列 ω のアドレス 0 に対応する記号を表す）．

このような力学系は多様体上の微分力学系の部分力学系として実現することが可能である．実際，(Σ, σ) が horseshoe として実現できるのは良く知られている．horseshoe を実現する力学系を底空間とし，区間 I をファイバーとするような空間を考え，horseshoe の各点のアドレスに応じてファイバー方向の力学系を適当に定義すれば，この $(\Sigma \times I, \Psi)$ の力学系を部分力学系として含むような，多様体上の微分力学系を構成することができる．このような力学系は近年活発に研究が進んでいる**部分双曲型力学系**と呼ばれるクラスの力学系の例を与え，部分双曲型力学系の理解のために筆者は半群作用の研究に興味を持ったのである．

さて，極小集合は実際どのようになるのだろう．一番単純なのは次の状況である．

命題 2
写像の組 (f, g) が条件 $\mathcal{D}$ を満たし，かつ一様縮小的 (ある $\lambda \in (0,1)$ が存在して $0 < f', g' < \lambda$ となる) である場合は，$\langle f, g\rangle_+$ の I への作用は極小的である．

証明　半群 $\langle f, g\rangle_+$ の第 n 世代の元（f または g をあわせて n 個合成して得られるような元のこと．全部で 2^n 個ある）をすべて考え，それぞれで I を写すことを考える．すると I の中に 2^n 個の区間ができる．これらの区間の合併は I を覆っている．このことは，overlapping condition に注意をして帰納的に考えてみればわかる．

さて，f, g はともに一様縮小的なので，上の合併の各要素である区間は n が大きければとても短い．また，各区間の左端点は 0 の軌道であることに注意しよう．任意に $p \in I$ を固定する．第 n 世代の被覆は I を覆っているので，特に p を含む第 n 世代の区間が存在する．n は任意であるので，これは p のいくらでもそばに 0 の軌道があることを意味する．p は任意なので，これは $\overline{\mathcal{O}_+(0)} = I$ を意味する．これが示したいことであった．

写像 f, g が一様縮小的でない場合，極小集合はどうなるだろう．まず，一様縮小性は極小性の必要条件ではないことに注意する（一様縮小性は座標に依存した概念であることを使えば反例の構成は容易である）．一方で，一様縮小性を持たない半群で，極小的でないような例を構成することは可能である．例をひとつ論文 [1] であたえてある．半群特有の面白い話として次のようなことがある．それは，極小的でない半群作用が与えられたときに，具体的にその極小集合の形状を決定するのは困難である，ということである．群作用の場合は極小集合の trichotomy というのがあるが，半群作用の場合は，周期点でなく，全体にも一致しない極小集合でカントール集合にならないようなものがある可能性は否定できないのである．論文 [3] では例を工夫して構成することで，極小集合がカントール集合であることを証明できるようなものを与えた．

半群作用の極小性に関して興味深いのが，次の結果である．なお，この定理は葉層構造の極小集合に関する Duminy による定理の帰結でもある．なお，本稿で Duminy の定理というので具体的に念頭においているのは [4] の Theorem 3.3.1,（同じ内容の [5] の THÉORÈME A），そして [2] の Theorem 2.2 などである．

定理 3 (Duminy の定理の特別な場合)
ある定数 $K > 0$ が存在して次が成立する：(f, g) は $\mathcal{D}$ を満たし，ともに C^2 写像であると

する．このとき，もし $d_{C^2}(f,\mathrm{id}_I), d_{C^2}(f,\mathrm{id}_I) < K$ が成立するなら，$\langle f,g\rangle_+$ の作用は極小的である．ここで $d_{C^2}(\cdot,\cdot)$ は C^2 距離を，id_I は恒等写像をあらわす．

つまり，「C^2 距離で恒等写像に十分近い写像で生成された場合，縮小性の有無にかかわらず常に作用は極小的となる」というわけである．

微分力学系の研究では，C^1 距離を使うことが多い．それゆえ，上の問題を C^1 距離のもとで考察するのは重要である．筆者は次を証明した．

定理 4 (S, [1])
条件 $\mathcal{D}$ を満たす写像の列 $\{(f_n, g_n)\}$ で，以下の条件を満たすものが存在する．

- $(f_n, g_n) \to (\mathrm{id}_I, \mathrm{id}_I)$ (収束は C^1 距離).
- $\langle f_n, g_n\rangle_+$ の作用は極小的ではない．

この証明は実際に (f_n, g_n) の列を構成することによりなされる．詳細に関しては本稿では述べない．構成の核となるアイデアは「アーベル的作用の変形」にあること，および (f_n, g_n) 自体は C^ω 写像で構成できること（ここでは詳細は述べないが，定理 4 の証明で用いる非極小性の十分条件が C^0 摂動で保存されるので，$\mathcal{D}$ の中で近似を取ればよい）を述べておく．

講演ではこれらに加え，上記定理 3 の証明を述べ，C^1 と C^2 でどこが変わるのかの説明を試みた．本稿の第一の目的は，この定理 3 の証明を述べることである．Duminy の定理自体の証明は [4] にあるが，これらの論文では一般的な状況を扱っており，その裏にあるアイデアが見づらい．今回の状況下においては証明の背後にある構造が非常にわかりやすい．これを次小節で説明する．

本稿の第二の目的は，よく尋ねられる次のような疑問に答えることである．「定理 4 を証明したい，つまり極小性を落としたいのであれば Denjoy の構成を真似るような議論をするのでしょう」との質問を受ける．非常に自然な質問ではあるが，今回の状況ではいわゆる Denjoy の構成を行うには本質的な困難がある．小節 3 で筆者が感じているその困難をなんとか説明してみたい．

第三の目的は以下のものである．Denjoy 構成の難しさを克服するためには自然と「軌道の増大度」の情報が重要になってくる．そこで，「軌道の増大度」が低い半群作用をどう構成するか，ということが問題となる．そのような半群作用を構成する方法として，Pisot 数を用いる方法がある．これに関して最終小節にて説明をする．

2 定理 3 の証明

まずは先ほど述べた定理 3 の簡明な証明を与える．

写像の組 (f,g) は条件 $\mathcal{D}$ を満たすとする．目標は (f,g) が十分 C^2 距離で恒等写像に近ければ，作用が極小的となることである．このことは要するに任意の区間 $L \subset I$ に対し，$L \cap \mathcal{O}_+(0) \neq \emptyset$ となることを示せば十分である．

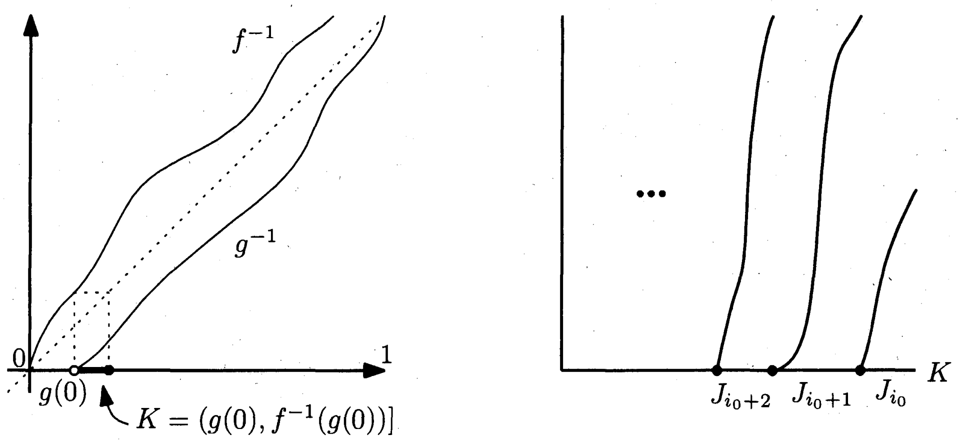

図 1: 区間 K と写像 H の定義の説明．左図：K の定義の説明．　右図：H のグラフの説明．各 J_i 上で $H=f^{-i}\circ g^{-1}$ で，$i \geq i_0+1$ のとき $H|_{J_i}$ は J_i から K への微分同相写像となる．左端点に $\{J_i\}$ が集積しており，よって左側に H の分枝が集積している．

これを次のように言い換えてみる．

「任意の $L \subset I$ に対し，$\phi \in \langle f^{-1}, g^{-1}\rangle_+$ が存在し，$0 \in \phi(L)$ が成立する．」

ここで，$\langle f^{-1}, g^{-1}\rangle_+$ は f^{-1}, g^{-1} を文字とする有限語全体の集合とする（なぜこのような回りくどい言い方をするかというと，逆写像 f^{-1}, g^{-1} には定義域の問題があるので単純に写像を合成したものの集合と言ってしまうことができないためである）．この主張を示すために，次のようなことを考える．(f,g) に対して，(f^{-1},g^{-1}) の反復関数系を考える．$g(0)$ を左端とする f^{-1} の基本領域 $K := (g(0), f^{-1}(g(0))]$ を考える（図 1 左図参照）．$g^{-1}(K) = (0, g^{-1}(f^{-1}(g(0)))]$ の各点に対し，f^{-1} を何度かほどこすと K に戻る（一回もほどこさずに K にいる場合もありうる）．各 $x \in K$ に対し，非負整数 ℓ_x を $(f^{-\ell_x}\circ g^{-1})(x) \in K$ が成立するものとして定義する．写像 $H : K \to K$ を $H(x) := f^{-\ell_x}(g^{-1}(x))$ $(x \in K)$ と定義する．要するに，H は上のような旅程に関する K 上の誘導写像である．以下で，次を証明しよう．

命題 5
写像の組 (f,g) が $\mathcal{D}$ を満たし，f,g がともに C^2 距離で恒等写像に十分近いならば，H は一様拡大的である．より正確に述べると，ある $\mu > 1$ が存在し，$H' > \mu$ が H の連続点で成立する．

これが証明できたとすると，最初に述べた主張は K が f^{-1} の基本領域であることおよび K の左端点は g^{-1} で写すと 0 に写ることを用いれば先に述べた言い換えが示される．

命題 5 の証明は二つに分けられる．

まず，ひとつ目の部分を命題の形で述べよう．そのために記号を準備する．H は K 上区分的に C^2 である．$J_i := \{x \in K \mid \ell_x = i\}$ とおく．添え字 i が若いときには $J_i = \emptyset$ と

なる場合もあるが，i が十分大きければ $J_i \neq \emptyset$ である．より強く，$J_i \neq \emptyset$ を満たす最小の i を i_0 であらわすと，$i \geq i_0$ をみたすすべての i に関して J_i は空集合ではない．状況としては J_i の左隣に J_{i+1} があり，どんどん小さくなってゆく J_i が K の左端に集積していくようになっているわけである（図 1 右図参照）．次の命題は，f, g と恒等写像の C^1 距離を用いて J_i と K の長さの比を評価するものである．

命題 6
写像の組 (f, g) が $\mathcal{D}$ を満たし，f, g がともに C^1 距離で恒等写像に十分近いならば，任意の i に対して $|J_i|/|K|$ の値は小さい（なお，$|\cdot|$ で区間の長さをあらわした）．より正確に述べれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，$d_{C^1}(f, \mathrm{id}_I), d_{C^1}(g, \mathrm{id}_I) < \delta$ であれば，$|J_i|/|K| < \varepsilon$ が成立する．ここで，$d_{C^1}(\cdot, \cdot)$ は C^1 距離である．

証明　$i < i_0$ の場合，$J_i = \emptyset$ なので自明．$i = i_0$ の場合，$g^{-1}(J_{i_0}) \subset (f^{-1} \circ g^{-1})(J_{i_0+1})$ であり，$d(g^{-1}) \approx 1, d(f^{-1} \circ g^{-1}) \approx 1$ としてよいので，$i > i_0$ の場合を扱えば十分である（なおこの式で d は関数の微分を表す.）．

このような i をひとつ固定する．このとき，J_i と J_{i+1} の長さを比較する．定義より，J_i と J_{i+1} に関して $g^{-1}(J_i) = (f^{-1} \circ g^{-1})(J_{i+1})$ が成立する．仮定より $d(g^{-1}) \approx 1, d(f^{-1} \circ g^{-1}) \approx 1$ なので，$|J_i|/|J_{i+1}| \approx 1$ であることが分かる．つまり，「隣接する基本領域の長さはほとんど変わらない」ことが分かる．ここで，f, g の恒等写像への C^1 距離がものすごく小さければ，隣接する基本領域だけでなく，いくつかの連続する基本領域の並びにおいて，それぞれの区間の長さがほとんど変わらないことも同じ論法で結論できることに注意を喚起する．

この段階で $|J_i|/|K|$ が小さな値になることが結論できる．なぜなら，$K = \coprod_{k \geq i_0} J_k$ であり，もし J_i の長さが K に近いとすると，長さを比較することで「$\{J_k\}$ が K を互いに素に被覆している」という事実との矛盾が導かれるためである．

証明を端的に述べれば「f, g の恒等写像への C^1 距離がものすごく小さければ，J_i の長さが短くないと，K の中に $\{J_k\}$ をしまうことができないので，J_i は短くなければいけない」というわけである．なお，この命題では C^2 距離の情報が現れていないことに注意せよ．

命題 6 を使うと，命題 5 の証明はそれほど難しくない．命題 5 の証明を終えて，定理 3 の証明を終わらせよう．そのために 1 次元力学系で頻繁に用いられる distortion estimate に関して復習をしておく．

補題 7
記号は上のままとする．ある定数 $C > 1$ が存在して次が成立する：$x, y \in g^{-1}(J_n)$，$\ell = \ell_x = \ell_y$ とすると，$1/C \leq df^{-\ell}(x)/df^{-\ell}(y) < C$ が成立する（この C は n に依存しない）．さらに，f, g と恒等写像の C^2 距離を絞ることで，この C は 1 にいくらでも近くとることができる．

この補題の言わんとすること大雑把に言うと以下のようなものである．目下の状況において，x を適当に取り $\log(df^n(x))/n$ を計算すると，n が大きければ $\log df'(0)$ になる．同じ基本領域からとった点に対しこの量を計算すると，当然比は 1 に収束するわけだが，写像

が C^2 の場合，基本領域の深さによらない力学系のみに依存する定数が存在し，log をとり n で割る前の微分の値 $df^n(x)$ の比に関して制限が加わる，というわけである．証明は 1 次元力学系の基本的な教科書に出ている（$C \approx 1$ と取れることは計算をすればわかる）ので省略する．

命題 5 を証明し，定理の証明を完結させよう．

証明 （命題 5 の証明）写像の組 (f,g) は条件 $\mathcal{D}$ を満たし，f,g は C^2 距離で恒等写像に近いものとする．特に f, g は C^1 距離で恒等写像に近い．よって命題 6 が使え，任意の i に対し $|J_i|/|K|$ の値はとても小さい．$H|_{J_i}$ を考える．この区間で H は連続微分可能である．従って，平均値の定理より，$z \in J_i$ で $H'(x) \gg 1$ となる点がある．ここで，補題 7 を使う．f が C^2 距離で 1 に近ければ，任意の点 $w \in J_i$ に対し $d(f^{-\ell})(g^{-1}(z))/d(f^{-\ell})(g^{-1}(w))$ の値は 1 に近くなる．仮定より $dg^{-1} \approx 1$ で，$(H|_{J_i})' = d(f^{-\ell}) \cdot dg^{-1} \approx d(f^{-\ell})$ だから，結局任意の点 $x \in J_i$ に対し，$H'(w) \gg 1$ であることが分かった．J_i の i は任意なので，これで H の一様拡大性が証明された．

ということで定理 3 の証明は終わった．証明において，C^1 の情報だけで結論できる部分と C^2 の情報が必要な部分があった．論文 [1] の構成でも，当然命題 6 は適用できるわけである．非常に大雑把に言うと，論文 [1] では端点の周りでの振る舞いを丁寧に見ることで，どこを C^1 摂動すれば distortion estimate が成立しないようにできるか，というのを調べている．

なお定理 3 に出てきた定数 K のとり方は具体的には与えなかったが，具体的にとろうと思えばそれほど難しい話ではない（が本稿では省略する）．

3 Denjoy 構成に関して

さて，前節の議論からいったん離れて，「C^2 でのある種の剛性を C^1 距離の元で壊して，極小性を崩す」というもともとの論点に立ち返ろう．ここだけ見ると Denjoy の構成を誰でも連想するだろう．実際，定理 4 の構成は込み入っており，もっと単純に，たとえば Denjoy 構成を真似ることで簡単に極小性を崩せないかと考えたくはなる．ところが，今回の文脈においては既存の状況とは決定的に違うことがあり，それゆえ通常の Denjoy の戦略をそのまま流用するのは困難である．これを説明したい．一言で違いを述べると，アーベル群作用と非アーベル群作用の「軌道の増大度の違い」が困難を生み出している．

まず，古典的な Denjoy 構成を復習しよう．簡単に歴史を振り返ると，Denjoy によって円周上の C^2 の無理数回転数を持つ微分同相写像が無理数回転に位相共役になることが示された．これが C^1 の場合にどうなるかを考えたくなるのは自然で，同じく Denjoy が無理数回転数を持つ C^1 微分同相写像で極小的でないもの（特に無理数回転写像には位相共役ではない）を構成した．この構成は正則性を $C^{1+\alpha}$ に上げる方向へ，あるいは考える群を複雑にしていく方向に拡張されている（詳しくは [4] を参照）．

さて，Denjoy の構成とは何か．単純に述べると次のようなものである．まず円周上の無理数回転写像 $R: S^1 \to S^1$ を用意する．これに手を加えて，回転数を変えることなく極小

性を落としたい．そのために，まず適当に1点$p \in S^1$を取る．そしてpの軌道$\{R^n(p)\}_{n\in\mathbb{Z}}$を見る．ここで，$R^n(p)$をそれぞれ区間$I$で「置き換える」ことを考えよう．もし「置き換える」ことができたら，できた力学系は極小的ではない．なぜならIの中の点の軌道の閉包は置き換えられたIを含むことができないためである．この操作は 回転数を変えない．なぜなら回転数はS^1上の順序構造からくる組み合わせ論的情報から定まり，置き換えるという行為は順序構造を乱さないためである．

しかし，このままだとこの構成はうまくいかない．各点をIで置き換えると円周の中に無限個の同じ長さの区間が現れるが，円周の長さは有限であるため（よって出来上がったものは円周にならない）である．そこで次のようなトリックを使う．$R^n(p)$を同じIに置き換えるのでなく，$R^n(p)$をI_nと置き換える，ということをする．ここで$\{I_n\}$というのはnに依存した区間の列であり，$\sum_{i\in\mathbb{Z}} |I_n| < +\infty$を満たすようなものである．

たとえば$|I_n| = 2^{-|n|}$と取っておき，上の置き換えを行い，適当にRを補完してゆけば，無理数回転数を持つ円周上の位相同相写像を構成することは容易である．このような写像をC^1微分同相写像として実現するのはより注意が必要である．$|I_n| = 2^{-|n|}$として取ると，出来上がった写像が微分同相写像になるかどうかはまったく分からない（一般にはなりそうもないだろう）．たとえば端点での微分を調節してうまくつながるようにできればよいが，同時に区間の長さの和の収束がどうなるかも気にしなければならない．まとめると，区間の縮ませかたを

- 長さの和が収束するくらいには縮ませるが（総和可能性の問題），
- 微分の調整ができるくらいには縮んでいない（微分可能性の問題）

ように取る，ということを考える必要がある．先の場合，区間を指数関数的に縮ませたが，そうではなく多項式の速さで縮ませるとうまくいく，というのが古典的なDenjoy構成の大まかな議論の流れである．

さて，もとの問題に立ち返ろう．目下の状況において Denjoy 構成をそのまま行うことを考える．そのために出発点となる力学系(f, g)を用意する．少し考えれば次のことが分かる：逆写像の反復関数系(f^{-1}, g^{-1})を用意し，点$x \in I$に対し，

$$\mathcal{O}_-(x) := \{\phi(x) \mid \phi \in \langle f^{-1}, g^{-1}\rangle_+\}$$

とおく．適当に 点pを$\mathcal{O}_-(p) \cap \{0,1\} = \emptyset$となるようにとり，$\mathcal{O}_-(p)$の各点を区間に置き換えて，新しい力学系を作れば，順方向の半群作用は極小的でなくなる（証明は省略する）．

実際このようにして，極小的でない（像に位相同相である）半群作用を構成することはそれほど難しくはない．問題はこのような構成をした結果，できた力学系をC^1にできるか，そしてC^1距離で恒等写像に近いようにできるかということである．問題は上に述べたとおり2つある．前者の問題もまったく非自明だが，後者が決定的に問題を引き起こす，というのを以下で説明したい．

われわれが考えている半群の場合，$\mathcal{O}_-(x)$の世代ごとの増大度は一般的には指数増大度になる．S^1の微分同相写像の場合はこの増大度は時間に対して線形であった．線形だっ

たので，区間の長さを多項式増大度で減少させても総和可能性を確保することが可能であった．ところが，今回の問題の場合，$\mathcal{O}_-(x)$ の増大度は一般には指数関数的である．したがって，置き換える区間の長さの総和可能性を確保するためには，力学系の微分は（大雑把に考えて）その増大度の逆数程度になると見積もられる．すると出来上がる力学系の微分は当然その分だけ大きな C^1 距離を恒等写像から持つことになってしまう．そもそも C^1 にできるかどうかすらよく分からない．

これらの事情により Denjoy 構成の手法が今回の問題に有効かどうかは非自明な議論が必要であることが理解されたのではないかと思われる．なお，上に述べたような「群の増大度の問題」と「双曲性（微分の値）の問題」そしてそれと「極小性の問題」というのはまだ一般的な理論が確立されたわけではないが，背後で何かゆるくつながっているようにも思われる．論文 [6] ではそのような問題意識が別の角度から論じられている．

4 Pisot 数との関係

前節で述べたとおり，問題は山積しており，上のような問題意識を捕らえるための一般論の構築は重要であるように思われる．そのような重厚な話はともかく，単に「例を作る」だけであれば，何か都合の良い出発地点の力学系を見つけ出してしまえばそれでおしまいである．より具体的に言えば，ある力学系であって，$\mathcal{O}_-(x)$ の増大度がゆっくりしたものが取れればそれに Denjoy 構成を行えばよい．そのような力学系を見出す試みとして，Pisot 数を用いる方法がある．これに関して簡単に説明をしたい．

まずはじめに，この小節での「軌道の増大度」の定義を与える．

定義 8
$\langle f^{-1}, g^{-1}\rangle_{+,n}$ を $\langle f^{-1}, g^{-1}\rangle_+$ のうち長さが n 以下の語の集合とし，

$$\mathcal{O}_-(x,n) := \{\phi(x) \mid \phi \in \langle f^{-1}, g^{-1}\rangle_{+,n},\ \phi(x) \text{ は } \textit{well-defined}\}$$

とする．

目標は $\mathcal{D}$ を満たす (f,g) であって $\#(\mathcal{O}_-(x,n))$ の n についての増大度が低い（記号 $\#$ で有限集合の要素数を表す）ような点 x を持つようなものを見つけることである．後に Denjoy 構成を行い極小性を崩すのが目標であるため，さらに条件

$$\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対し } \{0,1\} \cap \mathcal{O}_-(x,n) = \emptyset$$

を要請する．この条件を「**x は分離されている**」と呼ぶことにする．

さて，$\mathcal{D}$ から十分一般的な元をとり，点 x を十分一般的に取れば $\#(\mathcal{O}_-(x,n))$ は n に関して指数関数的に増大することが予想される．とくに，f, g が C^1-距離で恒等写像に近い場合，overlap している部分が大きいので，その速さは大きくなるのではないかと考えられる．適当に定式化することでこの事実は正しいが，本稿ではこの点に関する議論は省略する．軌道の数 $\#(\mathcal{O}_-(x,n))$ の増大度が遅い状況というのはきわめて特殊であるよう

に思われる．一方で，f, g をうまく選ぶことで，分離された x においてこのような特殊な状況を観測することが可能である．以下で，そのような例を具体的に構成していこう．

例としては，f, g がアファイン写像である場合，つまり $f_\gamma(x) := \gamma x$, $g_\gamma(x) := \gamma(x-1)+1$（ただし $\gamma \in (1/2, 1)$）である状況を考える．この場合，以下が示せる．

命題 9
ふたつの写像 $f_\gamma(x) := \gamma x$, $g_\gamma(x) := \gamma(x-1)+1$ *(ただし $\gamma \in (1/2, 1)$)* について，半群作用 $\langle f_\gamma(x), g_\gamma(x)\rangle_+$ を考える．傾き γ に関して，$1/\gamma$ が *Pisot* 数である場合，任意の点 $x \in \mathbb{Q}(\gamma) \cap (0,1)$ に関して，ある定数 C_x が存在し，任意の n に対して $\#(\mathcal{O}_-(x,n)) \leq C_x$ である．特に $\mathcal{O}_-(x)$ は有限集合である．

Pisot 数の定義を思い出しておこう．

定義 10
実数 $\alpha > 1$ が **Pisot 数** であるとは，α が代数的整数であり，α の最小多項式の他の解を $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ としたとき，$|\beta_i| < 1$ が $i = 1, \ldots, n-1$ に関して成立していることを言う．

たとえば黄金比（$x^2 - x - 1 = 0$ の正の解）は Pisot 数である．Pisot 数の基本的事項や力学系への応用に関しては [7, 8] などを参照されたい．本稿に関連する重要な事実として，以下を指摘しておく：Pisot 数の集合を考えると，「最小の Pisot 数」が存在し，それは $x^3 - x - 1 = 0$ の実数解で与えられ，その値は $1.3247\ldots$ で与えられる．

軌道の数 $\#(\mathcal{O}_-(x))$ が有限である場合，Denjoy 構成はきわめて容易に行える．より具体的に，以下が示せる．

命題 11
写像の組 (f, g) が条件 $\mathcal{D}$ を満たし，$x \in I$ は分離されており，$\mathcal{O}_-(x)$ が有限集合であるとする．このとき次のような $(\tilde{f}, \tilde{g})$ が存在する．

- $(\tilde{f}, \tilde{g})$ は条件 $\mathcal{D}$ を満たす．
- $\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_+$ は極小的でない．
- $d_{C^1}(\tilde{f}, \mathrm{id}_I) = d_{C^1}(f, \mathrm{id}_I)$, $d_{C^1}(\tilde{g}, \mathrm{id}_I) = d_{C^1}(g, \mathrm{id}_I)$.

証明 （略証） 軌道 $\mathcal{O}_-(x)$ の各点を同じ長さの区間で置き換える．f, g の振る舞いを各区間上で平行移動になるように補完する．このままだと各区間の端点に f, g の角があるかもしれないが，これらを C^1 距離を変えずに取り除くのは容易である．最後に区間の長さをリスケーリングすればよいが，リスケーリングは C^1 距離を変えない．

本稿では詳しく議論しないが，命題 9 で取れる x を分離されているように取ることは（初等整数論的議論をすることで）可能である．したがって，Pisot 数の逆数の傾きの半群作用から出発し，Denjoy 構成を行えば非極小的な半群作用が得られる．我々にとって不都合な事実は，これでは定理の証明には届かない，ということである．なぜなら「いくらでも 1 に近い Pisot 数」は存在しないからである．

この方法で元の問題を解こうとすると，次のような問題が自然に思いつく．

問題 1
条件 $\mathcal{D}$ を満たす (f,g) で，分離された点 x で $\mathcal{O}_-(x)$ が有限集合となるようなものを持つものを，C^1-距離に関して $(\mathrm{id}_I, \mathrm{id}_I)$ のいくらでも近くに見つけることは可能か？

筆者はこの問題の解答を知らない．

以下で，命題 9 の証明を理解するために $1/\gamma$ が黄金比（α であらわす）の場合に証明を与えておこう．なお，この事実やこの証明自体はおそらく昔から良く知られていたものであると思われる（が，ちょうど良い文献が見当たらなかったので引用は控える）．

証明 点 $r \in \mathbb{Q}(\alpha) \cap (0,1) = \mathbb{Q}(1/\alpha) \cap (0,1)$ を固定する．仮定より $r = r_1\alpha + r_0$ (r_1, r_0 は有理数) とおける．この点の後方軌道を調べる．そのために $F(x) := (f_{1/\alpha})^{-1}(x) = \alpha x$, $G(x) := (g_{1/\alpha})^{-1}(x) = \alpha(x-1)+1$ とおき，F, G の r への作用を調べる．α が $\alpha^2 = \alpha + 1$ を満たすことを用いて計算をすると，

$$F(r) = (r_0 + r_1)\alpha + r_1, \quad G(r) = (r_0 + r_1 - 1)\alpha + r_1 + 1$$

であることが分かる．

このことを「ベクトル表示」してみる．F, G の作用はそれぞれ

$$\tilde{F} : \begin{pmatrix} r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} r_1 \\ r_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{G} : \begin{pmatrix} r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける．つまり，F，G の作用を (r_1, r_0) 平面で見ると，上の 2 つのアファイン写像 $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ から生成される半群作用として理解できるわけである．また，$r = r_1\alpha + r_0$ が区間 $(0,1)$ に属することは，$0 < r_1\alpha + r_0 < 1$ であることと同値である．したがって，r の後方軌道を (r_1, r_0) 平面で見ることというのは，まず上の不等式を満たすような有理点 $r = (r_1, r_0)$ をとり，それに $\tilde{F}, \tilde{G}$ を作用させ，像が帯状領域

$$B_{(0,1)} := \{(r_1, r_0) \mid 0 < r_1\alpha + r_0 < 1\}$$

をはみ出した場合は無視をし，そうでない場合はその像をとってゆく，ということに対応する．

この力学系を理解するうえで重要なのは，行列 A の固有値と固有空間分解である．簡単な計算により，固有方程式は α の最小多項式で与えられることが分かる（これは A の起源が α の掛算から来ていることに起因する）．よって，α 方向の固有方向と，$-1/\alpha$ 方向の固有空間があるわけだが，後者は帯状領域 $B_{(0,1)}$ の境界に平行で，前者はそれに横断的になっていることが（計算すると）分かる（不等式の境界方向に平行な方向の作用が縮小的になるのは Pisot 性が効いている）．これに加えて $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ の固定点がそれぞれ $(0,0)$, $(0,1)$ であることに注意すると，次のことが分かる．

補題 12
任意の $r = r_1\alpha + r_0 \in \mathbb{Q}(\alpha) \cap (0,1)$ に対し，ある (r_1, r_0) 平面内の有界開集合 U_r であって，以下の条件を満たすものが存在する．

- $r \in U_r$.
- $\tilde{F}(U_r) \cap B_{(0,1)} \subset U_r$, $\tilde{G}(U_r) \cap B_{(0,1)} \subset U_r$.

この補題の証明は省略する（r を含む帯状領域で，境界に平行な方向に十分長く伸びているものを取ればよい）.

さて，r の後方軌道の有限性を証明しよう．任意に $r = r_1\alpha + r_0 \in \mathbb{Q}(\alpha) \cap (0,1)$ が与えられたとする．補題 12 を適用し U_r を取る．条件より，r の $\tilde{F}, \tilde{G}$ による軌道は U_r の外に出たのであれば $B_{(0,1)}$ の外に出ている．ここで，行列 A の成分が整数であることに注意する（このことは α が代数的整数であることに起因する）．すると，r の軌道を取っていっても，r_1, r_0 の部分を既約分数表示したものの分母は増加しないことが分かる．U_r は有界集合なので，U_r 内にある有理点で，分母が一定数で抑えられているものの集合は有限集合である．したがって r の軌道のうち，$B_{(0,1)}$ にとどまっているような点の集合は有限集合である．

上の証明が一般の Pisot 数の場合でも有効なのは見て取れるだろうと思う．

参 考 文 献

[1] K. Shinohara, "On the minimality of semigroup actions C^1-close to the identity," accepted, to appear in Proc. Lond. Math. Soc.

[2] P. Barrientos and A. Raibekas, "Dynamics of iterated function systems on the circle close to rotations," accepted, to appear in Ergod. Th. & Dynam. Sys.

[3] K. Shinohara, "Some examples of minimal Cantor sets for iterated function systems with overlap," accepted, to appear in Tokyo J. Math.

[4] A. Navas, "Groups of circle diffeomorphisms," translation of the 2007 Spanish edition. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2011. xviii+290 pp.

[5] A. Navas, "Sur les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches des rotations," Enseign. Math., 50 (2004), 29-68.

[6] C. Bonatti, I. Monteverde, A. Navas and C. Rivas, "Rigidity for C^1-actions on the interval arising from hyperbolicity I: solvable groups," preprint, available from `http://arxiv.org/abs/1309.5277`

[7] R. Salem, "Algebraic numbers and Fourier analysis," D. C. Heath and Co., Boston, Mass. 1963 x+68 pp.

[8] K. Schmidt, "Dynamical systems of algebraic origin," Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer, Basel AG, Basel, 1995. xviii+310 pp.