

# ランダムに摂動されたトーラス上の部分拡大写像のスペクトル

京都大学・人間・環境学研究所 中野雄史

Yushi Nakano

Graduate School of Human and Environmental Studies,  
Kyoto University

## 概要

円上の一樣拡大写像をベースとした円上の回転による歪積写像を考える。この歪積写像がある通有的な条件を満たすとき、その転移作用素はスペクトル・ギャップを持つことが知られている。最近我々は、準古典解析を用いることで、このスペクトル・ギャップがランダムな微小摂動によって保たれるという結果を得た。本稿ではこれを紹介するとともに、この結果がランダム微小摂動下での相関関数の指数的な減衰についてスペクトル構造による正確な条件を与えることを説明する。

## 1 はじめに

力学系理論の基本問題として、力学系の（指数的）混合性がある。コンパクトな Riemann 多様体  $M$  上の力学系  $f: M \rightarrow M$  とその不変測度  $\mu$  が与えられたとき、 $(f, \mu)$  が混合的であるとは、任意の Borel 集合  $A, B$  について

$$\mu(A \cap f^{-n}B) \rightarrow \mu(A)\mu(B), \quad n \rightarrow \infty$$

が成り立つことを言う。これは事象  $A, f^{-n}B$  が漸近的に独立となることを意味し、そのため混合性は力学系の複雑さの指標として用いられる。力学系が混合的であるときは、さらにその相関関数の減衰速度が重要な問題となる。実際、適当な観測量について相関関数が指数的に減衰するとき、力学系の中心極限定理といった様々な統計的性質が成立することが知られている。（例えば [8] などを参照。）

相関関数の指数的減衰を示す典型的な方法として、転移作用素のスペクトル・ギャップを利用する手法がある。力学系  $f$  に対してその Ruelle 転移作用素は  $M_f: \varphi \mapsto \varphi \circ f$  によって  $M$  上の滑らかな関数全体の空間  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$  上に定義される。この Ruelle 転移作用素、およびその  $L^2$  共役作用素  $M_f^*$  (Perron-Frobenius 転移作用素と呼ばれる) のスペクトル構造は、力学系  $f$  の統計的な諸性質について多くの情報をもたらす。特に、転移作用素  $M_f$  が”適当な”関数空間  $E$  上で擬コンパクトであり、絶対値 1 のスペクトルが単純固有値 1 のみであった場合（本稿ではこれを  $M_f$  が  $E$  上でスペクトル・ギャップを持つと呼ぶ）、 $f$  は混合的であってその相関関数が指数的に減衰することが示される。この手法は D. Ruelle らによって拡大写像について用いられて以降、技術的な問題からしばらく進展がなかったが、2002 年に Blank たち [6] によって Anosov 微分同相写像に適合するような非等方 Sobolev 空間が導入され、その上での転移作用素の擬コンパクト性が証明された。この手法はその後様々な方向に拡張され、現在では区分双曲的な流れにまで適応されている ([4])。

上記の Blank たちの手法を部分双曲写像や双曲的な流れに拡張する上で障害となるのが、非双曲的（非拡大的）な方向の存在である。例えば、本稿で扱う力学系は、部分拡大写像の最も簡単なモデルである、2 次元

トーラス  $\mathbb{T}^2$  上の力学系  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,

$$f_0(x, s) = (E_0(x), s + \frac{1}{2\pi}\tau_0(x)) \pmod{\mathbb{Z}} \quad (1.1)$$

であり,  $s$  方向には双曲性 (拡大性) が見られない. (ただし,  $E_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  は  $k$  対  $1$  ( $k \geq 2$ ) の  $\mathcal{C}^\infty$ -拡大写像, つまり  $\lambda_0 := \max \frac{dE_0}{dx} > 1$  であって,  $\tau_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\mathcal{C}^\infty$  級関数である.) この力学系  $f_0$  は, 例えば  $\tau_0$  が定数関数の場合は明らかに混合的とならないため, 転移作用素  $M_{f_0}$  のスペクトル・ギャップを示すためには  $\tau_0$  に何らかの条件を課す必要が生じてくる. 辻井正人氏 [20] は, この部分拡大写像  $f_0$  と本質的に同等な力学系 ( $\mathbb{S}^1$  上の拡大写像から誘導される流れ) について,  $\tau_0$  がある通有的な条件を見れば転移作用素  $M_{f_0}$  が”スペクトル・ギャップ”を持つことを証明した. この条件は F. Faure [10] によって準古典解析と結びつけられることでより深く理解されようになった. (このように部分双曲力学系の転移作用素のスペクトル構造が準古典解析の枠組みで自然と理解されることが発見されたのはかなり最近のことであり, 現在でも活発に研究がなされている; [11, 12, 13, 10] などを参照.) 実際, 部分拡大写像  $f_0$  の  $s$  方向の双曲性の欠落を制御するために, Faure は [10] の中で  $s$  方向のフーリエ解析を利用して転移作用素を  $\nu \in \mathbb{Z}$  でパラメータ付けされた  $E_0 : \mathbb{S}_x^1 \rightarrow \mathbb{S}_x^1$  の (重み付きの) 転移作用素たちの族に分解した. この分解された転移作用素はフーリエ積分作用素の典型例となっており, そのため自然と超局所解析 ( $\nu$  が固定されている場合) と準古典解析 (この場合, 準古典パラメータ  $h \sim \frac{1}{|\nu|}$  は  $0$  に近づく) で扱われる. 大雑把に言えば, Faure は [10] で  $f_0$  が”部分捕獲性”と呼ばれる, 辻井 [20] の通有的な条件と等価な条件を満たせば, 分解された作用素のスペクトル半径が準古典極限  $|\nu| \rightarrow \infty$  で縮小していくことを示した. 先述の通り Ruelle の結果により任意の  $\nu \in \mathbb{Z}$  について分解された転移作用素 (つまり拡大写像の転移作用素) は擬コンパクトであるので, 結果としてこれらの集まりである元の転移作用素のスペクトル・ギャップが結論される.

本稿で述べる主結果は,  $\mathbb{T}^2$  上の部分拡大写像  $f_0$  のスペクトル・ギャップの存在がランダムな摂動に対して保たれるというものである. この結果は J. Wittsten との共同研究であり, JSPS 科研費 (課題番号 11J01842) の助成を受けてのものである. 4 章では, 主結果の応用として微小摂動下での部分拡大写像の相関関数が指数的に減衰するためのスペクトル条件を与える.

主結果を証明する上で最も困難となる点は, 部分捕獲性はあくまで通有的な性質でしかないため, その微小摂動が部分捕獲性を持つかどうか不明な所にある. そこで我々は微小摂動の設定によりふさわしい形で部分捕獲性を拡張し, これが Baladi と Young [5] の意味で安定となることを示した ([17, Proposition 3.5]). 残念ながらこの”弱い部分捕獲性の安定性” (とそれを利用した主結果の証明) を述べるためには Lyapunov 解析と準古典解析に関する長い準備が必要となるため本稿ではほとんどこれに触れることができないが, 興味がある方は [17] を参照していただきたい.

## 2 定義と結果

### 2.1 ランダムな力学系

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を  $\mathbb{P}$  を確率測度として持つような確率空間とし,  $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$  を測度保存的な変換とする. また,  $X$  を可測空間とする. このとき, 可測写像  $\Phi : \mathbb{N} \times \Omega \times X \rightarrow X$  が  $X$  上の  $\theta$  に沿ったランダムな力学系であるとは (RDS, random dynamical system, と略する),  $\Phi$  が以下のコサイクル条件を満たすことを言う: 任意の  $\omega \in \Omega$  について  $\Phi(0, \omega) = \text{Id}_X$  であって,

$$\Phi(n+m, \omega) = \Phi(n, \theta^m \omega) \circ \Phi(m, \omega), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad \omega \in \Omega.$$

ここで,  $\theta\omega$  は  $\theta(\omega)$  を意味し,  $\Phi(n, \omega) = \Phi(n, \omega, \cdot)$  とする. RDS の一般的な性質については Arnold [1] など参照していただきたい.

ノルム付きベクトル空間  $X, Y$  について,  $\mathcal{L}(X, Y)$  を  $X$  から  $Y$  への有界線形作用素全体の空間とし, この空間は作用素ノルム  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$  を持つとする.  $X = Y$  の場合は簡単に  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$  と書く. RDS  $\Phi$  が可分 Banach 空間  $X$  上の  $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$  に沿った線形 RDS であるとは,  $\Phi(n, \omega) = \Phi(n, \omega, \cdot) \in \mathcal{L}(X)$  が任意の  $\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}$  について成り立つことを言う. ある作用素  $A: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X)$  が強可測であるとは, 任意の  $\varphi \in X$  について  $\Omega \ni \omega \mapsto A(\omega)\varphi$  が可測であることを言う.

González-Tokman および Quas [14] からいくつか言葉を借用する.  $X$  を可分 Banach 空間としたとき,  $T \in \mathcal{L}(X)$  のコンパクト指数は

$$\|T\|_{\text{ic}} = \inf\{d: B_1 \text{ は有限個の半径 } d \text{ 以下の球たちによって覆われる}\}$$

で定義される. ( $B_1$  は  $X$  の単位球.) 任意の  $T \in \mathcal{L}(X)$  について,  $T(B_1)$  は半径  $\|T\|_{\mathcal{L}(X)}$  の球で覆われるので,  $\|T\|_{\text{ic}(X)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)}$  となることに注意していただきたい. さらに, コンパクト指数は劣加法的である:

$$\|T_1 + T_2\|_{\text{ic}(X)} \leq \|T_1\|_{\text{ic}(X)} + \|T_2\|_{\text{ic}(X)}, \quad T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X).$$

また, もし  $T \in \mathcal{L}(X)$  がコンパクト作用素であれば  $\|T\|_{\text{ic}(X)} = 0$  である. これらの性質については [19, Chapter 2] を参照していただきたい.

**定義 1.**  $\phi$  を Banach 空間  $X$  上の測度保存的な写像  $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$  に沿った RDS であって, その単位時間写像  $\Phi(1, \cdot): \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X)$  が強可測であるとする. また,  $\omega \mapsto \log^+ \|\Phi(1, \omega)\|$  ( $= \max\{\log \|\Phi(1, \omega)\|, 0\}$ ) が  $L^1(\Omega, \mathbb{P})$  に属しているとする. このとき, 各  $\omega \in \Omega$  について,  $\omega$  における最大 Lyapunov 指数  $r(\omega)$  を

$$r(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Phi(n, \omega)\|_{\mathcal{L}(X)} \quad (2.1)$$

によって (この極限が存在するとき) 定義する. また,  $\omega$  におけるコンパクト指数  $r_{\text{ic}}(\omega)$  を

$$r_{\text{ic}}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Phi(n, \omega)\|_{\text{ic}} \quad (2.2)$$

によって (この極限が存在するとき) 定義する.

$\Phi$  が定義 1 の条件を満たし,  $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$  がさらにエルゴード的であると仮定すると,  $r(\omega)$  と  $r_{\text{ic}}(\omega)$  は  $\mathbb{P}$  についてほとんど確実に (存在して) 定数となる. ([14] の Lemma 2.4, 2.5, Remark 2.6 を参照.) これらの定数を  $r^*, r_{\text{ic}}^*$  と書き,  $r^*$  を  $\Phi$  の最大 Lyapunov 指数,  $r_{\text{ic}}^*$  を  $\Phi$  のコンパクト指数と呼ぶことにする. 定義より  $r_{\text{ic}}^* \leq r^*$  となる.  $r_{\text{ic}}^* < r^*$  のとき, 線形 RDS  $\Phi$  は擬コンパクトであるという.  $r^*$  は決定論的な系におけるスペクトル半径 (の対数) に対応し,  $r_{\text{ic}}^*$  は本質的スペクトル半径 (の対数) に対応する. さらに  $\omega \mapsto \log^+ \|\Phi(1, \omega)\| \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$  より  $r^* < \infty$  に注意されたい.

## 2.2 摂動のモデル

$(\Omega, \mathcal{F})$  を確率測度  $\mathbb{P}$  を持つような Lebesgue 空間とする.  $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$  をエルゴード的で  $\mathbb{P}$ -測度保存的な双可測写像とする.  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2)$  を  $\mathbb{T}^2$  上の滑らかな写像全体からなる空間で,  $\mathcal{C}^\infty$ -距離

$$d_{\mathcal{C}^\infty}(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_{\mathcal{C}^n}(f, g)}{1 + d_{\mathcal{C}^n}(f, g)},$$

を持つものとする。(  $d_{\mathcal{G}^n}(f, g)$  は  $f$  と  $g$  の通常の  $\mathcal{G}^n$ -距離.)  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2)$  にはこの距離による Borel  $\sigma$ -代数が備わっているものとする.

$\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  を可測写像  $f_\epsilon: \Omega \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2)$  たちの族であって任意の  $\epsilon > 0$  について  $f_\epsilon(\omega)$  が  $\mathbb{P}$  に関してほとんどすべての  $\omega \in \Omega$  について

$$f_\epsilon(\omega): \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kg_\epsilon(\omega, x) \pmod{1} \\ s + \frac{1}{2\pi}\tau_\epsilon(\omega, x) \pmod{1} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

の形となっていて, 任意の  $z = (x, s) \in \mathbb{T}^2$  について  $\omega \mapsto f_\epsilon(\omega)(z)$  が  $\Omega$  から  $\mathbb{T}^2$  への可測写像であるものとする. ここで  $\mathbb{P}$  についてほとんど確実に  $g_\epsilon(\omega) = g_\epsilon(\omega, \cdot): \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  は  $\mathcal{C}^\infty$ -微分同相写像であって  $\tau_\epsilon(\omega) = \tau_\epsilon(\omega, \cdot): \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  が  $\mathcal{C}^\infty$ -関数であるとする. さらに,

$$\operatorname{ess\,sup}_\omega d_{C^0}(f_\epsilon(\omega), f_0) \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0), \quad (2.4)$$

が (1.1) で与えられた部分拡大写像  $f_0$  に関して成り立つとする.  $f_\epsilon(\omega)(z)$  を簡単に  $f_\epsilon(\omega, z)$  と書く. このとき, 任意の  $\epsilon > 0$  について  $(\omega, z) \mapsto f_\epsilon(\omega, z)$  は  $\Omega \times \mathbb{T}^2$  から  $\mathbb{T}^2$  への可測写像となる. (例えば [9, Lemma 3.14] を参照.) 必要に応じて  $f_0: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  と定数写像  $\Omega \ni \omega \mapsto f_0$  を同一視する.

任意の  $\epsilon \geq 0$  と  $\omega \in \Omega$  について  $E_\epsilon(\omega)$  により写像  $E_\epsilon(\omega): x \mapsto kg_\epsilon(\omega, x) \pmod{1}$  を表すこととする. ( $\epsilon = 0$  の場合, 任意の  $\omega$  について  $E_{\epsilon=0}(\omega) = E_0$  と考える.) 任意の十分小さな  $\epsilon > 0$  について  $\mathbb{P}$  に関してほとんど確実に  $E_\epsilon(\omega)$  は拡大写像となる. 実際,  $\lambda_0 = \min_x E'_0(x)$  とし  $\lambda = (\lambda_0 + 1)/2$  とすれば,  $\lambda > 1$  であって  $\epsilon_0 > 0$  が存在して

$$\operatorname{ess\,inf}_\omega \min_x \frac{dE_\epsilon(\omega, x)}{dx} \geq \lambda, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0 \quad (2.5)$$

となる. 以下では簡単のため  $dE_\epsilon(\omega, x)/dx$  をたびたび  $E'_\epsilon(\omega, x)$  と書く.

**注意 2.** 混乱がないかぎり, ノイズ強度  $\epsilon$  をたびたび表記から省くこととする. 特に, 確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  とベース写像  $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$  を除いてはノイズパラメータ  $\omega$  への依存はつねに  $\epsilon$  への依存を意味するので,  $\omega$  への依存が明示されているときは  $\epsilon$  をたびたび表記しない. また, 本稿では  $\epsilon_0$  を (仮に  $\epsilon_0$  が取り直されたとしても) (2.5) を満たすものとする. さらに, 以下では表記から  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  や  $\theta$  を省略することとする. (例えば, 「 $\mathbb{P}$  についてほとんど確実に」の代わりに「ほとんど確実に」と書く.) 本稿では  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  および  $\theta$  は固定されているのでこれらの省略が混乱を招くことはない.

各々の  $\epsilon > 0$  と  $n \geq 1$  について,  $f_\epsilon^{(n)}(\omega, z)$  を (二重) 歪積写像

$$\Theta_\epsilon(\omega, z) = (\theta\omega, f_\epsilon(\omega, z)), \quad \omega \in \Omega, \quad z \in \mathbb{T}^2,$$

の  $n$  回合成のファイバー成分とし,  $f_\epsilon^{(0)}(\omega) = \operatorname{Id}_{\mathbb{T}^2}$ ,  $\omega \in \Omega$  とする.  $f_\epsilon^{(n)}(\omega) = f_\epsilon^{(n)}(\omega, \cdot)$  の表記を使えば, 明示的に

$$f_\epsilon^{(n)}(\omega) = f_\epsilon(\theta^{n-1}\omega) \circ f_\epsilon(\theta^{n-2}\omega) \circ \cdots \circ f_\epsilon(\omega),$$

を得る. 写像  $(n, \omega, z) \mapsto f_\epsilon^{(n)}(\omega, z)$  は  $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$  に沿った  $\mathbb{T}^2$  上の RDS なので, これを  $f_\epsilon$  により誘導される RDS と呼ぶ. 簡単のため

$$E_\epsilon^{(n)}(\omega, x) = E_\epsilon(\theta^{n-1}\omega) \circ \cdots \circ E_\epsilon(\omega)(x), \quad n \geq 1,$$

$$\tau_\epsilon^{(n)}(\omega, x) = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_\epsilon(\theta^j\omega, E_\epsilon^{(j)}(\omega, x)), \quad n \geq 1.$$

の表記を使うこととする。ただし総和において、 $\theta^0$  と  $E_\epsilon^{(0)}(\omega, \cdot)$  は  $\Omega$  および  $\mathbb{S}^1$  上の恒等写像であると考えられる。このとき、

$$f_\epsilon^{(n)}(\omega) : \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} E_\epsilon^{(n)}(\omega, x) \pmod{1} \\ s + \frac{1}{2\pi} \tau_\epsilon^{(n)}(\omega, x) \pmod{1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1. \quad (2.6)$$

$f_\epsilon^{(n)}(\omega)$  に対応する Perron-Frobenius 転移作用素  $M_{f_\epsilon^{(n)}(\omega)}^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$  を

$$M_{f_\epsilon^{(n)}(\omega)}^* \psi(z) = \sum_{f_\epsilon^{(n)}(\omega, z')=z} \frac{\psi(z')}{|\det D_z f_\epsilon^{(n)}(\omega, z')|}, \quad \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2), \quad (2.7)$$

によって定義する。ただし  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$  は  $\mathbb{T}^2$  上の  $\mathcal{C}^\infty$  級複素数値関数全体の空間である。(2.5) と (2.6) によりほとんど確実に

$$\det D_{x,s} f^{(n)}(\omega, (x', s')) = \frac{d(E^{(n)}(\omega, x'))}{dx} > 1 \quad (2.8)$$

となる。よって、ほとんど確実に作用素  $M_{f_\epsilon^{(n)}(\omega)}^*$  は  $L^2(\mathbb{T}^2)$  上の作用素に拡張される。この拡張も  $M_{f_\epsilon^{(n)}(\omega)}^*$  と書くことにする。この作用素の  $L^2$  内積による共役作用素  $M_{f_\epsilon^{(n)}(\omega)}$  は  $M_{f_\epsilon^{(n)}(\omega)} \psi(z) = \psi(f_\epsilon^{(n)}(\omega, z))$  で与えられる通常の Ruelle 転移作用素となる。

### 2.3 転移作用素のフーリエ分解

しばらくの間  $\epsilon$  を固定し表記から省略する。Faure [10] によって扱われた非摂動の場合と同様、以下のフーリエ成分への分解を考える：

$$L^2(\mathbb{T}^2) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_\nu, \quad \mathcal{H}_\nu = \{(x, s) \mapsto \varphi(x) e^{2i\pi\nu s} : \varphi \in L^2(\mathbb{S}^1)\}. \quad (2.9)$$

空間  $(\mathcal{H}_\nu, \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T}^2)})$  と  $L^2(\mathbb{S}^1)$  は等長同型である。各々の  $\nu \in \mathbb{Z}$  と  $\omega \in \Omega$  について、 $M_{\nu,n}(\omega)$  によって作用素  $M_{f^{(n)}(\omega)}$  の  $\mathcal{H}_\nu$  への制限を表すとする。簡単な計算により、任意の  $\psi(x, s) = \varphi(x) e^{2i\pi\nu s}$ ,  $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1)$  についてほとんど確実に

$$M_{f^{(n)}(\omega)} \psi(x, s) = \varphi(E^{(n)}(\omega, x)) e^{i\nu \tau^{(n)}(\omega, x)} e^{2i\pi\nu s}, \quad n \geq 1,$$

が成り立つ。よって、 $\mathcal{H}_\nu$  と  $L^2(\mathbb{S}^1)$  を同一視することにより、ほとんど確実に  $M_{\nu,n}(\omega)$  は

$$M_{\nu,n}(\omega) \varphi(x) = \varphi(E^{(n)}(\omega, x)) e^{i\nu \tau^{(n)}(\omega, x)}, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{S}^1) \quad (2.10)$$

で与えられる  $L^2(\mathbb{S}^1)$  上の作用素となる。

同様に、各々の  $\nu \in \mathbb{Z}$  と  $\omega \in \Omega$  について、 $M_{\nu,n}^*(\omega)$  によって作用素  $M_{f^{(n)}(\omega)}^*$  の  $\mathcal{H}_\nu$  への制限とする。任意の  $\psi(x, s) = \varphi(x) e^{2i\pi\nu s}$ ,  $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1)$  について、ほとんど確実に

$$M_{f^{(n)}(\omega)}^* \psi(x, s) = \sum_{f^{(n)}(\omega, (x', s'))=(x,s)} \frac{\varphi(x') e^{2i\pi\nu s'}}{|\det D_{x,s} f^{(n)}(\omega, (x', s'))|}$$

となる。もし  $f^{(n)}(\omega, (x', s')) = (x, s)$  であれば  $s' = s - \frac{1}{2\pi} \tau^{(n)}(\omega, x') \pmod{1}$  であるので、(2.8) より分解 (2.9) は保たれる。さらに、固定された  $s$  に対しては  $s'$  が  $x'$  によって一意に定まるので、 $\mathcal{H}_\nu$  と  $L^2(\mathbb{S}^1)$  を同一視することでほとんど確実に  $M_{\nu,n}^*(\omega)$  を  $L^2(\mathbb{S}^1)$  上の作用素

$$M_{\nu,n}^*(\omega) \varphi(x) = \sum_{E^{(n)}(\omega, y)=x} \frac{e^{-i\nu \tau^{(n)}(\omega, y)}}{dE^{(n)}(\omega, y)/dy} \varphi(y), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{S}^1) \quad (2.11)$$

とみなすことができる。双対性より、 $M_{\nu,n}^*(\omega)$  は (2.10) で定義されていた  $M_{\nu,n}(\omega)$  の  $L^2$ -共役作用素と一致する。簡単のため、任意の  $\omega \in \Omega$  と  $\nu \in \mathbb{Z}$  について  $M_{\nu,0}(\omega) = M_{\nu,0}^*(\omega) = \text{Id}_{L^2(\mathbb{S}^1)}$  と定義する。簡単な計算により  $(n, \omega, \varphi) \mapsto M_{\nu,n}^*(\omega)\varphi$  は線形 RDS となることが確かめられる。

**注意 3.** 固定された  $\omega \in \Omega$  と  $n \in \mathbb{N}$  について、 $M_{\nu,n}^*$  は  $\nu \in \mathbb{Z}$  を指数とする作用素の族と見ることができ、一方、 $\nu \rightarrow \pm\infty$  に依存する 1 つの作用素と見なすこともできる。さらには、準古典パラメーター  $h = 1/|\nu|$  に関する準古典極限  $h \rightarrow 0$  での  $M_{\pm 1/h,n}^*(\omega)$  のスペクトルを解析することになる。そのため、都合に応じて  $\nu \in \mathbb{Z}$  を準古典パラメーターと呼ぶこととする。

### 3 転移作用素のスペクトル構造

主結果について述べる前の最後の準備として、 $\mathbb{S}^1$  上の (準古典) Sobolev 空間について思い出すことにする。まず、作用素  $M_{\nu,n}^*(\omega) : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$  が双対性

$$\langle M_{\nu,n}^*(\omega)u, \bar{\varphi} \rangle = \langle u, \overline{M_{\nu,n}(\omega)\varphi} \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1),$$

によって  $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$  上に自然な拡張を持つことに注意する。ここで  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は超関数のペアである。 $m \in \mathbb{R}$  について、指数  $m$  の  $\mathbb{S}^1$  上の Sobolev 空間を  $H^m(\mathbb{S}^1) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$  と書く。(詳しい定義については例えば Hörmander [16] を参照。)  $\langle \xi \rangle = (1 + \xi^2)^{1/2}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  として、 $m \in \mathbb{R}$  について表象  $\xi \mapsto \langle \xi \rangle^m$  による準古典作用素  $\langle hD \rangle^m$  を Fourier 側での  $\langle h\xi \rangle^m$  のかけ算作用素として定義する：

$$\langle \langle hD \rangle^m u, \varphi \rangle = \sum_{\xi \in 2\pi\mathbb{Z}} \langle h\xi \rangle^m \hat{u}(\xi) \hat{\varphi}(-\xi), \quad \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1).$$

$\nu \in \mathbb{Z}$  を準古典パラメーターと見るとき、 $|\nu|$ -依存の  $H^m(\mathbb{S}^1)$  上のノルム  $\| \cdot \|_{H_\nu^m}$  を

$$\|u\|_{H_\nu^m}^2 = \sum_{\xi \in 2\pi\mathbb{Z}} |(\xi/\nu)^m \hat{u}(\xi)|^2, \quad u \in H^m(\mathbb{S}^1), \quad 0 \neq \nu \in \mathbb{Z}$$

によって定義する。(  $\nu = 0$  の場合、 $\| \cdot \|_{H_\nu^m}$  は通常の  $\mathbb{S}^1$  上の指数  $m$  の Sobolev ノルムとする。)  $H_\nu^m(\mathbb{S}^1)$  によってノルム  $\| \cdot \|_{H_\nu^m}$  が備えられた空間  $H^m(\mathbb{S}^1)$  を表すこととする。もし  $h = 1/|\nu|$  であれば、 $\langle hD \rangle^m : H_\nu^s(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_\nu^{s-m}(\mathbb{S}^1)$  は任意の  $s \in \mathbb{R}$  について同型写像となる。特に、空間  $H_\nu^m(\mathbb{S}^1)$  と  $\langle hD \rangle^{-m}(L^2(\mathbb{S}^1))$  は各々の  $m \in \mathbb{R}$  について同一視することができ、 $H_\nu^m(\mathbb{S}^1)$  は  $H_\nu^{-m}(\mathbb{S}^1)$  の  $L^2$ -共役空間となる。

作用素  $M_{\nu,n}^*(\omega) : H^m(\mathbb{S}^1) \rightarrow H^m(\mathbb{S}^1)$  のスペクトル構造に関する主結果を述べる。1 つ目の結果で任意の固定された  $\nu \in \mathbb{Z}$  に関して、

$$\mathbb{N} \times \Omega \times H^m(\mathbb{S}^1) \ni (n, \omega, \varphi) \mapsto M_{\nu,n}^*(\omega)\varphi \quad (3.1)$$

で与えられる写像が  $H^m(\mathbb{S}^1)$  上の RDS であって定義 1 の条件を満たすことを示す。パラメーター  $\nu$  への依存を示唆するために、対応する最大 Lyapunov 指数とコンパクト指数を  $r\{\nu\}$  と  $r_{\text{ic}}\{r\}$  と表記する。以下では、単位時間写像  $M_{\nu,1}^* : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H^m(\mathbb{S}^1))$  を  $M_\nu^*$  と書くこととする。簡単のため、たびたび (3.1) で与えられる線形 RDS を  $M_\nu^* : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H^m(\mathbb{S}^1))$  から誘導される線形 RDS と呼ぶこととする。同様に、 $M_\nu^*(\omega)$  の共役作用素を  $M_\nu(\omega) = M_{\nu,1}(\omega)$  と書く。

$m > 0$  として、

$$r_m = \log(\lambda^{-m - \frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}) \quad (3.2)$$

とおく. このとき  $r_m$  は  $n, \nu, \omega$  に依存しない定数であって,  $m \rightarrow \infty$  のとき  $r_m \rightarrow -\infty$  となる. 次の定理は [10, Theorem 2] の微小摂動の設定への拡張となっている.

**定理 4** (転移作用素の Lyapunov 離散スペクトル).  $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  を  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2)$ -値確率変数の族であって (2.3) と (2.4) を満たすものとする. 任意の  $\nu \in \mathbb{Z}$  について  $M_{\nu,n}^*(\omega) = M_{\nu,n}^*(\epsilon; \omega)$  を (2.11) によって定義された作用素であるとする.  $m$  を正の整数として,  $r_m$  を (3.2) で定義される量とする. このとき  $\nu$  によらない定数  $\epsilon_0 = \epsilon_0(m) > 0$  が存在して,  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$  であれば  $(n, \omega, \varphi) \mapsto M_{\nu,n}^*(\omega)\varphi$  は Sobolev 空間  $H^m(\mathbb{S}^1)$  上の線形 RDS であって, その最大 Lyapunov 指数  $r\{\nu\}$  は  $r\{\nu\} \leq 0$ , そのコンパクト指数  $r_{ic}\{\nu\}$  は  $r_{ic} \leq r_m$  を満たす.

決定論的な場合 (つまり,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  が 1 点からなる自明な確率空間で  $\theta$  が  $\Omega$  上の恒等写像であるとき),  $M_{\nu,n}(\omega) = (M_\nu(\omega))^n$  となる. このとき, 定理 4 より  $M_\nu^*(\epsilon)$  のスペクトル半径は 1 以下となり, その本質的スペクトル半径は  $e^{r_m}$  (これは  $m$  が十分大きいとき  $< 1$ ) となる. つまり, 半径  $e^{r_m}$  の外のスペクトル (空となる場合もありうる) は離散的となり, それらは有限の重複度を持つ固有値となる. これらの固有値は Ruelle 共鳴と呼ばれる. さらに 4 章で,  $M_\nu^*$  によって誘導される線形 RDS の ( $r_m$  より大きい) Lyapunov 指数が本稿の設定における離散スペクトルの役割を (例えば相関関数の減衰速度の評価において) 果たすことを示す.

次の結果は Faure [10] の Theorem 3 に対応しており, (定理 4 と合わせることにより) Faure によって示された摂動のない系でのスペクトル・ギャップの存在が微小摂動によって保たれることを主張する.

**定理 5** (準古典極限における転移作用素のスペクトル・ギャップ).  $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  を  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2)$ -値確率変数の族であって (2.3) と (2.4) を満たすものとする. さらに  $f_0$  は部分捕獲性 ([10, Definition 15] を参照) を満たすとする. このとき, 任意の  $\rho > \lambda^{-1/2}$  に対して, 正の整数  $m_0$  および整数  $m \geq m_0$  に依存する数  $\epsilon_0(m), \nu_0(m), c_0(m)$  が存在して, 任意の  $m \geq m_0, |\nu| \geq \nu_0$  および  $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$  について

$$\|M_{\nu,n}^*(\omega)\|_{\mathcal{L}(H_\nu^m)} \leq c_0 \rho^n, \quad n \geq 1,$$

がほとんど確実に成り立つ.

**注意 6.** 部分捕獲性という用語は Faure [10, Definition 15] による. この性質と同等な定義は辻井 [20] によって初めて導入され, 通的な条件であることが示された: 拡大写像  $E_0$  が与えられたとき, ほとんどすべての  $\tau_0$  について (1.1) の形で与えられる  $f_0$  は部分捕獲性を満たす. より正確な記述については [20, Theorem 1.2, Remark 1.5] を参照. Faure [10] における 1479 ページの remark とも比較していただきたい.

定理 4 と 5 の結果は 4 章でランダムな力学系  $f_\epsilon^{(n)}(\omega)$  の相関関数の減衰速度に関する情報を得るために利用される. 一方でこれらの定理の証明については本稿では扱わないので, 興味がある方は [17, Section 2, 3] を参照していただきたい. 本稿では基本的に  $\mathbb{S}^1$  上の関数空間しか扱わないので, 混乱がなければたびたび記法から  $\mathbb{S}^1$  を省略することとする. (例えば  $H^m(\mathbb{S}^1)$  の代わりに  $H^m$  と書く.)

## 4 ランダムな相関関数の減衰

この章では定理 4 と 5 が適当なスペクトルに関する条件の下での微小摂動  $f_\epsilon$  ( $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ ) の相関関数の指数的減衰を結論することを説明する. 証明は [17, Section 4] を参照していただきたい.

## 4.1 不変測度

Arnold [1, Chapter 1] からいくつか用語を準備する.  $f: \Omega \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \Omega \times \mathbb{T}^2$  を可測写像とする.  $\mathcal{B}(\mathbb{T}^2)$  を  $\mathbb{T}^2$  上の Borel- $\sigma$ -代数とする.  $\Omega \times \mathbb{T}^2$  上の測度  $\mu$  が  $f$ -不変であるとは  $\mu$  が歪積写像  $\Theta(\omega, z) = (\theta\omega, f(\omega, z))$  について不変であって周辺分布  $\pi_\Omega \mu$  (ここで  $\pi_\Omega: \Omega \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \Omega$  は  $\Omega$  への射影) が  $\mathbb{P}$  と一致することを言う.  $\mu$  が  $f$ -不変な確率測度であるとき, 唯一つ関数  $\mu_\omega(\cdot): \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{T}^2) \rightarrow [0, 1]$ ,  $(\omega, B) \mapsto \mu_\omega(B)$  が存在して,

1.  $\omega \mapsto \mu_\omega(B)$  は任意の  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^2)$  について可測,
2.  $\mathbb{P}$  に関してほとんど確実に  $\mu_\omega$  は  $\mathbb{T}^2$  上の確率測度,
3.  $\int u d\mu = \int u d\mu_\omega dP$  が任意の  $u \in L^1(\mu)$  について成立する.

ことが知られている. さらに,  $\theta$  は双可測であると仮定していたので,  $\mu_\omega$  の  $f(\omega)$  による pushforward  $f(\omega)\mu_\omega$  はほとんど確実に  $\mu_{\theta\omega}$  と一致することが知られている ([1, Chapter 1]).  $\mu_\omega(\cdot)$  を  $\mu$  の ( $\mathbb{P}$  に関する) 条件付き確率と呼ぶ.

$\mu$  を  $f$ -不変な測度とし,  $\mu_\omega(\cdot)$  を  $\mu$  の条件付き確率とする. 任意の  $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty$  について  $(f, \mu)$  の (操作的) 相関関数  $\text{Cor}_{\phi, \psi}(\omega, n)$  を

$$\text{Cor}_{\phi, \psi}(\omega, n) = \int \phi \circ f^{(n)}(\omega) \cdot \bar{\psi} dx ds - \int \phi d\mu_{\theta^n \omega} \int \bar{\psi} dx ds$$

と定義する.  $(f, \mu)$  の相関関数が指数的に減衰するとは, ( $\omega$  に依存しない)  $0 < \rho < 1$  が存在して任意の  $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$  についてほとんど確実に ( $\phi, \psi$  に依存する) 定数  $c(\omega)$  が存在して

$$|\text{Cor}_{\phi, \psi}(\omega, n)| \leq c(\omega) \rho^n$$

が成り立つことを言う.

$\mathbb{T}^2$  上の確率測度  $\hat{\mu}$  が  $f$  の SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) 測度であるとはほとんど確実に測度正の集合  $B_\omega$  が存在して, 任意の  $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$  について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int \phi \circ f^{(j)}(\omega)(z) d\mu_\omega = \int \phi d\hat{\mu}$$

が  $B_\omega$  中のすべての初期値  $z$  について成り立つことを言う.

**命題 7.**  $\mu$  を  $f$ -不変な確率測度とし,  $\mu_\omega(\cdot): \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{T}^2) \rightarrow [0, 1]$  を  $\mu$  の条件付き確率とする.  $(f, \mu)$  の相関関数が指数的に減衰すると仮定する. このとき,  $\bar{\mu}(B) = \int \mu_\omega(B) dP$  ( $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^2)$ ) によって定義される確率測度  $\hat{\mu}$  は  $f$  の唯一つの SRB 測度となる.

証明. [17, Proposition 4.1] を参照していただきたい.

(2.3) で与えられた摂動  $f_\epsilon$  について,  $\Omega \times \mathbb{T}^2$  上の不変確率測度  $\mu^\epsilon$  の存在は (ランダムな) 拡大写像の不変測度の存在に関する既知の結果 ([3] など) から直ちに結論される:

**定理 8.** 任意の  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  について,  $f_\epsilon$ -不変な  $\Omega \times \mathbb{T}^2$  上の確率測度  $\mu^\epsilon$  が存在して, その条件付き確率を  $\mu_\omega^\epsilon(\cdot)$  とすると  $\mu_\omega^\epsilon(\cdot)$  はほとんど確実に正規化された  $\mathbb{T}^2$  上の Lebesgue 測度と同値であり,  $d\mu_\omega^\epsilon = h_\epsilon(\omega, x) dx ds$  と書くことができる. その密度関数  $h_\epsilon(\omega)$  は  $\mathbb{S}^1$  上の  $\mathcal{C}^\infty$  級正值関数であって  $\int_{\mathbb{S}^1} h_\epsilon(\omega) dx = 1$  および  $M_{0,n}^*(\epsilon; \omega) h_\epsilon(\omega) = h_\epsilon(\theta^n \omega)$  ( $n \geq 1$ ) が成り立つ.



証明. [17, Theorem 4.2] を参照していただきたい.

## 4.2 相関関数の減衰

定理 4 と 5 を利用して相関関数の減衰に関する結果を得るために, González-Tokman と Quas によって拡張された (転移作用素などの) "準可逆な" 線形作用素のコサイクルに関する乗法エルゴード定理 ([14] の Theorem A と 2.10) が必要になる. 彼らの結果中の記法は本稿のそれと衝突しているため, 簡単のために彼らの結果 (の多少の再定式化) をここで述べることにする.  $\Phi$  を可分 Banach 空間  $X$  上の  $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$  にそった強可測な線形 RDS とし,  $\Phi(1, \cdot): \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X)$  をその単位時間写像  $\Phi(1, \omega) = \Phi(1, \omega, \cdot)$  とする.  $\theta$  はエルゴード的であったので, (2.1) と (2.2) で与えられた最大 Lyapunov 指数  $r(\omega)$  とコンパクト指数  $r_{ic}(\omega)$  はほとんど確実に存在して定数  $r^*, r_{ic}^*$  に一致する.

**定理 9** (González-Tokman & Quas).  $\Phi(1, \cdot): \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X)$  が強可測であって  $\omega \mapsto \log^+ \|S(\omega)\| \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$  であるとする.  $\Phi$  は  $r_{ic}^* < r^*$  の意味で擬コンパクト的であるとする. このとき, 数  $1 \leq \ell \leq \infty$ , 数列  $r = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_\ell > r_{ic}^*$  ( $\ell = \infty$  の場合には  $r = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$  であって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = r_{ic}^*$ ),  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\theta$ -不変な測度 1 の部分集合  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ , およびに  $X$  の唯一つの閉部分空間への可測な分解  $X = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \Sigma_j(\omega) \oplus \Sigma_-(\omega)$  が存在して, 任意の  $\omega \in \tilde{\Omega}$  に関して以下が成り立つ:

(1) 任意の  $1 \leq j \leq \ell$  について,  $\dim \Sigma_j(\omega) = m_j < \infty$  であって

$$\Phi(1, \omega) \Sigma_j(\omega) = \Sigma_j(\theta\omega), \quad \Phi(1, \omega) \Sigma_-(\omega) \subset \Sigma_-(\theta\omega).$$

(2) 各  $1 \leq j \leq \ell$  について  $v \in \Sigma_j(\omega) \setminus \{0\}$  であれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Phi(n, \omega)v\| = \alpha_j.$$

(3)  $v \in \Sigma_-(\omega)$  であれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Phi(n, \omega)v\| \leq r_{ic}^*.$$

定理 9 中の分解を  $\Phi$  の Oseledets 分解と呼ぶ. さらに,  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  は  $\Phi$  の例外 Lyapunov 指数と呼ばれ,  $m_j$  と  $\Sigma_j(\omega)$  はそれぞれ  $\alpha_j$  ( $1 \leq j \leq \ell$ ) に対応する重複度と Lyapunov 部分空間と言われる.

$m \geq m_0$ ,  $\epsilon_0 = \epsilon_0(m)$ ,  $\nu_0 = \nu_0(m)$  を定理 4 と 5 が成立するような数とする. 定理 4 より  $m$  を十分大きく取ることによって, 線形 RDS

$$\mathbb{N} \times \Omega \times H^m(\mathbb{S}^1) \ni (n, \omega, \varphi) \mapsto M_{\nu, n}^*(\epsilon; \omega)\varphi$$

のコンパクト指数  $r_{ic}^*\{\nu\}$  は任意の  $\nu \in \mathbb{Z}$  について  $r_{ic}^*\{\nu\} < 0$  を満たす. (さらにこれは  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$  について一様に成り立つ.) さらに, 最大 Lyapunov 指数は 0 でおさえられる. つまり,

$$r^*\{\nu\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|M_{\nu, n}^*(\epsilon; \omega)\|_{\mathcal{L}(H^m)} \leq 0.$$

一方で,  $\nu = 0$  のとき定理 8 よりほとんど確実に

$$\|M_{0, n}^*(\epsilon; \omega)h_\epsilon(\omega)\|_{(m)} = \sup_{\|\varphi\|_{(-m)} \leq 1} (h_\epsilon(\theta^n \omega), \varphi)_{L^2} \geq (h_\epsilon(\theta^n \omega), 1_{\mathbb{S}^1})_{L^2} = 1, \quad (4.1)$$

となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|M_{0,n}^*(\epsilon; \omega)\|_{\mathcal{L}(H^m)} \geq \log \|h_\epsilon(\omega)\|_{(m)}.$$

よって,  $r^*\{0\} \geq 0$  であって,  $r^*\{0\} = 0$  が結論される. これは ( $m$  が十分大きいとき)  $r_{ic}^*\{0\} < r^*\{0\}$  を意味するので Oseledets 分解が  $\nu = 0$  について存在することとなる. 定理 9 を  $X = H^m(\mathbb{S}^1)$  と  $\Phi(n, \omega) = M_{0,n}^*(\epsilon; \omega)$  に適用して, 例外 Lyapunov 指数を  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  と書き, それぞれに対応する Lyapunov 部分空間を  $\Sigma_1(\epsilon; \omega), \dots, \Sigma_\ell(\epsilon; \omega)$  と表記する.  $\bigoplus_{j=1}^\ell \Sigma_j(\epsilon; \omega)$  の  $H^m(\mathbb{S}^1)$  における直交補空間を  $\Sigma_-(\epsilon; \omega)$  と書く. (4.1) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|M_{0,n}^*(\epsilon; \omega)h_\epsilon(\omega)\|_{(m)} \geq 0,$$

がほとんど確実に成り立ち, よって  $h_\epsilon(\omega)$  が  $r^*\{0\} = \alpha_1$  に関する Lyapunov 部分空間  $\Sigma_1(\epsilon; \omega)$  に属していることに注意してほしい.

それでは,  $(f_\epsilon, \mu^\epsilon)$  の相関関数が指数的に減衰するための Lyapunov スペクトルによる正確な条件を与えよう.

**定理 10.**  $\lambda^{-1/2} < \rho < 1$  とし,  $m \geq m_0$ ,  $\epsilon_0 = \epsilon_0(m)$ ,  $\nu_0 = \nu_0(m)$  を定理 4 と 5 が成り立ち

$$r_m = \log(\lambda^{-m - \frac{1}{2}k^{\frac{1}{2}}}) < 0$$

となるように取る. 固定された  $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$  について,  $\mu^\epsilon$  をその条件付き確率  $\mu_\omega^\epsilon(dx ds) = h_\epsilon(\omega, x) dx ds$  とともに定理 8 で与えられた  $f_\epsilon$ -不変測度とする.  $\nu = 0$  について, 最大 Lyapunov 指数  $r^*\{0\} = 0$  に関する Lyapunov 部分空間  $\Sigma_1(\epsilon; \omega)$  が 1 次元であって,  $\Sigma_1(\epsilon; \omega) = \text{Ch}_\epsilon(\omega)$  と仮定する. さらにすべての  $\nu \neq 0$  に関してその最大 Lyapunov 指数  $r^*\{\nu\}$  は負であると仮定する. このとき  $\mu^\epsilon$  は  $f_\epsilon$  の唯一つの SRB 測度であって, その相関関数は指数的に減衰する. 減衰速度は  $\rho$ ,  $r_m$ ,  $M_{0,n}^*(\epsilon; 0)$  の第 2 最大 Lyapunov 指数  $\alpha_2$  および  $r^*\{\nu\}$  ( $\nu = \pm 1, \dots, \pm \nu_0$ ) の最大値によって定まる.

定理 5 により  $r^*\{\nu\} < 0$  の仮定は任意の  $|\nu| \geq \nu_0$  について成立することに注意してほしい.

証明. [17, Theorem 4.4] を参照していただきたい.

最後に定理 10 中の条件に関して検討する. 我々はこの条件が (定理 5 で仮定した)  $f_0$  の部分捕獲性からつねに結論される, つまり定理 10 から除去できる条件であると期待している.

話を明確にするために, まず決定論的な場合を考える. つまり,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を 1 点だけからなる自明な確率空間とし  $\theta$  を  $\Omega$  上の恒等写像とする. このとき定理 4 の下の注意でも述べたように, 固定された  $\nu$  について  $M_\nu^*(\omega)$  の半径  $e^{r_m}$  の円の外のスペクトルは離散的 (空である可能性もある) であり重複度有限の有限個の固有値からなることを意味する.  $\nu = 0$  については, 対応する Lyapunov 指数  $\alpha_j$  と Lyapunov 部分空間  $\Sigma_j(\epsilon; \omega)$  は以下の意味で  $M_0^*(\omega)$  の固有値, 固有空間と関連することとなる: もし  $\gamma$  が半径  $e^{r_m}$  の円の外にある固有値であればいずれかの  $j$  について  $\log |\gamma| = \alpha_j$  となる.  $\Sigma_j(\epsilon; \omega)$  はそのような固有値の一般化された固有空間の直和となる. Boungenschütz [7, Example 1.4] と比較していただきたい.

今,  $\nu \in \mathbb{Z}$  を任意とし  $r^*\{\nu\} = 0$  を仮定する. このとき  $M_\nu^*(\omega)$  のスペクトル半径は 1 であって, これは定理 4 によりある固有値  $\gamma \in \mathbb{C}$  があって  $|\gamma| = 1$  となることを意味する.  $\varphi$  を  $\gamma$  に対応する固有関数とし,  $\psi(x, s) = e^{2i\pi\nu s} \varphi(x)$  とおく. このとき,

$$M_{f_\epsilon(\omega)}^* \psi(x, s) = e^{2i\pi\nu s} M_\nu^*(\omega) \varphi(x) = \gamma \psi(x, s)$$

となり, よって  $\gamma$  は  $M_{f_\epsilon(\omega)}^*$  の固有値となる. 簡単な計算により 1 が  $M_{f_\epsilon(\omega)}^*$  の固有値であることがわかるので, 決定論的な場合は, もし  $M_{f_\epsilon(\omega)}^*$  の半径 1 の固有値が単純固有値 1 のみであれば定理 10 中の仮定  $\dim \Sigma_1(\epsilon; \omega) = 1$  と  $r^*\{\nu\} < 0$  ( $\nu \neq 0$ ) が自動的に成立する. 辻井は [20, Theorem 1.2] でこの条件が部分捕獲性から帰結されることを示している. (Faure も [10, Theorem 5] の中で部分捕獲性とともこの条件を仮定している.) よって, (ランダムな場合でも) 定理 10 中の仮定が”弱い部分捕獲性” ([17, Proposition 3.5]) から得られると予想するのは自然なことであると思われる. しかし, この問題は今後の課題とし本稿ではこれ以上踏み込まないことにする.

## 参考文献

- [1] Arnold L, *Random dynamical systems*, Springer, 1998.
- [2] Baladi V and Gouëzel S, *Good banach spaces for piecewise hyperbolic maps via interpolation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis **26** (2009), 1453–1481.
- [3] Baladi V, Kondah A, and Schmitt B, *Random correlations for small perturbations of expanding maps*, Random Comput. Dynam. **4** (1996), 179–204.
- [4] Baladi V and Liverani C, *Exponential decay of correlations for piecewise cone hyperbolic contact flows*, Comm. Math. Phys. **314** (2012), 689–773.
- [5] Baladi V and Young LS, *On the spectra of randomly perturbed expanding maps*, Comm. Math. Phys. **156** (1993), 355–385.
- [6] Blank M, Keller G, and Liverani C, *Ruelle-perron-frobenius spectrum for anosov maps*, Nonlinearity **15** (2002), 1905–1973.
- [7] Bogenschütz T, *Stochastic stability of invariant subspaces*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **20** (2000), 663–680.
- [8] Bonatti C, Díaz L, and Viana M, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective*, Springer, 2004.
- [9] Castaing C and Valadier M, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [10] Faure F, *Semiclassical origin of the spectral gap for transfer operators of a partially expanding map*, Nonlinearity **24** (2011), 1473–1498.
- [11] Faure F and Roy N, *Ruelle-pollicott resonances for real analytic hyperbolic map*, Nonlinearity **19** (2006), 1233–1252.
- [12] Faure F, Roy N, and Sjöstrand J, *A semiclassical approach for anosov diffeomorphisms and ruelle resonances*, Open Math. J. **1** (2008), 35–81.
- [13] Faure F and Sjöstrand J, *Upper bound on the density of ruelle resonances for anosov flows*, Comm. Math. Phys. **308** (2011), 325–364.
- [14] González-Tokman C and Quas A, *A semi-invertible operator oseledets theorem*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **FirstView** (2013), 1–43.
- [15] Gouëzel S and Liverani C, *Banach spaces adapted to anosov systems*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **26** (2006), 189–217.
- [16] Hörmander L, *The analysis of linear partial differential operators I. Distribution theory and Fourier*

*analysis*, Springer, Berlin, 1983.

- [17] Nakano Y and Wittsten J, *On the spectra of a randomly perturbed partially expanding map on the torus*, Preprint, arXiv:1404.0147 (2014).
- [18] Ruelle D, *A measure associated with axiom A attractors*, Amer.J.Math. **98** (1976), 616–654.
- [19] Toledano JJMA, Benavides TD, and Acedo GL, *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*, vol. 99, Springer, 1997.
- [20] Tsujii M, *Decay of correlations in suspension semi-flows of angle-multiplying maps*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **28** (2008), 291–317.