

# 端のある Fermi-Pasta-Ulam 格子の強制振動における 非線形局在モードの励起

阪大院・基礎工 西田 拓展 (Nishida Takunobu) \*  
渡邊 陽介 (Yosuke Watanabe) \*  
阪大院・工 土井 祐介 (Yusuke Doi) \*\*  
関西大・システム理工 杉本 信正 (Nobumasa Sugimoto) \*\*\*  
\* Graduate School of Engineering Science, Osaka University  
\*\* Graduate School of Engineering, Osaka University  
\*\*\* Faculty of Engineering Science, Kansai University

## 1. はじめに

完全な空間周期性をもつ非線形格子系において、安定な局在振動モードが励起されることがある。系自身の離散性と非線形性のために励起されるこのモードは非線形局在モード (Intrinsic Localized Mode : ILM) または離散ブリーザー (Discrete Breather : DB) と呼ばれ、非線形格子系に出現する普遍的な局在構造として知られている[1-5]。ILM の研究対象分野は、現在、電磁気学、固体電子工学、光学そして生体工学等多岐にわたっているが、理論解析による研究が大半を占めており、実験的な研究は少ない(例えば[6-10])。その大きな理由は所望する非線形性の実現の困難さにある。シンプルな系に限っても、ILM の詳細な理論研究がなされながら、実験的に検証されていない系がたくさんあり、有名な Fermi-Pasta-Ulam(FPU)- $\beta$  格子もその一つである[11-17]。また ILM は系のサイズや時間スケールに依らない振動モードであるにも関わらず、直接我々の目で観測できるスケールをもった ILM の実験系の報告例は非常に限られている。

本研究では FPU- $\beta$  格子を模した振動子列を作成し、目視で確認できる ILM の励起実験を行なった。モーターとクランク機構からなる加振装置を用いて振動子列の一端を正弦的に加振し (他端は固定)、加振条件とその系に励起される振動モードの関係や、モードの振動特性について詳しく調べた。また実験と並行して、実験系に対応する解析モデルを構築し、実験結果と数値解析結果の比較、検討をおこなった。

本稿では、第 2 章で解析モデルを述べ、第 3 章で数値解析を用いて ILM を励起してその性質を調べる。第 4 章で ILM の励起実験について述べ、第 5 章でまとめを述べる。

## 2. 解析モデル

### 2.1 支配方程式

同じ質量( $m$ )を持つ  $N$  個の質点が、同じ特性を示すバネを介して一直線に並んだ有限長さの「質点-バネ系」を力学モデルとする(図 1). 各質点の運動は列方向に制限されるもの(縦波)と仮定する. 平衡状態における  $j$  番目の質点の変位を  $x_j$  とし、隣の  $j+1$  番目の質点との間に取り付けられたバネの平衡状態からの変位を  $r_j$ ,

$$r_j = x_{j+1} - x_j, \quad (2.1)$$

バネが質点に作用する力を  $F_j$

$$F_j = F(r_j) \quad (2.2)$$

とする.

現実には振動に対して様々な減衰効果(バネ自身の持つ減衰効果やおもりを吊っている糸との摩擦, 空気抵抗等)が作用するので, 本モデルでは各バネに並列にダンパ(減衰係数  $c$ )を取り付けることにより, これらの減衰効果をまとめて考慮するものとする. このとき  $j$  番目 ( $j=1, \dots, N$ ) の質点に対する運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_j &= F(r_j) - F(r_{j-1}) + c(\dot{r}_j - \dot{r}_{j-1}) \\ &= F(x_{j+1} - x_j) - F(x_j - x_{j-1}) + c[(\dot{x}_{j+1} - \dot{x}_j) - (\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1})] \end{aligned} \quad (2.3)$$

と書くことができる. 両端を固定する場合の境界条件は

$$x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0 \quad (2.4)$$

であり, 後述する実験のように, 系の左を正弦的に加振し(振幅  $A$ , 角振動数  $\omega_d$ ), 右端を固定する場合, 境界条件は

$$x_0(t) = A \sin \omega_d t, \quad x_{N+1}(t) = 0 \quad (2.5)$$

で与えられる.

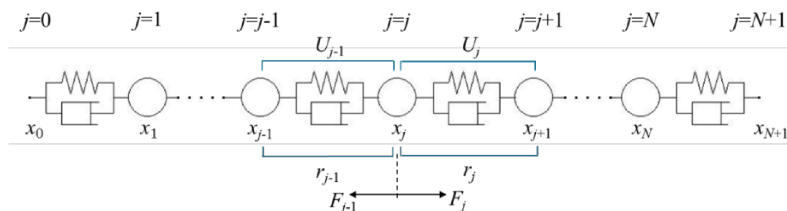


図 1 ダンパの付いた質点-バネ系

## 2.2 バネ特性

本研究で用いるバネの「変位-力」特性を図2に示す。

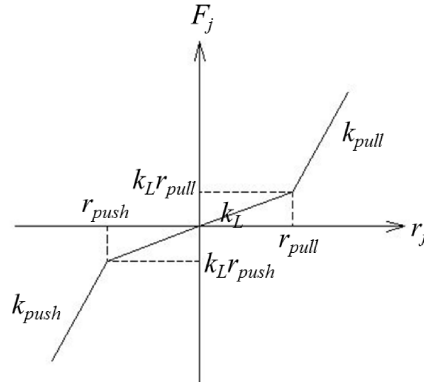


図2 実験で使用したバネのバネ特性(式(2.7)の区分1次近似)

バネ特性は区分線形的であり、変位  $r_j$  が  $r_{push} \leq r_j \leq r_{pull}$  を超えたときに直線の傾きが変化するものとする ( $r_{push}$  と  $r_{pull}$  はバネ定数変化変位).  $k_L$  を変位が小さいときの直線の傾き (バネ定数),  $k_{push}$  と  $k_{pull}$  をそれぞれ  $r_j < r_{push}$  (「押し」) と  $r_{pull} < r_j$  (「引き」) のときの直線の傾きとすると、バネ特性は

$$F_j = F(r_j) = \begin{cases} k_{push}r_j + (k_L - k_{push})r_{push} & (r_j \leq r_{push}) \\ k_L r_j & (r_{push} \leq r_j \leq r_{pull}) \\ k_{pull}r_j + (k_L - k_{pull})r_{pull} & (r_{pull} \leq r_j) \end{cases} \quad (2.6)$$

と表わされる. 平衡点に関して対称な場合, このバネ特性は FPU- $\beta$  格子系における復元力

$$F_j = k_L r_j + k_C r_j^3 \quad (2.7)$$

の適切でシンプルな近似とみなすことができる. 以下本稿では式(2.6)及び式(2.7)のバネによる格子系をそれぞれ「区分1次系」, 「FPU- $\beta$ 系」呼ぶ.

## 3. 数値解析

### 3.1 区分1次系における ILM

以下の解析で用いる定数の値を表1に示す. これらの値は作成した実験装置およびバネ特性の実測値 (図3) から得られたものである. バネは 0.020[m]変位した状態が平衡状態となるように実験装置に取り付けられている. 線形解析から 39 個の固有振動数 (図4) およびカットオフ振動数 (39.75[rad/s]) が得られる.

表 1 パラメーター値

Parameter		
$N = 39$	$m = 99.1 \times 10^{-3} [\text{kg}]$	$c = 2.118 \times 10^{-3}$
$k_{push} = 117.82 [\text{N/m}]$	$k_L = 39.20 [\text{N/m}]$	$k_{pull} = 99.14 [\text{N/m}]$
$r_{push} = -0.02 [m]$	$r_{pull} = 0.02 [m]$	

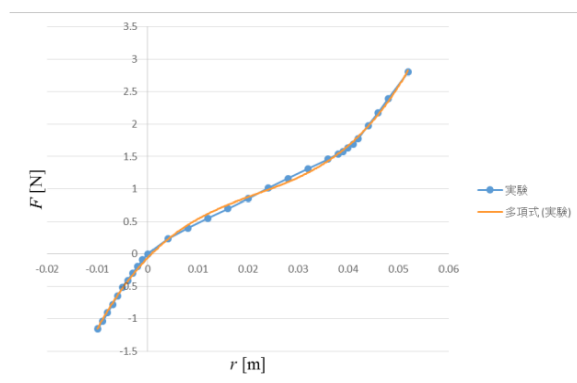
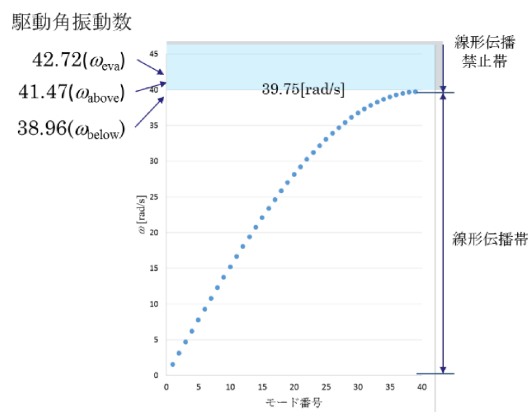
図 3 バネ特性 (実験値と FPU- $\beta$  系の近似曲線)

図 4 モード番号に対する固有角振動数と駆動角振動数

まず区分 1 次系における ILM の励起の有無を調べる. 境界条件として両端固定条件(2.4)式を課し, 初期条件として系中心の数個の質点に対して適切な初期変位 (初速度は 0) を与える. 先行研究の結果をもとに, ここでは 9 つの質点に対して odd 型の変位を与えた(図 5).

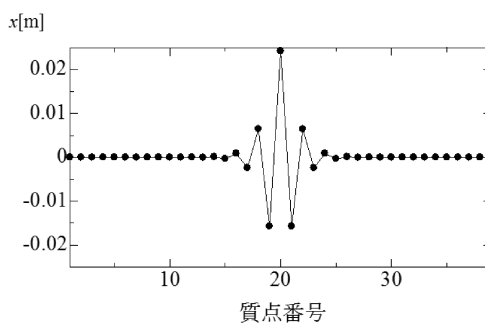
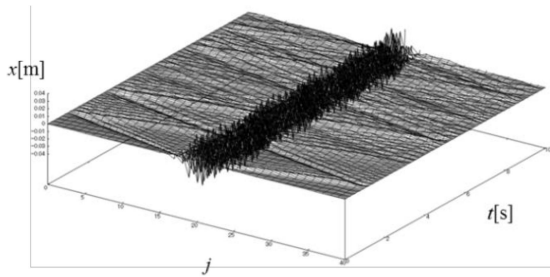
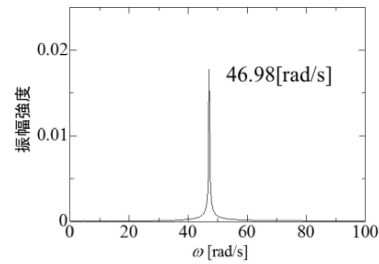


図 5 odd 型初期変位

得られた数値計算結果を図 6 に示す. 同図の(a)は系の時空間発展を, 同図(b)は 20 番目の質点の振動のスペクトルを示している. 系の中心で定在する局在振動が励起されていること及びスペクトルのピークを与える振動数がカットオフ振動数よりも高いことから, 得られた解が定在型 ILM であることがわかる.



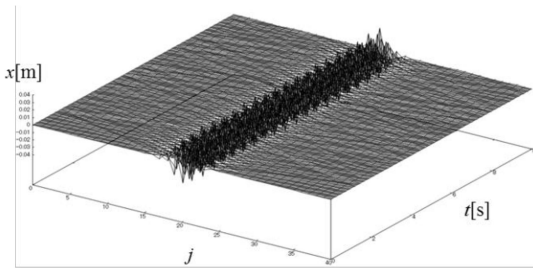
(a) 系の時空間発展 (定在型 ILM)



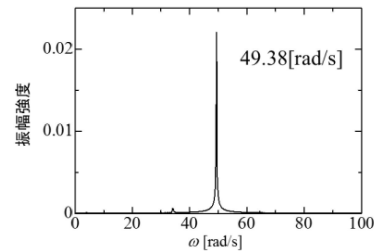
(b) 20 番目の質点の振動のスペクトル

図 6 区分 1 次系

次に比較のため、同じ境界条件、初期条件の下で、FPU- $\beta$  系に励起される定在型 ILM の特性を調べた。式(2.7)における  $k_c$  の値は、図 3 の曲線が 3 次関数であるとして、最小二乗法で近似して求められる。FPU- $\beta$  系に対する計算結果を図 7 に示す。図 6 と図 7 の比較から系の時空間発展は区分 1 次系の方が FPU- $\beta$  系より系全体に線形波が伝播しているのが分る。振動数は FPU- $\beta$  系の方が区分 1 次系より大きい値となっている。区分 1 次系は系全体に微小な線形波が伝播している為、ILM の持つエネルギーが FPU- $\beta$  系より小さくなり、それに伴って ILM の振幅が小さくなったことが原因と考えられる。



(a) 系の時空間発展 (定在型 ILM)

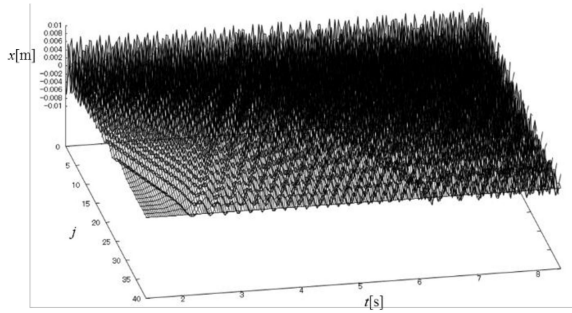


(b) 20 番目の質点の振動のスペクトル

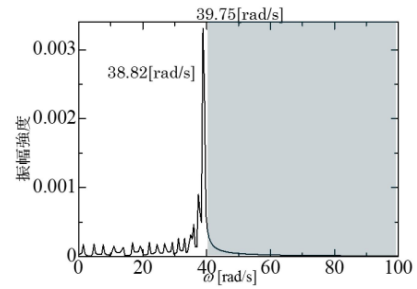
図 7 FPU- $\beta$  系

### 3.2 一端駆動による移動型 ILM の励起

次に系の一端を正弦的に駆動し、系に励起される振動モードを調べる。系他端は固定し、加振はカットオフ振動数よりも高い 3 つの角振動数、 $38.96[\text{rad/s}] (\equiv \omega_{\text{below}})$ ,  $41.47[\text{rad/s}] (\equiv \omega_{\text{above}})$ ,  $42.72[\text{rad/s}] (\equiv \omega_{\text{eva}})$  で行なう。また、駆動振幅  $A$  の値はバネ定数変化変位が  $0.020[\text{m}]$  に対して  $0.007[\text{m}]$  及び  $0.015[\text{m}]$  を用いる。数値解析で用いたパラメータ値は 3.1 節と同様に全て実験に基づいた値である(表 1)。図 8 と図 9 は駆動振幅  $0.007[\text{m}]$ 、駆動角振動数  $\omega_{\text{below}}$  及び  $\omega_{\text{above}}$  のときの系の時空間発展と 20 番目の質点の振動のフーリエスペクトルを示している。 $\omega_{\text{below}}$  のとき、線形波が励起され、 $\omega_{\text{above}}$  のときはエバネッセントモードとなった。

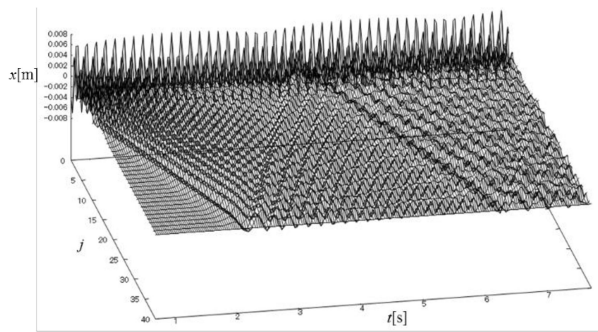


(a) 系の時空間発展

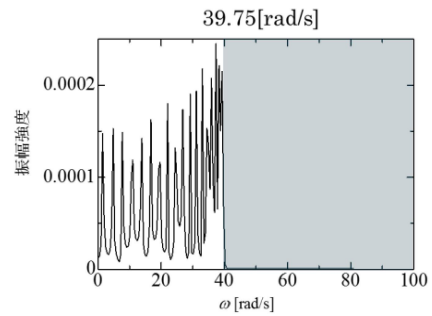


(b) 20番目の質点の振動のスペクトル

図8 駆動振幅 : 0.007[m], 駆動角振動数 :  $\omega_{below}$



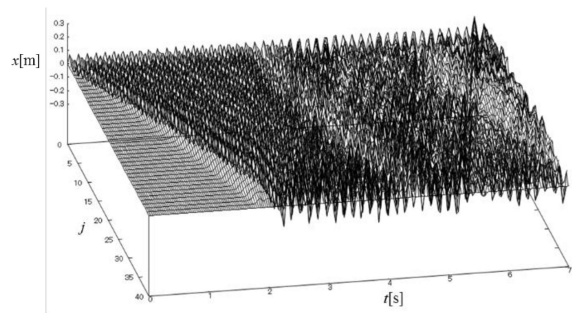
(a) 系の時空間発展



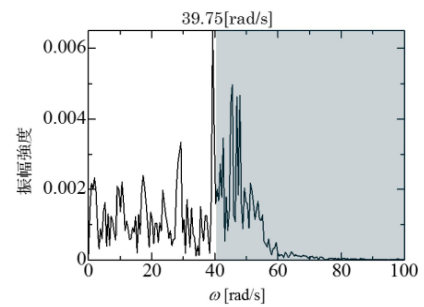
(b) 20番目の質点の振動のスペクトル

図9 駆動振幅 : 0.007[m], 駆動角振動数 :  $\omega_{above}$

図10, 図11と図12は駆動振幅が0.015[m], 駆動角振動数がそれぞれ $\omega_{below}$ ,  $\omega_{above}$ 及び $\omega_{eva}$ のときの系の時空間発展と20番目の質点の振動のフーリエスペクトルを示している。 $\omega_{below}$ のとき, 系には線形波と非線形波が混在していた。 $\omega_{above}$ のとき, 系を伝播する局在振動を確認した. 局在振動は駆動端から間欠的に励起され, 一定の速度で伝播して固定端で反射した. フーリエスペクトルは線形波伝播禁止帯に大きなピークを持つことから, この局在振動は移動型 ILM であることが分かった. $\omega_{eva}$ のときはエバネッセントモードとなった.

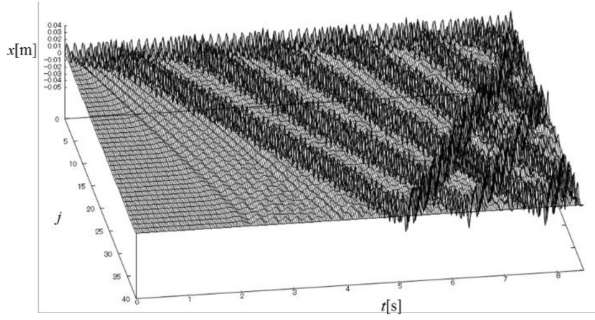


(a) 系の時空間発展

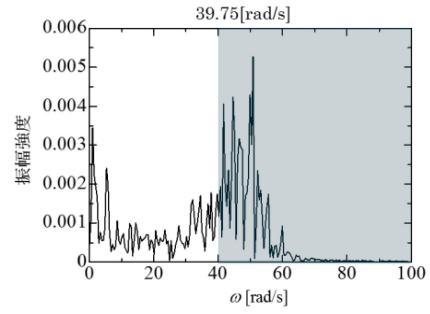


(b) 20番目の質点の振動のスペクトル

図10 駆動振幅 : 0.015[m], 駆動角振動数 :  $\omega_{below}$

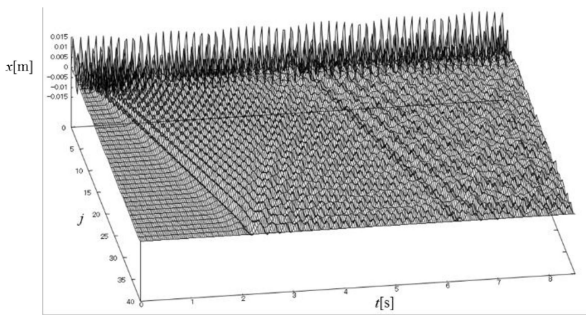


(a) 系の時空間発展

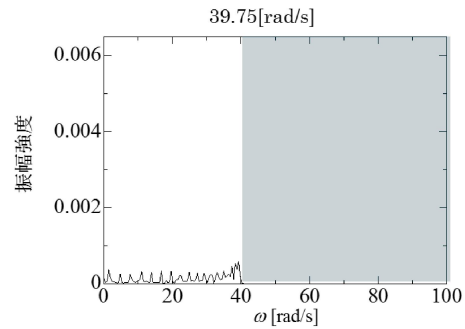


(b) 20番目の質点の振動のスペクトル

図 11 駆動振幅 : 0.015[m], 駆動角振動数 :  $\omega_{above}$



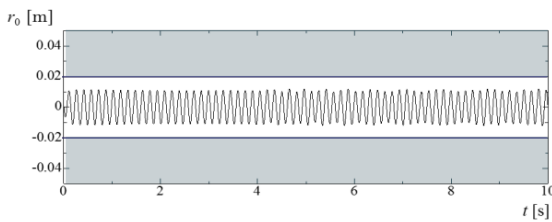
(a) 系の時空間発展



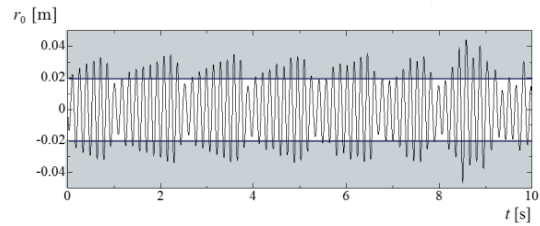
(b) 20番目の質点の振動のスペクトル

図 12 駆動振幅 : 0.015[m], 駆動角振動数 :  $\omega_{eva}$

図 11(a)における局在振動が励起されるタイミングを明らかにするために、駆動振幅と駆動端に接続されたバネの変位  $r_0$  との関係調べた (図 13) . 駆動振幅 0.007[m]の場合、バネの変位は常に線形の領域 ( $r_{push} \leq r_0 \leq r_{pull}$ ) に留まっているが、駆動振幅が 0.015[m]の場合、バネの変位はバネ定数変化変位より大きくなり、このタイミングで移動型 ILM が励起されることが分った。



(a) 駆動振幅 : 0.007[m]



(b) 駆動振幅 : 0.015[m]

図 13 駆動角振動数  $\omega_{above}$  における  $r_0$  の比較

## 4. 実験

### 4.1 実験装置

実験装置の構成を図 14 に示す。質点-バネ系は 39 個のおもりと 40 個の非線形バネから成る。

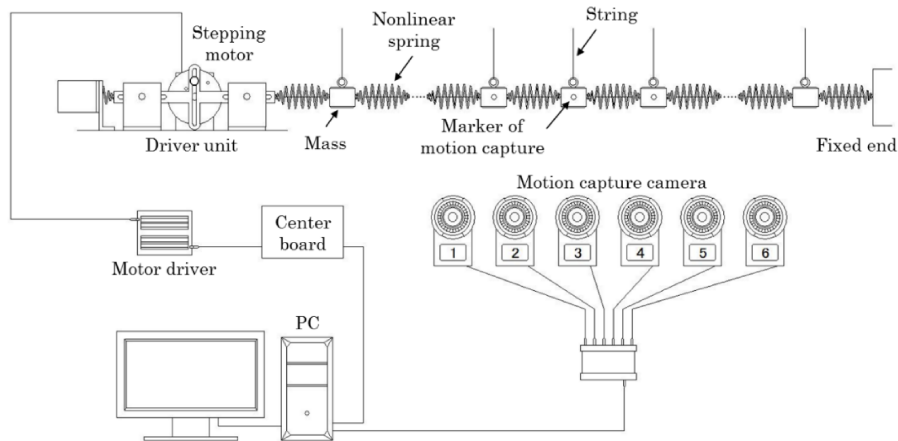


図 14 実験装置の構成

図 15 には非線形バネとして実験で使用する樽型コイルバネの詳細を示す。樽型コイルバネの特徴は、コイル平均径の大きいバネ中心部の素線にかかる応力が他の部分より大きくなり、それに伴って変位も他より大きくなることである。「押し」ではバネ中心部の素線が密着するのでバネ定数が大きくなる(図 15 左)。一方、「引き」では線形バネの挙動をするので素線間にポリエチレン製の糸を渡すことによって、大きな伸びに対しては糸が緊張してバネ定数を変化大きくする(図 15 右)。この樽型コイルバネの特性を図 16 に示す。変位が 0mm のとき素線が密着、40mm のとき糸が緊張し、バネは 20mm 変位した状態で装置に取り付けられる為、バネ定数変化変位は押し引き共に 20mm のときに変化する。

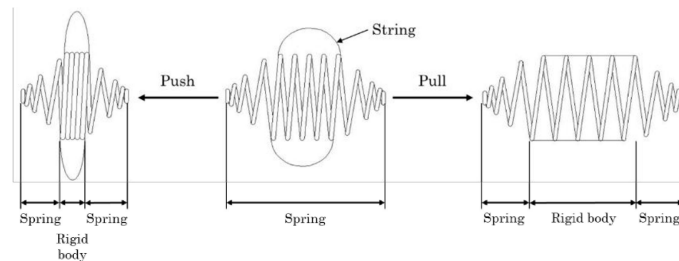


図 15 非線形バネの詳細



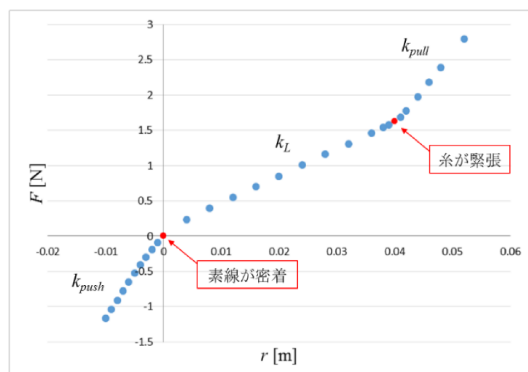


図 16 非線形バネのバネ特性

おもりを 2 点から十分長い糸で V 字型に吊るすことによって、おもりが縦方向にのみ振動するように拘束する。さらに、バネを 20mm 引っ張った状態で装置に取り付け、圧縮を受けても振動子列が座屈することは無い。次に、図 17 に駆動装置を示す。ステッピングモーターの回転運動をスコッチヨークを用いて直線運動に変換し、振動子列の端を正弦的に加振する。

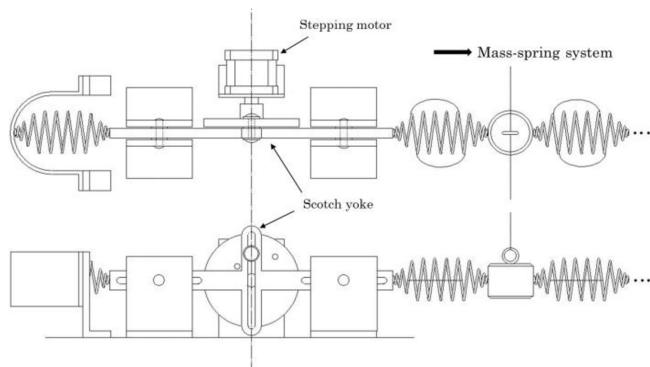


図 17 駆動装置

おもりの振動の解析は、モーションキャプチャーシステムによるおもりの位置情報を利用して行なう。9 番目から 29 番目の 21 個のおもりをトラッキングし、モーションキャプチャーは原点からの 3 次元の位置情報を出力するが、座標系の 1 つの軸をおもりの振動方向と平行となるように設定し、その成分の値のみを用いて振動解析を行なった。

## 4.2 実験結果

駆動振動数及び駆動振幅は 3.2 節と同じ値を用いる。図 18 と図 19 は駆動振幅 0.007[m]、駆動角振動数  $\omega_{\text{below}}$  及び  $\omega_{\text{above}}$  のときのモーションキャプチャーシステムで捉えた系の時空間発展を示している。 $\omega_{\text{below}}$  のときは微小な線形波が励起され、 $\omega_{\text{above}}$  のときはエバネッセントモードとなりエネルギーがほとんど系に入らず、局在振動は励起されなかった。これは数値解析でも示した通り、駆動振幅がバネ定数変化変位に対して十分小さく、駆動端に接続されたバネの変位がバネ定数変化変位に達しなかった為である。

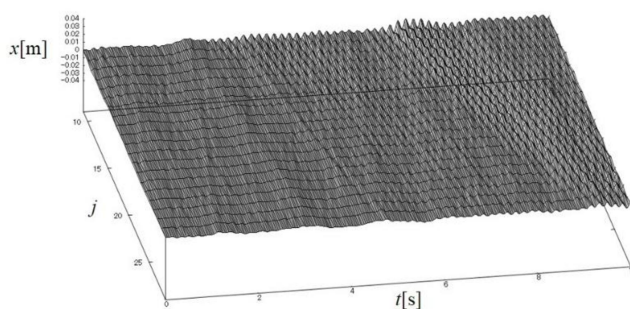


図 18 駆動振幅：0.007[m]，駆動角振動数： $\omega_{\text{below}}$  のときの系の時空間発展

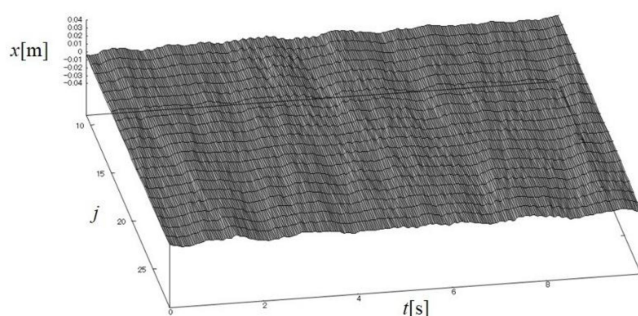
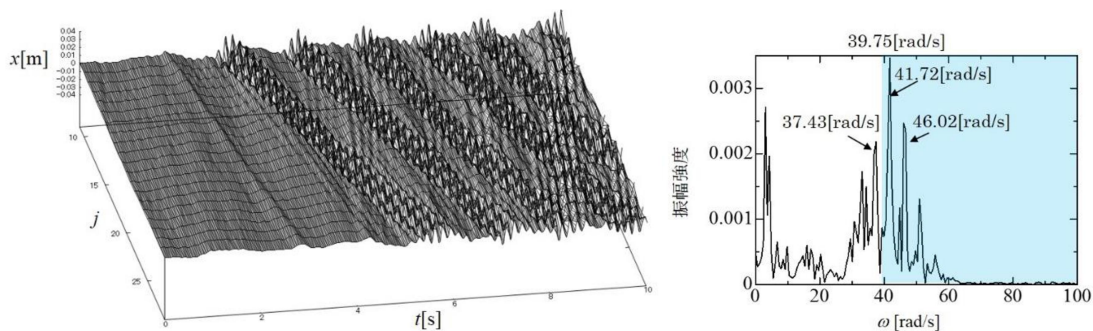


図 19 駆動振幅：0.007[m]，駆動角振動数： $\omega_{\text{above}}$  のときの系の時空間発展

図 20 は駆動振幅 0.015[m]，駆動角振動数  $\omega_{\text{above}}$  のときの系の時空間発展と 15 番目のおもりの振動のスペクトルを示している。数値解析の結果と同じように，駆動端から間欠的に励起された局在振動が系を伝播し，固定端で反射する様子を観察した。フーリエスペクトルは線形伝播禁止帯にいくつも大きなピークを持つことから，励起された局在振動は移動型 ILM であることが分った。以上の実験結果は前章で示した数値計算の結果と非常に類似していることが分る。



(a) 系の時空間発展

(b) 15 番目のおもりの振動のスペクトル

図 20 駆動振幅：0.015[m]，駆動角振動数： $\omega_{\text{above}}$

## 5. まとめ

FPU- $\beta$  格子モデルの格子間相互作用を模した区分 1 次関数で表される樽型バネを考案し、これを用いた質点-バネ系の力学実験装置を作成した。系の一端をカットオフより高い振動数で駆動することによって実験的に ILM を励起することに成功した。ILM は駆動端から間欠的に励起され、一定の速度で移動した。ILM が励起する駆動振動数には上限があり、その上限を超えた駆動振動数で加振するとエバネッセントモードとなることが分った。

励起実験と同時に進めた数値解析の結果は実験結果と良い一致を示した。更に移動型 ILM の励起のメカニズムや、厳密な FPU- $\beta$  格子系とその区分 1 次近似系における ILM の特性の違いについて詳しい考察をおこなった。これまで理論研究しか行なわれていなかった FPU- $\beta$  格子系の ILM (移動型) を実験的に励起し、その存在を確認した。

## 参考文献

1. J. Sievers and S. Takeno. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 61(8):970-973, 1988.
2. S. Aubry. Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization. *Physica D*, 103:201-250, 1997.
3. S. Flach and C. R. Willis. Discrete breathers. *Phys. Rep.*, 295:181-264, 1998.
4. Y. S. Kivshar and S. Flach (Eds.). Focus issue: Nonlinear localized modes: physics and applications. *Chaos*, 13:586-799, 2003.
5. D. K. Campbell, S. Flach and Y. S. Kivshar. Localizing energy through nonlinearity and discreteness. *Phys. Today*, 57:43-49, 2004.
6. E. Trias, J. J. Mazo and T. P. Orlando. Discrete breathers in nonlinear lattice: Experimental detection in a Josephson array. *Phys. Rev. Lett.*, 84, 741-744 (2000).
7. P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach and Y. Zolotaryuk. Observation of breather in Josephson ladders. *Phys. Rev. Lett.* 84, 745-748 (2000)
8. M. Sato, B. E. Hubbard, A. J. Sievers, B. Ilic, D. A. Czaplewski and H. G. Craighead. Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array. *Phys. Rev. Lett.*, 90:044102, 2003.
9. M. Kimura and T. Hikiyara. Coupled cantilever array with tunable on-site nonlinearity and observation of localized oscillations. *Phys. Lett. A*, 373:1257-1260, 2009.
10. J. Cuevas, L. Q. English, P. G. Kevrekidis and M. Anderson. Discrete breathers in a forced-damped array of coupled pendula: modeling, computation, and experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 102:224101, 2009.
11. G. Gallavotti. *The Fermi-Pasta-Ulam problem*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
12. K. Yoshimura, Y. Doi. Moving discrete breathers in nonlinear lattice: resonance and stability. *Wave Motion*, 45:83-99, 2007.
13. F. Geniet and J. Leon. Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain. *Phys. Rev. Lett.*, 89(13):134102, 2002.
14. F. Geniet and J. Leon. Nonlinear supratransmission. *J. Phys.: Condens. Matter*, 15:2933-2949, 2003.
15. A. Spire and J. Leon. Nonlinear absorption in discrete systems. *J. Phys. A*, 37:9101-9108, 2004.
16. J. Leon. Nonlinear supratransmission as a fundamental instability. *Phys. Lett. A*, 319:130-136, 2003.
17. R. Khomeriki, S. Lepri and S. Ruffo. Nonlinear supratransmission and bistability in the Fermi-Pasta-Ulam model. *Phys. Rev. E*, 70:066626, 2004.