数理解析研究所講究録
第 1946 巻 2015 年 217-230

Camassa-Holm 方程式とその周辺

The Camassa-Holm equation and its surroundings

山口大学大学院理工学研究科　松野　好雅 (Yoshimasa Matsuno)
Division of Applied Mathematical Science
Graduate School of Science and Engineering
Yamaguchi University
E-mail address: matsuno@yamaguchi-u.ac.jp

概要

浅い水の波のモデル方程式である Camassa-Holm 方程式，及びこれに関連した最近の話題について概観する．具体的には，1) 大振幅波動を記述する Green-Naghdi 方程式の拡張，2) Green-Naghdi 方程式に基づく Camassa-Holm 方程式の導出，3) Camassa-Holm 方程式に関連した方程式等について解説する．

1. 基礎方程式

２次元非粘性，非圧縮流体の表面を伝播する重力波について考える．流体の運動を支配する方程式 (無次元形), 及び無次元化を以下で要約する．

1.1. ２次元非粘性、非圧縮流体（表面張力は無視）の基礎方程式系 (無次元形)

$$\delta^2\phi_{xx}+\phi_{yy}=0, \quad -\infty<x<\infty, \quad -1<y<\epsilon\eta, \tag{1.1}$$

$$\eta_t+\epsilon\phi_x\eta_x=\frac{1}{\delta^2}\phi_y, \quad y=\epsilon\eta, \tag{1.2}$$

$$\phi_t+\frac{\epsilon}{2\delta^2}(\delta^2\phi_x^2+\phi_y^2)+\eta=0, \quad y=\epsilon\eta, \tag{1.3}$$

$$\phi_y=0, \quad y=-1. \tag{1.4}$$

1.2. 無次元化，および無次元パラメータ

- 無次元化

$\tilde{x}=lx, \quad \tilde{y}=h_0y, \quad \tilde{t}=(l/c_0)t, \quad \tilde{\eta}=a\eta, \quad \tilde{\phi}=(gla/c_0)\phi.$

l: 波の代表波長，　h_0: 流体の深さ，　a: 波の代表振幅，　$c_0(=\sqrt{gh_0})$:　長波の位相速度，　g: 重力定数．

$\phi=\phi(x,y,t)$: 速度ポテンシャル，　$\eta=\eta(x,t)$: 自由表面形状．

- 無次元パラメータ

方程式系 (1.1)-(1.4) には２つの独立な無次元パラメータが存在する：
非線形パラメータ: $\epsilon=\frac{a}{h_0}$,　分散パラメータ：$\delta=\frac{h_0}{l}$.

2. 拡張 Green-Naghdi 方程式

Green-Naghdi(GN) 方程式に関しては以下の文献 [1]-[3] が基本的である：
Serre(1953)[1], Su and Gardner(1969)[2], Green and Naghdi(1976)[3]

2.1. 拡張された Green-Naghdi 方程式の導出

ここでは GN 方程式を任意次数の分散パラメータを含む形に拡張する．最初に 3 つの速度成分を導入する：

- 平均水平速度成分

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{h}\int_{-1}^{\epsilon\eta} \phi_x(x,y,t)dy, \quad h = 1+\epsilon\eta. \tag{2.1}$$

- 流体表面での水平速度成分

$$u(x,t) = \phi_x(x,y,t)|_{y=\epsilon\eta}. \tag{2.2}$$

- 流体表面での鉛直速度成分

$$v(x,t) = \phi_y(x,y,t)|_{y=\epsilon\eta}. \tag{2.3}$$

(1.1), (1.4), (2.2), (2.3) を用いると

$$v = \delta^2\{-(h\bar{u})_x + h_x u\}. \tag{2.4}$$

(2.4) を (1.2) へ代入すると，h に関する発展方程式が得られる：

$$h_t + \epsilon(h\bar{u})_x = 0. \tag{2.5}$$

(2.2)，(2.3) を x，および t で微分すると

$$u_x = \phi_{xx} + \epsilon\phi_{xy}\eta_x, \quad u_t = \phi_{xt} + \epsilon\phi_{xy}\eta_t, \tag{2.6}$$

$$v_x = \phi_{xy} + \epsilon\phi_{yy}\eta_x, \quad v_t = \phi_{yt} + \epsilon\phi_{yy}\eta_t. \tag{2.7}$$

同様に

$$(\phi_t|_{y=\epsilon\eta})_x = \phi_{xt} + \epsilon\phi_{yt}\eta_x. \tag{2.8}$$

(2.6), (2.7), (2.8) より ϕ_{xt}, および ϕ_{yt} を消去すると

$$(\phi_t|_{y=\epsilon\eta})_x = u_t + v_t h_x - v_x h_t. \tag{2.9}$$

(1.3) を x で微分し, その結果に (2.4), (2.9) を代入すると

$$u_t + v_t h_x + \epsilon u u_x + \epsilon h_x u v_x + \eta_x = 0. \tag{2.10}$$

(2.5) を用いると, (2.10) は以下のように書きかえられる：

$$[h(u+vh_x)]_t + \epsilon[h(u+vh_x)\bar{u}]_x + \epsilon[hv(2h_x\bar{u}_x + h\bar{u}_{xx}) + h(u-\bar{u})(u_x+v_xh_x)] + h\eta_x = 0. \tag{2.11}$$

(2.10) (あるいは (2.11)) の変数 u, v を $h, \bar{u}$ で表すと

$$\bar{u}_t = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{2n} K_n.$$

ここで K_n は h、および $\bar{u}_{nx}, \bar{u}_{nx,t}$, $(\bar{u}_{nx} = \partial^n \bar{u}/\partial x^n, n = 0, 1, 2...)$ の多項式である．この方程式を δ^{2n} のオーダーで打ち切ると，分散項を δ^{2n} まで取り入れた**拡張 GN 方程式**が得られる．特に，$n = 1$ のとき GN 方程式が従う．

2.2. δ^4 モデル

ここでは拡張 GN 方程式で δ^4 の分散項を取り入れた方程式を導出する．

- Laplace 方程式 (1.1) の解

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta^{2n} \frac{(y+1)^{2n}}{(2n)!} f_{2nx}, \quad f_{2nx} = \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}}. \tag{2.12}$$

ここで $f = f(x, t)$ は流体底面 $y = -1$ での速度ポテンシャルである．

(2.12) を用いると，(2.1), (2.2), (2.3) は以下のようになる：

$$\bar{u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta^{2n} \frac{h^{2n}}{(2n+1)!} f_{(2n+1)x}, \tag{2.13}$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta^{2n} \frac{h^{2n}}{(2n)!} f_{(2n+1)x}, \tag{2.14}$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta^{2n} \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} f_{2nx}. \tag{2.15}$$

δ^4 の項まで保持すると, (2.13) は

$$\bar{u} = f_x - \frac{\delta^2}{6} h^2 f_{xxx} + \frac{\delta^4}{120} h^4 f_{xxxxx} + O(\delta^6). \tag{2.16}$$

上式の f_x を逆に $\bar{u}$ について解くと

$$f_x = \bar{u} + \frac{\delta^2}{6} h^2 \bar{u}_{xx} + \delta^4 \left\{ \frac{h^2}{36} (h^2 \bar{u}_{xx})_{xx} - \frac{h^4}{120} \bar{u}_{xxxx} \right\} + O(\delta^6). \tag{2.17}$$

また， (2.2) の u は

$$u = f_x - \frac{\delta^2}{2} h^2 f_{xxx} + \frac{\delta^4}{24} h^4 f_{xxxxx} + O(\delta^6), \tag{2.18}$$

と書ける．(2.17) の f_x を (2.18) へ代入すると

$$u = \bar{u} - \frac{\delta^2}{3} h^2 \bar{u}_{xx} - \delta^4 \left\{ \frac{1}{45} h^4 \bar{u}_{xxxx} + \frac{2}{9} h^3 h_x \bar{u}_{xxx} + \frac{1}{18} h^2 (h^2)_{xx} \bar{u}_{xx} \right\} + O(\delta^6). \tag{2.19}$$

(2.19) の u を (2.4) へ代入すると，v は以下のようになる：

$$v = -\delta^2 h\bar{u}_x - \frac{\delta^4}{3}h^2 h_x \bar{u}_{xx} + O(\delta^6). \tag{2.20}$$

(2.19), (2.20) を (2.10) に代入し，(2.5) を用いると，$\bar{u}$ の発展方程式が得られる：

$$\bar{u}_t + \epsilon\bar{u}\bar{u}_x + \eta_x = \frac{\delta^2}{3h}\left\{h^3(\bar{u}_{xt} + \epsilon\bar{u}\bar{u}_{xx} - \epsilon\bar{u}_x^2)\right\}_x$$

$$+\frac{\delta^4}{45h}\left[\left\{h^5(\bar{u}_{xxt} + \epsilon\bar{u}\bar{u}_{xxx} - 5\epsilon\bar{u}_x\bar{u}_{xx})\right\}_x - 3\epsilon h^5\bar{u}_{xx}^2\right]_x + O(\delta^6). \tag{2.21}$$

(2.21) に h を掛けて (2.5) を用いると，(2.21) は以下のような保存形に書ける.

$$(h\bar{u})_t + \epsilon\left(h\bar{u}^2 + \frac{h^2}{2\epsilon^2}\right)_x = \frac{\delta^2}{3}\left\{h^3(\bar{u}_{xt} + \epsilon\bar{u}\bar{u}_{xx} - \epsilon\bar{u}_x^2)\right\}_x$$

$$+\frac{\delta^4}{45}\left[\left\{h^5(\bar{u}_{xxt} + \epsilon\bar{u}\bar{u}_{xxx} - 5\epsilon\bar{u}_x\bar{u}_{xx})\right\}_x - 3\epsilon h^5\bar{u}_{xx}^2\right]_x + O(\delta^6). \tag{2.22}$$

• **注意 2.1**. $\epsilon\delta^2$ 以上の高次項を無視した近似ではブジネ方程式が，δ^2 までの近似では GN 方程式が各々得られる.

2.3. δ^4 モデルのハミルトン形式

方程式系 (2.5), (2.12) は以下のハミルトン形式で表される：

$$\begin{pmatrix} m_t \\ h_t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial_x m + m\partial_x & h\partial_x \\ \partial_x h & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta H/\delta m \\ \delta H/\delta h \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

汎関数 F, G の間の Lie-Poisson 括弧を

$$\{F,G\} = -\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\delta F}{\delta m}(m\partial_x + \partial_x m)\frac{\delta G}{\delta m} + \frac{\delta F}{\delta m}h\partial_x\frac{\delta G}{\delta h} + \frac{\delta F}{\delta h}\partial_x h\frac{\delta G}{\delta m}\right]dx, \tag{2.24}$$

で定義すると，(2.23) はハミルトン方程式

$$m_t = \{m, H\}, \quad h_t = \{h, H\}, \tag{2.25}$$

の形に書ける. ここで

$$H = \frac{\epsilon^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[h\bar{u}^2 + \frac{\delta^2}{3}h^3\bar{u}_x^2 - \frac{\delta^4}{45}h^5\bar{u}_{xx}^2 + \frac{1}{\epsilon^2}(h-1)^2\right]dx, \tag{2.26}$$

$$\epsilon m = \frac{\delta H}{\delta\bar{u}}. \tag{2.27}$$

$\frac{\partial}{\partial\epsilon}H[\bar{u} + \epsilon w]|_{\epsilon=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta H}{\delta\bar{u}}\,w\,dx$ は汎関数微分を表す.

• m の発展方程式

$$m = \epsilon\left[h\bar{u} - \frac{\delta^2}{3}(h^3\bar{u}_x)_x - \frac{\delta^4}{45}(h^5\bar{u}_{xx})_{xx}\right], \tag{2.28}$$

$$\frac{\delta H}{\delta m} = \epsilon\bar{u}, \tag{2.29}$$

$$\frac{\delta H}{\delta h} = -\frac{\epsilon^2}{2}\left\{\bar{u}^2 + \delta^2 h^2\bar{u}_x^2 - \frac{\delta^4}{9}h^4\bar{u}_{xx}^2 - \frac{2}{\epsilon^2}(h-1)\right\}, \tag{2.30}$$

$$m_t = -\epsilon\bar{u}m_x - 2\epsilon\bar{u}_x m + \frac{\epsilon^2}{2}h\left[\bar{u}^2 + \delta^2 h^2\bar{u}_x^2 - \frac{\delta^4}{9}h^4\bar{u}_{xx}^2 - \frac{2}{\epsilon^2}(h-1)\right]_x. \tag{2.31}$$

• **注意** 2.2.

1. (2.31) が (2.21) (あるいは (2.22)) と同等であることは直接計算により確かめられる.
2. $\bar{u}_t$ に関する方程式を δ^{2n} $(n \geq 1)$ で打ち切ると，分散項 δ^{2n} を取り入れた拡張 GN 方程式が得られる.
3. 水の波のモデル方程式の導出，並びに数学的取り扱いについては，Constantin(2011)[4], Lannes(2013)[5] を参照.

3. Camassa-Holm 方程式

Camassa-Holm(CH) 方程式の導出法は幾つかのものが知られている：

• bi-Hamiltonian formulation: Fuchssteiner and Fokas(1981)[6]

• GN 方程式のハミルトン形式に基づく方法：Camassa and Holm (1993)[7], Camassa, Holm and Hyman (1994)[8], Constantin (1997)[9]

• 基礎方程式系に特異摂動法を適用: Johnson (2002)[10]

• GN 方程式に摂動法を適用: Constantin and Lannes (2009)[11]

3.1. CH 方程式の導出

ここでは Constantin and Lannes (2009)[11] による導出法の概要について述べる.

• CH 方程式

$$u_t + u_x + \frac{3\epsilon}{2}uu_x + \mu(\alpha u_{xxx} + \beta u_{xxt}) = \epsilon\mu(\gamma uu_{xxx} + \nu u_x u_{xx}), \tag{3.1}$$

において条件

$$\beta < 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \beta = -2\gamma, \quad \nu = 2\gamma, \tag{3.2}$$

が満たされるとき，(3.1) を CH 方程式という.

変換

$$U(x,t) = \frac{1}{a}u\left(\frac{x}{b} + \frac{v}{t}, \frac{t}{c}\right)$$

(ただし，$a = (1-v)/\epsilon\kappa^2$, $b^2 = -1/\beta\mu$, $v = \alpha/\beta$, $c = b(1-v)/2\kappa^2$) により，(3.1) は CH 方程式の標準型

$$U_t + 2\kappa^2 U_x + 3UU_x - U_{xxt} = 2U_x U_{xx} + UU_{xxx}, \tag{3.3}$$

に還元する.

• GN 方程式

$$h_t + \epsilon(h\bar{u})_x = 0, \quad h = 1 + \epsilon\eta, \tag{3.4}$$

$$\bar{u}_t + \epsilon\bar{u}\bar{u}_x + \eta_x = \frac{\delta^2}{3h}\left\{h^3(\bar{u}_{xt} + \epsilon\bar{u}\bar{u}_{xx} - \epsilon\bar{u}_x^2)\right\}_x. \tag{3.5}$$

• CH 方程式の導出の概要

命題 $\epsilon = \delta \equiv \sqrt{\mu}$ と仮定する.

$$p \in R, \quad \theta \in [0,1], \quad \lambda = \frac{1}{2}(\theta^2 - \frac{1}{3}),$$

$$\alpha = p + \lambda,\ \beta = p - \frac{1}{6} + \lambda,\ \gamma = -\frac{3}{2}p - \frac{1}{6} - \frac{3}{2}\lambda,\ \nu = -\frac{9}{2}p - \frac{23}{24} - \frac{3}{2}\lambda, \tag{3.6}$$

とおく．$u = u^\theta = \phi_x(x,y,t)|_{y=(1+\epsilon\eta)\theta-1}$ が (3.1) を満たすとき

$$\bar{u} = u^\theta + \mu\lambda u^\theta_{xx} + 2\mu\epsilon\lambda u^\theta u^\theta_{xx}, \tag{3.7}$$

$$\eta = \bar{u} + \frac{\epsilon}{4}\bar{u}^2 + \frac{\mu}{6}\bar{u}_{xt} - \epsilon\mu\left(\frac{1}{6}\bar{u}\bar{u}_{xx} + \frac{5}{48}\bar{u}_x^2\right), \tag{3.8}$$

は GN 方程式 (3.4), (3.5) と矛盾しない.

証明

$$u^\theta_t + u^\theta_x + \frac{3\epsilon}{2}u^\theta u^\theta_x + \mu(\alpha u^\theta_{xxx} + \beta u^\theta_{xxt}) = \epsilon\mu(\gamma u^\theta u^\theta_{xxx} + \nu u^\theta_x u^\theta_{xx}), \tag{3.9}$$

より

$$u^\theta_{xxx} = -u^\theta_{xxt} - \frac{3}{2}\epsilon(u^\theta u^\theta_x)_{xx} + O(\mu),$$

が得られる．これを (3.9) へ代入すると

$$u^\theta_t + u^\theta_x + \frac{3\epsilon}{2}u^\theta u^\theta_x + \mu a u^\theta_{xxt} = \epsilon\mu\left[b u^\theta u^\theta_{xx} + c(u^\theta_x)^2\right]_x + O(\mu^2). \tag{3.10}$$

ここで

$$a = \beta - \alpha, \quad b = \gamma + \frac{3}{2}\alpha, \quad c = \frac{1}{2}(\nu + 3\alpha - \gamma). \tag{3.11}$$

$\eta = u^\theta + \epsilon v^\theta$ の形の解を仮定する．これと (3.7) を (3.5) へ代入すると, v^θ_x は以下のように近似できる：

$$\epsilon v^\theta_x + u^\theta_t + u^\theta_x + \epsilon u^\theta u^\theta_x + \mu\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)u^\theta_{xxt}$$

$$= -\epsilon\mu\left[\left(-\lambda+\frac{1}{3}\right)u^\theta u^\theta_{xx} + \left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)(u^\theta_x)^2\right] + O(\mu^2). \tag{3.12}$$

(3.10) を用いて u^θ_t を消去し，結果を x で積分すると

$$\epsilon v^\theta = \frac{1}{4}(u^\theta)^2 + \mu\left(a+\frac{1}{3}-\lambda\right)u^\theta_{xt} - \epsilon\mu\left[\left(b+\frac{1}{3}-\lambda\right)u^\theta_x u^\theta_{xx} + \left(c+\frac{1}{2}\right)(u^\theta_x)^2\right]. \tag{3.13}$$

(3.4) へ $\eta = u^\theta + \epsilon v^\theta$，および (3.13) を代入して変形すると

$$u^\theta_t + u^\theta_x + \frac{3\epsilon}{2}u^\theta u^\theta_x - \mu\left(a+\frac{1}{3}\right)u^\theta_{xxt}$$

$$= \epsilon\mu\left[-\left(a+b+\frac{1}{2}\right)u^\theta u^\theta_{xx} - \left(\frac{5}{4}a+c+1-3\lambda\right)(u^\theta_x)^2\right]_x + O(\mu^2). \tag{3.14}$$

(3.10) と (3.14) が無矛盾であるためには

$$a = -\left(a+\frac{1}{3}\right),\quad b = -\left(a+b+\frac{1}{2}\right),\quad c = -\left(\frac{5}{4}a+c+1-3\lambda\right).$$

これより

$$a = -\frac{1}{6},\quad b = -\frac{1}{6},\quad c = -\frac{19}{48}+\frac{3}{2}\lambda.$$

これらの値を (3.11) へ代入すると (3.6) が得られる．(3.8) は (3.7) と (3.13) から従う．
証明終わり

CH 方程式は条件，$\nu = 2\gamma$, $\beta = -2\gamma$ を課すと得られる．このとき

$$p = -\frac{1}{3},\quad \theta^2 = \frac{1}{2},\quad \alpha = -\frac{1}{4},\quad \beta = -\frac{5}{12},\quad \gamma = \frac{5}{36,}\quad \nu = \frac{1}{12},$$

$$u^\theta_t + u^\theta_x + \frac{3\epsilon}{2}u^\theta u^\theta_x - \mu\left(\frac{1}{4}u^\theta_{xxx} + \frac{5}{12}u^\theta_{xxt}\right) = \frac{5}{24}\epsilon\mu(u^\theta u^\theta_{xxx} + 2u^\theta_x u^\theta_{xx}). \tag{3.15}$$

注意 3.1. Degasperis-Procesi(DP) 方程式 [12] は，条件 $\nu = 3\gamma$, $\beta = -\frac{8}{3}\gamma$ を課すと得られる．このとき

$$p = -\frac{11}{54},\quad \theta^2 = \frac{23}{36},\quad \alpha = -\frac{11}{54},\quad \gamma = \frac{5}{36},\quad \nu = \frac{5}{12},$$

$$u^\theta_t + u^\theta_x + \frac{3\epsilon}{2}u^\theta u^\theta_x - \mu\left(\frac{11}{54}u^\theta_{xxx} + \frac{10}{27}u^\theta_{xxt}\right) = \frac{5}{36}\epsilon\mu(u^\theta u^\theta_{xxx} + 3u^\theta_x u^\theta_{xx}). \tag{3.16}$$

注意 3.2. Johnson (2002)[10] は u^θ の代わりに，$\hat{u} = \phi_x(x,y,t)|_{y=\theta-1}$ を用いた．

$$u^\theta = \hat{u} - \epsilon\mu\theta^2\eta\hat{u}_{xx},$$

が成り立つので，(3.15) の u^θ を $\hat{u}$ で置き換えても，$O(\epsilon\mu)$ の近似の範囲において (3.15) と同じ形の方程式が得られる．

3.2 CH方程式の性質

CH方程式を以下の標準型に書く：

$$u_t + 2\kappa^2 u_x + 3uu_x - u_{xxt} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{3.17}$$

CH方程式は以下の性質を有する：

1. 完全可積分方程式

• Lax形式

$$\Psi_{xx} = \frac{1}{4}\left[1 - \lambda(m + 2\kappa^2)\right]\Psi, \tag{3.18a}$$

$$\Psi_t = -\left(\frac{2}{\lambda} + u\right)\Psi_x + \frac{u_x}{2}\Psi + \gamma\Psi. \tag{3.18b}$$

ここで，$m = u - u_{xx}$，　λ はスペクトルパラメータ，γ は任意定数である．

2. ピーコン解

CH方程式 (3.17) で $\kappa = 0$ とおいた方程式は以下の N-ピーコン解をもつ：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} p_n(t)\mathrm{e}^{-|x-q_n(t)|}.$$

その際，p_n，q_n の時間発展はハミルトンの運動方程式の形に書ける：

$$\frac{dq_n(t)}{dt} = \frac{\partial H_N}{\partial p_n}, \quad \frac{dp_n(t)}{dt} = -\frac{\partial H_N}{\partial q_n}, \quad (n = 1, 2, ..., N),$$

$$H_N = \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{N} p_m p_n e^{-|q_m - q_n|}. \tag{3.19}$$

すなわち

$$\frac{dq_n(t)}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} p_m e^{-|q_n - q_m|}, \tag{3.20a}$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \frac{p_n}{2}\sum_{m=1}^{N} p_m e^{-|q_n - q_m|}\mathrm{sgn}(q_n - q_m). \tag{3.20b}$$

(3.20) の解は Hankel 行列式で表せる．Beals *et al* (1999)[13]．特に $N = 1$ のとき，1-ピーコン解

$$u = c\mathrm{e}^{-|x-ct|}, \tag{3.21}$$

をもつ．図1に2つのピーコンの相互作用（追い越し衝突）の様子を示す．

3. 多重ソリトン解

CH方程式 (3.17) は以下のパラメータ表示による多重ソリトン解をもつ (Matsuno(2005)[14]):

$$u(y,t) = \left(\ln\frac{f_2}{f_1}\right)_t, \tag{3.22a}$$

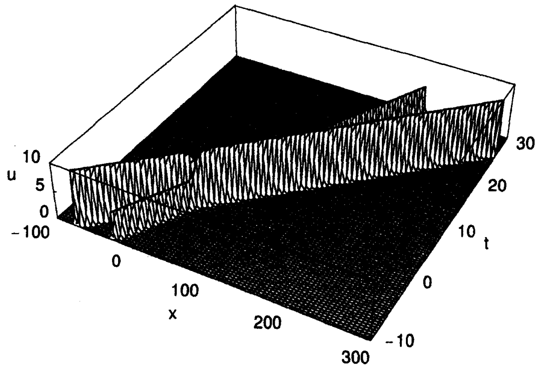

図 1 ピーコンの相互作用:　$c_1 = 10, c_2 = 5$

$$x(y,t) = \frac{y}{\kappa} + \ln\frac{f_2}{f_1} + d, \tag{3.22b}$$

$$f_1 = \sum_{\mu=0,1} \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \mu_i(\xi_i - \phi_i) + \sum_{1\le i<j\le N} \mu_i\mu_j\gamma_{ij}\right], \tag{3.23a}$$

$$f_2 = \sum_{\mu=0,1} \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \mu_i(\xi_i + \phi_i) + \sum_{1\le i<j\le N} \mu_i\mu_j\gamma_{ij}\right]. \tag{3.23b}$$

ここで

$$\xi_i = k_i\left(y - \frac{2\kappa^3}{1-\kappa^2k_i^2}t - y_{i0}\right),\ (i = 1, 2, ..., N), \tag{3.24a}$$

$$e^{-\phi_i} = \frac{1-\kappa k_i}{1+\kappa k_i},\ (i = 1, 2, ..., N), \tag{3.24b}$$

$$e^{\gamma_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2},\ (i, j = 1, 2, ..., N; i \neq j). \tag{3.24c}$$

ピーコン解はソリトン解からの極限移行（ピーコン極限）によっても導かれる．Parker and Matsuno(2006)[15], Matsuno(2007)[16]. 図 2 に滑らかなソリトン解のピーコン極限を図示する．

ピーコン極限: ソリトンの速度（あるいは振幅）を一定に保ったままで零分散極限 $\kappa \to 0$ をとる操作．

4. 波の砕波 (wave breaking)

• 砕波：波の表面形状 η が振幅有限の状態でその勾配が有限時間で発散する現象

CH 方程式や DP 方程式の初期値問題では砕波現象が説明できる．一方，KdV 方程式や関連した浅水波方程式，例えば BBM 方程式においてはこの現象は起きない．

注意 3.3. 以下の Whitham 方程式は砕波を説明するモデル方程式のひとつとして古くから知られている (Whitham (1974)[17], Fornberg and Whitham (1978)[18]):

$$u_t + uu_x + 2\kappa^2\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)u_y(y,t)dy = 0, \quad K(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}. \tag{3.25}$$

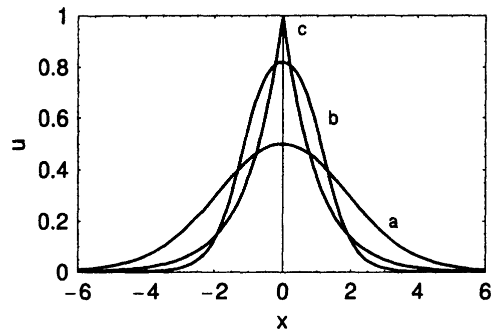

図 2 CH 方程式のソリトン解のピーコン極限：a : $\kappa = 0.7$, b : $\kappa = 0.6$, c : $\kappa = 0.01$

両辺に演算子，$1 - \partial_x^2$ を作用させると (3.25) は

$$u_t + 2\kappa^2 u_x + u u_x - u_{xxt} = 3 u_x u_{xx} + u u_{xxx}, \tag{3.26}$$

と書ける．(3.26) にはソリトン解やピーコン解は存在するが，CH 方程式のような可積分性は有しない．CH 方程式 (3.17) との相違点，特に，非線形項の係数の違いに注意.

注意 3.4. CH 方程式のソリトン，及びピーコン解については，Holm and Ivanov(2010)[19] が詳しい.

4. Camassa-Holm 方程式と関連した方程式

4.1. 変形 Camassa-Holm 方程式

$$m_t + 2\kappa^2 u_x + [m(u^2 - u_x^2)]_x = 0, \quad m = u - u_{xx}. \tag{4.1}$$

Fokas(1995)[20], Olver and Rosenau (1996)[21], Qiao (2006)[22].

ソリトン解とその性質

変形 Camssa-Holm 方程式に対しては多重ソリトン解のパラメータ表示が最近得られた (Matsuno(2014)[23]).

- 1-ソリトン解

$$u = \frac{4\kappa^2 k}{\{1 - (\kappa k)^2\}^{3/2}} \frac{\cosh \xi}{\cosh 2\xi + \frac{1+(\kappa k)^2}{1-(\kappa k)^2}}, \tag{4.2a}$$

$$X \equiv x - ct - x_0 = \frac{\xi}{\kappa k} + \ln \frac{1 - \kappa k \tanh \xi}{1 + \kappa k \tanh \xi}, \tag{4.2b}$$

$$c = \frac{2\kappa^2}{1 - (\kappa k)^2}. \tag{4.2c}$$

図 3 は変形 CH 方程式の滑らかなソリトン解を，図 4 は特異な対称ソリトン解を，図 5 は特異な非対称ソリトン解を各々表す.

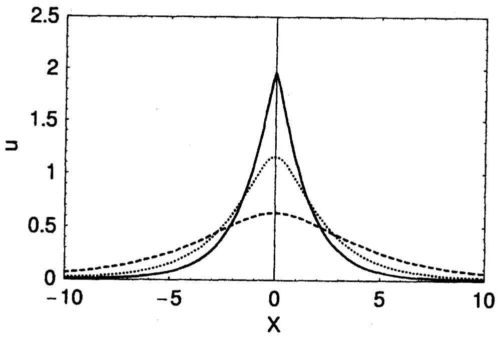

図3 滑らかなソリトン： $\kappa = 1$: $\kappa k = 0.3$ (dashed curve), $\kappa k = 0.5$ (dotted curve), $\kappa k = 0.7$ (solid curve).

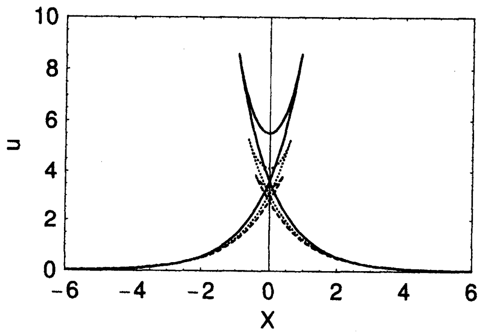

図4 特異な対称ソリトン： $\kappa = 1$: $\kappa k = 0.86$ (dashed curve), $\kappa k = 0.90$ (dotted curve), $\kappa k = 0.94$ (solid curve).

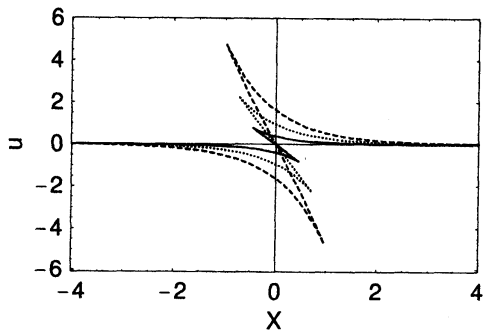

図5 特異な非対称ソリトン： $\kappa = 1$: $\kappa k = 1.1$ (dashed curve), $\kappa k = 1.2$ (dotted curve), $\kappa k = 1.5$ (solid curve).

4.2. Novikov 方程式

$$m_t + u^2 m_x + 3uu_x m = 0, \quad m = u - u_{xx}. \tag{4.3}$$

Hone and Wang (2008)[24], Novikov (2009)[25].

解の性質

1. 多重ソリトン解のパラメータ表示 (境界条件： $u \to u_0(\neq 0), |x| \to \infty$), Matsuno(2013)[26].
2. ピーコン解 $u_0 \to 0$ の極限で存在. Hone and Wang (2008)[24], Matsuno(2013)[26].

4.3. 2 成分 CH 方程式

$$q_t + uq_x + 2qu_x + \rho\rho_x = 0 \tag{4.4}$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{4.5}$$

$$q = u - u_{xx} + \kappa^2, \quad \kappa > 0, \quad \rho = \rho_0 + \eta - \frac{1}{2}(u^2 + \eta^2), \tag{4.6}$$

$$\text{境界条件：} \quad u \to 0, \quad \rho \to \rho_0 \quad |x| \to \infty.$$

Olver and Rosenau(1996)[21], Constantin and Ivanov(2008)[27], Ivanov(2009)[28].

解の性質

1. 可積分性

- Lax 形式

$$\Psi_{xx} = \left(-\lambda^2\rho^2 + \lambda q + \frac{1}{4}\right)\Psi, \tag{4.7a}$$

$$\Psi_t = \left(\frac{1}{2\lambda} - u\right)\Psi_x + \frac{u_x}{2}\Psi. \tag{4.7b}$$

2. N-ソリトン解 (パラメータ表示) Matsuno(2014)(発表予定)

$$u = \left(\ln\frac{\tilde{f}}{f}\right)_\tau \quad x = \frac{y}{\rho_0} + \ln\frac{\tilde{f}}{f} + d, \tag{4.8}$$

$$\rho = \rho_0 - \mathrm{i}\left(\ln\frac{\tilde{g}}{g}\right)_\tau, \tag{4.9}$$

$$\frac{q}{\rho^2} = \frac{\kappa^2}{\rho_0^2} + \mathrm{i}\left(\ln\frac{\tilde{g}}{g}\right)_y. \tag{4.10}$$

ここで座標系 (x,t) と (y,τ) はホドグラフ変換

$$dy = \rho\, dx - \rho u\, dt, \quad d\tau = dt, \tag{4.11}$$

により結びつけられている. $f, \tilde{f}, g, \tilde{g}$ はタウ関数.

• 1-ソリトン解

$$f = 1 + e^{\xi+\phi}, \quad \tilde{f} = 1 + e^{\xi-\phi}, \quad \xi = k(y - c\tau - y_0), \tag{4.12}$$

$$g = 1 + e^{\xi+i\psi}, \quad \tilde{g} = 1 + e^{\xi-i\psi}, \tag{4.13}$$

$$e^{-\phi} = \sqrt{\frac{(1-\rho_0 k)c - \rho_0\kappa^2}{(1+\rho_0 k)c - \rho_0\kappa^2}}, \quad e^{-i\psi} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\kappa^2}{\rho_0} - i\rho_0 k\right) + \rho_0^2}{\left(\frac{\kappa^2}{\rho_0} + i\rho_0 k\right) + \rho_0^2}}, \tag{4.14}$$

$$(1 - \rho_0 k^2)c^2 - 2\rho_0\kappa^2 c - \rho_0^4 = 0. \tag{4.15}$$

3. 砕波　Constantin and Ivanov(2008)[27].

4. ピーコン解　短波極限　$q \to -u_{xx}$ で存在.　Constantin and Ivanov(2008)[27].

5. まとめ

• GN 方程式を任意の高次分散を含む方程式に拡張した.

• 拡張 GN 方程式のひとつである δ^4 モデルを導き，これが GN 方程式と同じハミルトン構造を持つことを示した.

• GN 方程式から CH 方程式を導く一方法を紹介した.

• 変形 CH 方程式，Novikov 方程式，2 成分 CH 方程式に関する最近の成果，特にソリトン解について述べた.

参考文献

[1] Serre, F.: Contribution à l'étude des écoulements permanents et vatiables dans les canaux. *Houille Blanche* **5**, 374-388 (1953)

[2] Su, C.H. and Gardner, C.S.: Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation, *J. Math. Phys.* **10**, 536-539 (1969)

[3] Green, A.E. and Naghdi, P.M.: A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J. Fluid Mech.* **78**, 237-246 (1976)

[4] Constantin, A.: *Nonlinear Water Waves with Applications to Wave-Current Interactions and Tsunamis.* SIAM, Philadelphia, 2011

[5] Lannes, D.: *Water waves problem: Mathematical analysis and asymptotics.* American Mathematical Society, 2013

[6] Fuchssteiner, B. and Fokas, A.S.: Sympletic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries. *Physica* **4D**, 47-66 (1981)

[7] Camassa, R. and Holm, D.D.: An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 41661-166 (1993)

[8] Camassa,R., Holm, D.D. and Hyman, J.M.: A new integrable shallow water equation. *Adv. Appl. Mech.* **31**, 1-33 (1994)

[9] Constantin, A.: The Hamiltonian structure of the Camassa-Holm equation. *Exp. Math.* **15**, 53-85 (1997)

[10] Johnson, R.S., Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves. *J. Fluid Mech.* **455**, 63-82 (2002)

[11] Constantin, A. and Lannes, D.: The hydrodynamic relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **192**, 165-186 (2009)

[12] Degasperis, A. and Procesi, M., Asymptotic integrability. Symmetry and Integrability (Ed. Degasperis, A. and Gacta, G.) World Scientific, Singapore, 23-37, 1999

[13] Beals R., Sattinger, D.H. and Szmigielski, J.: Multi-peakons and a theorem of Stieltjes. *Inv. Probl.* **15**, L1-L4 (1999)

[14] Matsuno, Y.: Parametric representation for the multisoliton solution of the Camassa-Holm equation. *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 1983-1987 (2005)

[15] Parker, A. and Matsuno, Y.: The peakon limits of soliton solutions of the Camassa-Holm equation. *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 12401 (2006)

[16] Matsuno, Y.: The peakon limit of the N-soliton solution of the Camassa-Holm equation. *J. Phys. Soc. Jpn.* **76**, 034003 (2007)

[17] Whitham, G.B.: *Linear and Nonlinear Waves.* Wiley, New York, 1974

[18] Fornberg, B. and Whitham, G.B.: Numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena. *Phyl. Trans. R. Soc. Lond. A* **289**, 373-404 (1978)

[19] Holm, D.D. and Ivanov, R.I.: Smooth and peaked solitons of the CH equation. *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 434003 (2010)

[20] Fokas, A.S.: On a class of physically important integrable equations. *Physica D*, **87**, 145-150 (1995)

[21] Olver, P.J. and Rosenau, P.: Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support. *Phys. Rev. E* **53**, 1900-1906 (1996)

[22] Qiao, Z.: A new integrable equation with cuspons and W/M-shape-peaks solitons. *J. Math. Phys.* **47**, 112701 (2006)

[23] Matsuno, Y.: Smooth and singular multisoliton solutions of a modified Camassa-Holm equation with cubic nonlinearity and linear dispersion. *J. Phys. A: Math. Theor.* **47**, 125203 (2014)

[24] Hone, A.N.W. and Wang, J.P.: Integrable peakon equations with cubic nonlinearity. *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 372002 (2008)

[25] Novikov, V.: Generalizations of the Camassa-Holm equation. *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 342002 (2009)

[26] Matsuno, Y.: Smooth multisoliton solutions and their peakon limit of Novikov's Camassa-Holm type equation with cubic nonlinearity. *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 365203 (2013)

[27] Constantin, A. and Ivanov, R.I.: On an integrable two-component Camassa-Holm shallow water system. *Phys. Lett. A* **372** 7129-7132 (2008)

[28] Ivanov, R.I.: Two-component integrable systems modelling shallow water waves. *Wave Motion* **46**, 389-396 (2009)