数理解析研究所講究録
第 1946 巻 2015 年 196-200

Asymptotics for the reduced Ostrovsky equation

大阪大学・理学研究科　新里　智行
Tomoyuki Niizato

Department of Mathematics Graduate School of Science,
Osaka University

1　導入

本稿の目的は文献 [3] の概要を述べることである. Short pulse 方程式のコーシー問題を考える :

$$\begin{cases} u_{tx} = u + (u^3)_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

u_0 は実数値関数とし, 以下では実数値解のみを考える. 方程式 (1) は水面波を記述する方程式の一種である Ostrovsky 方程式 [4] :

$$(u_t + \alpha u_{xxx} + (u^\rho)_x)_x = \beta u,$$

の高次の分散がない, すなわち, $\alpha = 0$ という仮定の下で導出される. 文献 [3] では, 特に $\rho = 3$ の場合に, 初期条件が十分小さい時, 方程式の解がどのようにふるまうのか？という問題を考察している.

Short pulse 方程式の非線形項の指数を一般化した Reduced Ostrovsky 方程式 :

$$\begin{cases} u_{tx} = u + (f(u))_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

の漸近挙動に関しては次の結果が知られている. 文献 [1] では, 非線形項が $f(u) = |u|^{\rho-1}u$, $\rho > 3 + 2/3$ の時, 初期条件が適切な意味で十分小さければ, 方程式 (2) の解は, 線形化された方程式, i.e.,

$$u_{tx} = u$$

の解に時刻無限大で漸近することが示されている. また, 文献 [2] では, 非線形項の指数が $1 < \rho \leq 3$ の時は, 適切な仮定の下で, 線形の解に漸近する解が存在しないことが示されている. この結果から, 今我々の考えたい $\rho = 3$ の場合は, 線形の解に漸近しないことがわかるが, 実際に解がどのように振る舞うのかは明らかではない.

文献 [3] では, $\rho = 3$ の short pulse 方程式の場合に, 方程式の解の時間無限大での漸近挙動を具体的に与えている. この漸近挙動は, 線形の方程式の解に適切な位相の修正を加えたものとなる.

このセクションの残りの部分では, 結果を紹介するための記号の準備をし, 次のセクションで [3] で得られた結果についてのべる.

ルベーグ空間を, 通常通り, $\mathbf{L}^p = \{\phi \in \mathbf{S}'; \|\phi\|_{\mathbf{L}^p} < \infty\}$ で定義する. ここで, ノルムは, $1 \le p < \infty$ の時, $\|\phi\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int_{\mathbf{R}} |\phi(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $p = \infty$ の時, $\|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\phi(x)|$ とする.

重み付ソボレフ空間を以下で定義する：

$$\mathbf{H}_p^{m,s} = \left\{\varphi \in \mathbf{S}'; \|\phi\|_{\mathbf{H}_p^{m,s}} = \|\langle x\rangle^s \langle i\partial_x\rangle^m \phi\|_{\mathbf{L}^p} < \infty\right\},$$

$m, s \in \mathbf{R}, 1 \le p \le \infty$, $\langle x\rangle = \sqrt{1+x^2}$, $\langle i\partial_x\rangle = \sqrt{1-\partial_x^2}$. 簡単のため, 以下の省略記号を用いる：$\mathbf{H}^{m,s} = \mathbf{H}_2^{m,s}$, $\mathbf{H}^m = \mathbf{H}^{m,0}$. 同様に斉次ソボレフ空間を

$$\dot{\mathbf{H}}^m = \left\{\phi \in \mathbf{S}'; \|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^m} = \left\|\left(-\partial_x^2\right)^{\frac{m}{2}} \phi\right\|_{\mathbf{L}^2} < \infty\right\}.$$

で定義する.

Short pulse 方程式の自由発展群を

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{F}^{-1} \exp\left(-\frac{it}{\xi}\right) \mathcal{F},$$

とする. ここで, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれ, フーリエ変換, フーリエ逆変換である. また自由発展群を通して次の作用素を導入しておく：$\mathcal{J} = \mathcal{U}(t)x\mathcal{U}(-t) = x - t\partial_x^{-2}$. ここで, $\partial_x^{-m} = \mathcal{F}^{-1}(i\xi)^{-m}\mathcal{F}$ である.

2 得られた結果

初期条件の属する関数空間として, 以下のものを考える：

$$\mathbf{X}_0^m = \left\{\phi \in \mathbf{L}^2; \|\phi\|_{\mathbf{X}_0^m} = \|\phi\|_{\mathbf{H}^m} + \|x\phi_x\|_{\mathbf{H}^5} + \|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}} < \infty\right\}.$$

また, 解を構成する関数空間を初期条件の属する関数空間に対応して, 以下のようにとる：

$$\mathbf{X}_T^m = \left\{u(t) \in \mathbf{C}\left([0,T); \mathbf{L}^2\right); \|u\|_{\mathbf{X}_T^m} < \infty\right\},$$

ノルムは

$$\|u\|_{\mathbf{X}_T^m} = \sup_{t\in[0,T)} \langle t\rangle^{-\epsilon^{\frac{1}{7}}} \left(\|u(t)\|_{\mathbf{H}^m} + \|\mathcal{J}u_x(t)\|_{\mathbf{H}^5} + \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}}\right) + \sup_{t\in[0,T)} \langle t\rangle^{\frac{1}{2}} \|u(t)\|_{\mathbf{H}_\infty^2},$$

とする. ここで, $\epsilon > 0$ は小さい正の定数とする.

以上の準備の下, 我々の結果を述べる.

Theorem 2.1 ([3]). 初期条件は $u_0 \in \mathbf{X}_0^m$, $m > 10$, $\|u_0\|_{\mathbf{X}_0^m} \le \epsilon$ を満たすとする. ここで, $\epsilon > 0$ は十分小さい正の定数とする. この時 *(1)* の時間大域解 $u \in \mathbf{X}_\infty^m$ が一意に存在し, 次の時間減衰評価を満たす :

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}_\infty^2} \le C\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}}.$$

さらに, 散乱状態 $W \in \mathbf{H}_\infty^{0,2}$ が一意に存在して, 十分大きい $t \ge 1$ に対し, $x \in \mathbb{R}$ について一様な次の漸近展開が成り立つ :

$$u(t) = \Re\sqrt{\frac{2}{t}}\theta(x)W(\chi)\exp\left(-i\left(\frac{2t}{\chi} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\chi}{\sqrt{2}}|W(\chi)|^2\log t\right)\right) + O\left(t^{-\frac{1}{2}-\delta}\right), \quad (3)$$

ここで, $\delta \in (0, 1/12)$, $\chi = \sqrt{t/-x}$, $\theta \in \mathbf{S}$, $|\theta(x)| \le 1$, $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 0 & x \ge 0 \end{cases}$.

3 証明のポイント

このセクションでは, short pulse 方程式の解の漸近挙動に, どのようにして非線形項の影響が現れるのか ? という点について説明したいと思う. 定理の証明は, $\mathbf{X}_T^m$ のノルムに関するアプリオリ評価をつくり, それを用いて時間局所解を時間大域解に伸ばす, という方針で行う. 本稿では, 特に評価の難しい $\mathbf{L}^\infty$ ノルムの評価のみを考える.

自由発展群の漸近展開をもちいると, 次の不等式が成り立つことに注意する :

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} = \|\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(-t)u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \le t^{-\frac{1}{2}}\left\||\xi|^{3/2}\mathcal{F}\mathcal{U}(-t)u(t)\right\|_{\mathbf{L}^\infty} + Ct^{-\frac{1}{2}-\delta}, \quad (4)$$

ここで, $\delta \in (0, 1/4)$. 上の不等式から, $\left\||\xi|^{3/2}\mathcal{F}\mathcal{U}(-t)u(t)\right\|_{\mathbf{L}^\infty} \le C$ を導けばよいことがわかる. 方程式の両辺に $\mathcal{U}(-t)$ をかけると,

$$(\mathcal{U}(-t)u)_t = \mathcal{U}(-t)(u^3)_x.$$

$v = \mathcal{U}(-t)u$ とおいて, 両辺を Fourier 変換し, $|\xi|^{3/2}$ をかけると,

$$|\xi|^{\frac{3}{2}}\hat{v}_t(t,\xi) = \frac{i\xi|\xi|^{\frac{3}{2}}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-it\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi_1}-\frac{1}{\xi_2}-\frac{1}{\xi-\xi_1-\xi_2}\right)}\hat{v}(\xi_1)\hat{v}(\xi_2)\hat{v}(\xi-\xi_1-\xi_2)d\xi_1 d\xi_2,$$

となる. ここで, $\xi_1 = \xi\xi_1'$, $\xi_2 = \xi\xi_2'$ と変数変換して整理すれば,

$$|\xi|^{\frac{3}{2}}\hat{v}_t(t,\xi) = \frac{i\xi^3|\xi|^{\frac{3}{2}}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{it}{\xi}\phi}F(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \quad (5)$$

と書き直すことができる. ここで,

$$\phi(\xi_1,\xi_2) = 1 - \frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_3}, \quad F(\xi_1,\xi_2) = \hat{v}(\xi\xi_1)\hat{v}(\xi\xi_2)\hat{v}(\xi\xi_3),$$

$\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ とする.

以下では振動積分 (5) について考える. Stationary phase method から, 積分 (5) の主要部は位相 ϕ の勾配が 0, つまり, $\nabla\phi = 0$ となる点であり, 残りは剰余とみなすことができることがわかる. $\nabla\phi = 0$ となる点は, $(\xi_1, \xi_2) = (1/3, 1/3), (1,1), (1,-1), (-1,1)$ の 4 点である. そこで, cut off 関数 Φ_1, Φ_2, Φ_3 を, $1 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$, $0 \leq \Phi_j \leq 1$, Φ_1 : $(1/3, 1/3)$ の近傍にサポートを持つ関数, Φ_2 : $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ の近傍にサポートを持つ関数, Φ_3 : それ以外, として定義する. この関数を用いて (5) の積分領域を以下のように分割する : (5) の右辺 $= I_1 + I_2 + I_3$. ここで,

$$I_j = \frac{i\xi^3|\xi|^{\frac{3}{2}}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{it}{\xi}\phi}F(\xi_1,\xi_2)\Phi_j d\xi_1 d\xi_2.$$

I_3 の評価 : $\nabla\phi = 0$ となる点が積分領域上にないので, 本質的には 2 回部分積分を繰り返すことにより,

$$|I_3| \leq Ct^{-1-\delta}$$

を得ることができる. ただし, この計算は少し複雑なのでここでは省略することにする. (詳しい証明に関しては, [3] を見ていただきたい.)

I_1, I_2 の評価 : $\nabla\phi = 0$ の点であるから, stationary phase method をもちいて計算することにより,

$$I_1 = \frac{\xi^4|\xi|^{\frac{3}{2}}}{3^3\sqrt{6}t}e^{i\frac{11t}{\xi}}\hat{v}^3\left(t, \frac{\xi}{3}\right) + O(t^{-1-\delta})$$
$$I_2 = i\frac{3\xi^4|\xi|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}t}\left|\hat{v}(t,\xi)\right|^2\hat{v}(t,\xi) + O(t^{-1-\delta})$$

となることがわかる. ここで, (2) で $f(u) = |u|^{\rho-1}u$, $\rho > 3$ とした場合と異なり, 非線形項の主要部の時間減衰が, $I_2 \sim O(t^{-1})$ であることに注意する. この事実が, 解の漸近挙動に影響を与える.

以上から, (5) は

$$|\xi|^{\frac{3}{2}}\hat{v}_t(t,\xi) = \frac{\xi^4|\xi|^{\frac{3}{2}}}{3^3\sqrt{6}t}e^{i\frac{11t}{\xi}}\hat{v}^3\left(t, \frac{\xi}{3}\right) + i\frac{3\xi^4|\xi|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}t}\left|\hat{v}(t,\xi)\right|^2\hat{v}(t,\xi) + O(t^{-1-\delta}) \tag{6}$$

と書き直せることがわかる. (6) の右辺第二項を取り除くため,

$$w(t,\xi) = \hat{v}e^{-i\frac{3\xi^4|\xi|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}t}\xi^4\int_1^t\frac{|\hat{v}(\tau)|^2}{\tau}d\tau}$$

と未知関数を置き換えると,

$$w_t(t,\xi) = \frac{\xi^4|\xi|^{\frac{3}{2}}}{3^3\sqrt{6}t}e^{i\frac{11t}{\xi}}\hat{v}^3\left(t, \frac{\xi}{3}\right)e^{-iC\xi^4\int_1^t\frac{|\hat{v}(\tau)|^2}{\tau}d\tau} + O(t^{-1-\delta})$$

となる. 時間に関して, 1 から t まで積分すれば,

$$|\hat{v}(t)| = |w(t)| \leq |w(1)| + \left| \int_1^t \frac{\xi^4 |\xi|^{\frac{3}{2}}}{3^3\sqrt{6t}} e^{i\frac{11t}{\xi}} \hat{v}^3\left(t, \frac{\xi}{3}\right) e^{-iC\xi^4 \int_1^t \frac{|\hat{v}(\tau)|^2}{\tau} d\tau} dt \right| + C \tag{7}$$

また, (7) の第二項も, 時間に関して部分積分すれば,

$$\left| \int_1^t \frac{\xi^4 |\xi|^{\frac{3}{2}}}{3^3\sqrt{6t}} e^{i\frac{11t}{\xi}} \hat{v}^3\left(t, \frac{\xi}{3}\right) e^{-iC\xi^4 \int_1^t \frac{|\hat{v}(\tau)|^2}{\tau} d\tau} dt \right| \leq C$$

となることがわかる. したがって,

$$\left\| |\xi|^{3/2} \hat{v}(t) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C$$

がわかった. $v = \mathcal{U}(-t)u$ であったから, (4) より,

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} = \|\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(-t)u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq t^{-\frac{1}{2}} \left\| |\xi|^{3/2} \mathcal{F}\mathcal{U}(-t)u(t) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} + Ct^{-\frac{1}{2}-\delta} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}$$

が得られる. これが求めたい $\mathbf{L}^\infty$ ノルムの評価であった.

References

[1] N. Hayashi, P. I. Naumkin and T. Niizato. *Asymptotics of solutions to the generalized Ostrovsky equation.* J. Differential Equations **255** (2013), 25052520.

[2] N. Hayashi, P. I. Naumkin and T. Niizato. *Nonexistence of the usual scattering states for the generalized Ostrovsky-Hunter equation.* J. Math. Phys. **55** (2014), 053502.

[3] T. Niizato. *Asymptotic behavior of solutions to the short pulse equation with critical nonlinearity.* Nonlinear Anal. **111** (2014), 15-32.

[4] L.A. Ostrovsky, *Nonlinear internal waves in a rotating ocean*, Okeanologia **18** (1978), pp. 181-191.

Department of Mathematics Graduate School of Science,
Osaka University
Tokyonaka,
Japan
E-mail address: t-niizato@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp