数理解析研究所講究録
第 1948 巻 2015 年 1-5

ナッシュ曲面上定義されたナッシュ写像族の半代数的タイプの有限性について

兵庫教育大学大学院学校教育研究科　小池敏司
Satoshi Koike
Faculty of School Education,
Hyogo University of Teacher Education

§1. 概念と記号の準備

本稿は、名古屋大学多元数理科学研究科の塩田昌弘氏との共著論文 [9] の中で示された結果の解説である。

半代数的集合 (semialgebraic set)、または、より一般に半代数的カテゴリーは、実代数幾何学の分野の中で、最も重要な研究対象の一つである。最初に、この半代数的に関する用語を準備する。

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の C^∞ 部分多様体 N が**ナッシュ多様体**であるとは、それが $\mathbb{R}^n$ の半代数的集合のときにいう。ナッシュ多様体は解析多様体であることが知られている (B. Malgrange [11])。

ナッシュ多様体 $M \subset \mathbb{R}^m$、$N \subset \mathbb{R}^n$ 間の C^∞ 写像 $f : M \to N$ が**ナッシュ写像**であるとは、f のグラフが $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ の半代数的集合のときにいう。ナッシュ写像は解析写像であることが知られている ([11])。

以上のことから、ナッシュのカテゴリーは、代数的なカテゴリーと解析的なカテゴリーの間にあることがわかる。ナッシュとは、実多項式全体を含むものの中で、その中で陰関数定理や逆関数定理が成り立つ最少のカテゴリーである。

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が (d 次元) **ナッシュ開単体** (Nash open simplex) であるとは、A が $\mathbb{R}^d$ にナッシュ微分同相であるときにいう。

今後、$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すものとする。次に、ユークリッド空間の間の多項式写像に対して、二つの同値関係を導入する。

定義 (1.1) 二つの多項式写像 $f,\ g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ が**位相同値**であるとは、同相写像 $\sigma : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ と $\tau : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^p$ が存在して、次の図式が可換になるときにいう：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^P \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\tau \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{K}^p \end{array}$$

定義 (1.2) 二つの実多項式写像 $f,\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ が**半代数的同値**であるとは、半代数的同相写像 $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と $\tau : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ が存在して、次の図式が可換になるときにいう：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^P \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\tau \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

注意 (1.3) 上の定義 (1.1)、(1.2) で定義した写像間の位相同値や半代数的同値の概念を、ナッシュ多様体間のナッシュ写像に対するものに、更に、ナッシュ集合上定義されたナッシュ写像のものに対しても、同様に定義することにする。
また、それらの同値に関する、写像族に対する自明性の概念も自然の形で定義することにする。

この節の最後に、本稿でよく用いる記号を一つ準備する。次数が d 以下の $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^p$ への多項式写像全体の集合を

$$P(n, p, d; \mathbb{K})$$

で表すことにする。

§2. 有限性定理

この節の前半で、これまでに知られた多項式写像族に対する位相型、半代数的型に関する有限性定理を概説する。最初の有限性に関する結果は、福田拓生先生によって示された、多項式関数族に対する次の有限性定理である。

定理 (2.1) (T. Fukuda [3]) $P(n, 1, d; \mathbb{K})$ に現れる位相型の数は有限である。

上の定理は、トムの第２イソトピー補題（[17, 12, 5]）を用いて示されている。また、この論文の中で、多項式写像をその定義域、値域にそれぞれ与えられた半代数的集合族に適合するように層化する、福田の層化写像補題が示されていることも注意しておく。
福田先生の結果に続いて、青木憲二氏が多項式平面写像族に対する有限性定理を示している。

定理 (2. 2) (K. Aoki and H. Noguchi [1]) $P(2, 2, d; \mathbb{K})$ に現れる位相型の数は有限である。

この結果も、最終的にはトムのイソトピー補題を用いて示されている。そのために、多項式写像族の行き先の平面 $\mathbb{K}^2$ を何度もブローアップするアイデアが用いられている。
青木氏の複素の場合の結果は、C. Sabbah 氏によって、次のように一般化されている。

定理 (2.3) (C. Sabbah [14]) $P(2, p, d; \mathbb{C})$ に現れる位相型の数は有限である。

こちらの結果は複素の場合なので、トムのイソトピー補題以外に、広中先生（[6, 7]）によって導入された基底変換 (base change) を用いて示されている。

一方、福田先生の有限性定理（定理 (2.1)）は、R. Benedetti 氏と塩田昌弘氏によって、より強い形で示されている。

定理 (2.4) (R. Benedetti - M. Shiota [2]) $P(n, 1, d; \mathbb{R})$ に現れる半代数的型の数は有限である。

塩田氏は著書 [15] の中で、半代数的版トムの第１、第２イソトピー補題を証明している。そのイソトピー補題を用いれば、定理 (2.4) は福田先生の有限性定理と全く同様の議論で従うことになる。ただ、定理 (2.4) の仕事の方が先なので、半代数的版イソトピー補題ではなく、多項式関数族に対する実効的三角形分割定理 (effective triangulation theorem for polynomial functions) を用いて示されている。

著者は論文 [8] の中で、実代数的集合族に対する同程度特異性問題として、３次元実代数的集合族に対するブロー半代数的自明性に関する有限性定理を示した。そこでは、塩田氏の半代数的版トムのイソトピー補題を用いている。その証明の系として、次の有限性定理が得られている。

定理 (2.5) (S. Koike [8]) $P(2, p, d; \mathbb{R})$ に現れる半代数的型の数は有限である。

上述した有限性定理は、いずれもそれらの証明から、多項式写像の多項式族に対する位相自明性や半代数的自明性に関する有限性定理として読み取ることができる。実際、定理 (2.5) は次の結果と見なすことができる：

$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^p$ への実多項式写像の多項式族が与えられたとする。このとき、パラメータ空間のナッシュ開単体への有限分割で、各ナッシュ開単体上、実多項式族が半代数的自明になるものが存在する。

我々は、上の結果を実代数的なものからナッシュの場合へ、更には、定義域が滑らかでない特異点を持つ場合にまでもっと一般化したい。本稿の最初の主結果は、そのような結果である。

主定理 I (S. Koike - M. Shiota [9]) V を孤立特異点を持つナッシュ曲面、N を非特異ナッシュ多様体 (non-singular Nash variety)、J を半代数的集合とする。V 上定義されたナッシュ写像のナッシュ族 $\{f_t : V \to N\}_{t \in J}$ が与えられたとする。このとき、パラメータ空間 J のナッシュ開単体への有限分割 $J = Q_1 \cup \cdots \cup Q_u$ で、各ナッシュ開単体 Q_i 上、ナッシュ族

$$\{f_t : V \to N\}_{t \in Q_i}$$

が半代数的自明になるものが存在する。

ナッシュ曲面 V に対し、部分集合

$$MV := \{x \in V \mid \operatorname{local\,dim}_x V = 2\}$$

をその**主部** (main part) と呼ぶ。

V が孤立特異点を持つナッシュ曲面であるとき、V は主部 MV と有限個の孤立点からなりたっている。

§3. 位相モデュライの出現定理

位相型に関する有限性定理は、一般に、3変数以上の多項式写像族に対しては成り立たないことが知られている。実際、位相モデュライの出現に関して、以下の結果が知られている。

定理 (3.1) (R. Thom [16]) $P(3,3,12;\mathbb{R})$ に現れる位相型は連続濃度ある。

上記のトムの結果の証明のアイデアをより精密化することにより、中井功氏は大域的な位相モデュライだけでなく、局所位相モデュライの出現定理を示した。

定理 (3.2) (I. Nakai [13]) $P(3,2,4;\mathbb{R})$ に現れる局所位相型は連続濃度ある。

一方、M. Kwieciński 氏は、局所位相モデュライが現れる簡単な複素多項式写像を構成した。

定理 (3.3) (M. Kwieciński [10]) $\mathbb{C}^4$ の座標を (x_1, x_2, z, t) とし、X を $x_1x_2 = 0$ で定義された $\mathbb{C}^4$ の超曲面とする。このとき、$f(0,0,0,t) = (0,0,t)$ を満たす多項式写像 $f : X \to \mathbb{C}^3$ で、多項式写像芽族

$$\{f_t : (X, (0,0,0,t)) \to (\mathbb{C}^3, (0,0,t)) \mid |t| = 1\}$$

に現れる局所位相型は連続濃度となるものが存在する。

我々の2番目の主結果は以下のものである。

主定理 II (S. Koike - M. Shiota [9]) 1次元特異点集合を持つ実代数曲面 X と、X 上定義された実多項式写像の多項式族 $\{f_t : X \to \mathbb{R}^2\}_{t \in J}$ で、その多項式写像族に現れる位相型が連続濃度となるものが存在する。

注意 (3.4) (1) 主定理 II の代数曲面は1次元特異点集合を持つので、非孤立特異点である。従って、主定理 I から孤立特異点の仮定が外せないことがわかる。
(2) 定理 (3.1) から定理 (3.3) の位相モデュライの出現定理において、定義域の次元が3であるのに対し、我々の場合の定義域の次元は2である。一方、それらの定理では、位相モデュライが現れる多項式写像 (族) が具体的に構成されているのに対し、我々の場合には、そのような多項式写像族の存在のみを示しているだけである。

References

[1] K. Aoki and H. Noguchi, *On topological types of polynomial map germs of plane to plane*, Memoirs of the School of Science and Engineering, Waseda University **44** (1980), 133–156.

[2] R. Benedetti and M. Shiota : *Finiteness of semialgebraic types of polynomial functions*, Math. Zeitschrift **208** (1991), 589–596.

[3] T. Fukuda : *Types topologiques des polynômes*, Publ. Math. I.H.E.S. **46** (1976), 87–106.

[4] C.G. Gibson, K. Wirthmüller, A. du Plessis and E.J.N. Looijenga : *Topological stability of smooth mappings*, Lect. Notes in Math., Springer, **552** (1976).
Publ. Math. I.H.E.S. **46** (1976), 87–106.

[5] C.G. Gibson, K. Wirthmüller, A. du Plessis and E.J.N. Looijenga : *Topological stability of smooth mappings*, Lect. Notes in Math., Springer, **552** (1976).

[6] H. Hironaka : *Flattening theorem in complex analytic geometry*, Amer. J. Math. **97** (1975), 503–547.

[7] H. Hironaka : *Stratification and flatness*, Real and Complex Singularities (Oslo 1976), (Ed. P. Holm), Sithoff and Noordhoff, 1977, pp. 196–265.

[8] S. Koike : *Finiteness theorem for blow-semialgebraic triviality of a family of three-dimensional algebraic sets*, Proc. London Math. Soc. **105** (2012), 506–540.

[9] S. Koike and M. Shiota : *Finiteness on semialgebraic types of Nash mappings defined on a Nash surface*, preprint.

[10] M. Kwieciński : *A complex map with complex topology*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 397–399.

[11] B. Malgrange : *Ideals of differentiable functions*, Oxford Univ. Press, 1966.

[12] J. Mather : *Notes on topological stability*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (2012), 475-506.

[13] I. Nakai : *On topological types of polynomial mappings*, Topology **23** (1984), 45–66.

[14] C. Sabbah : *Le type topologique éclaté d'une application analytique*, Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics, Vol. **40** (1983), part 2, pp. 433–440.

[15] M. Shiota : *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150**, Birkhäuser, 1997.

[16] R. Thom : *La stabilité topologique des applications polynomiales*, Enseignement Math. (2) **8** (1962), 24–33.

[17] R. Thom : *Local topological properties of differentiable mappings*, Oxford Univ. Press, London, 1964, pp. 191-202.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HYOGO UNIVERSITY OF TEACHER EDUCATION, 942-1 SHIMOKUME, KATO, HYOGO 673-1494, JAPAN

E-mail address: `koike@hyogo-u.ac.jp`